



ФАМЭБ'2012
XI

*Российская академия наук
Министерство образования и науки РФ
Научно-исследовательский институт проблем пожарной безопасности
Институт математики
Институт нефти и газа
Сибирский федеральный университет
Красноярский государственный торгово-экономический институт
Институт вычислительного моделирования СО РАН*

Т Р У Д Ы

*ОДИННАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО ФИНАНСОВО-АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ
И ЭВЕНТОЛОГИИ БЕЗОПАСНОСТИ*

*К р а с н о я р с к
2012*

УДК 519.248: [004.8+33+301+159.9]

Т 78

Труды XI международной ФАМЭБ'2012 конференции. Под ред. Олега Воробьёва. — Красноярск: НИИППБ, СФУ, 2012. — 423 с.

ISBN 978-5-94876-099-5

Конференция поддержана
Научно-исследовательским институтом проблем пожарной безопасности

Редакционная коллегия:

Амельчугов С.П., д. техн. наук, профессор

Баранова И.В., канд. физ.-мат. наук

Быкова В.В., канд. техн. наук, профессор

Воробьёв О.Ю., д-р физ.-мат. наук, профессор (редактор)

Голденко Е.Е., канд. физ.-мат. наук

Клочков С.В., канд. физ.-мат. наук

Лукьянова Н.А.

Мажаров В.Ф., д-р мед. наук

Новосёлов А.А., канд. физ.-мат. наук

Семёнова Д.В., канд. физ.-мат. наук (помощник редактора)

© НИИ проблем пожарной безопасности, 2012

© Институт математики, 2012

© Институт нефти и газа, 2012

© Сибирский федеральный университет, 2012

© Красноярский государственный торгово-экономический институт, 2012

© Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2012

ISBN 978-5-94876-099-5

Russian Academy of Sciences
Ministry of Education and Science of RF
Research Institute for Fire Safety Problems
Institute of Mathematics
Institute of Petroleum and Natural Gas Engineering
Siberian Federal University
Krasnoyarsk State Trade Economy Institute
Institute of Computational Modeling of SB RAS

P R O C E E D I N G S
OF XI INTERNATIONAL CONFERENCE
ON FINANCIAL AND ACTUARIAL MATHEMATICS
AND EVENTOLOGY OF SAFETY

K r a s n o y a r s k
2012

УДК 519.248: [004.8+33+301+159.9]

T78

Proceedings of the XI International FAMES'2012 Conference. Oleg Vorobyev, ed. — Krasnoyarsk: RIFS, SFU, 2012. — 423 p.

ISBN 978-5-94876-099-5

The conference is supported by
Research Institute for Fire Safety Problems

Editorial board:

Amelchugov S.P., professor

Baranova I.V., Ph.D.

Bykova V.V., professor

Goldenok E.E., Ph.D.

Klochkov S.V., Ph.D.

Lukyanova N.A.

Mazharov V.F., Ph.D.

Novosyolov A.A., Ph.D.

Semenova D.V. Ph.D. (Assistant Editor)

Vorobyev O.Yu., professor (Editor)

© Research Institute for Fire Safety Problems, 2012

© Institute of Mathematics, 2012

© Institute of Petroleum and Natural Gas Engineering, 2012

© Siberian Federal University, 2012

© Krasnoyarsk State Trade Economy Institute, 2012

© Institute of Computational Modeling of RAS, 2012

ISBN ISBN 978-5-94876-099-5

**ОДИННАДЦАТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ПО ФИНАНСОВО-АКТУАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ
И ЭВЕНТОЛОГИИ БЕЗОПАСНОСТИ**
19 ~ 21 апреля 2012 года, Красноярск

Т е м ы

- Финансово-актуарная математика
- Конвергенция нано-био-инфо-когно наук и технологий для совершенствования человеческой деятельности
- Эвентологическая математика в гуманитарных, социально-экономических и естественнонаучных областях
- Эвентология безопасности и риска
- Теория вероятностей и математическая статистика
- Эвентология и математическая эвентология
- Философская эвентология и философия вероятности
- Практическая эвентология
- Эвентологическая экономика
- Эвентологическая психология
- Эвентологические проблемы искусственного интеллекта
- Принятие решений в условиях риска и неопределённости
- Измерение и модели риска
- Теория нечётких событий, обобщенная теория неопределённости
- Математические начала хаоса в экономике
- Системный анализ и управление случайными событиями
- Теория механизмов создания распределений событий

С о п р е д с е д а т е л и к о н ф е р е н ц и и

Воробьёв О.Ю. (Красноярск)

Комаров С.Ю. (Красноярск)

П р о г р а м м н ы й к о м и т е т

Абдушукуров А.А. (Узбекистан)

Алахверди Н. (Турция)

Александров Ю.Л. (Красноярск)

Алиев Т. (Азербайджан)

Ализаде Т. (Азербайджан)

Амельчугов С.П. (Красноярск)

Ангелов П. (Великобритания)

Андреев Ю.А. (Красноярск)

Витлинский В.В. (Украина)

Воробьёв А.О. (Москва)

Голдблатт Дж.Дж. (Великобритания)

Гианнопулос К. (ОАЭ)

Горбань А.Н. (Великобритания)

Городницкая И. (США)

Грановская Р.М. (С.-Петербург)

Григорьев Ю.Д. (С.-Петербург)

Гуц А.К. (Омск)

Добронец Б.С. (Красноярск)

Доррер Г.А. (Красноярск)

Зандер Е.В. (Красноярск)

Киселёва Т. (Германия)

Кокс Л.Э. (США)

Куимов В.В. (Красноярск)

Кытманов А.М. (Красноярск)

Лепский В.Е. (Москва)

Лефевр В.А. (Ирвин, США)

Лукин В.Н. (Канада)

Луценко Е.В. (Краснодар)

Мажаров В.Ф. (Красноярск)

Немировский В.Г. (Красноярск)

Новосёлов А.А. (Красноярск)

Орсингер Э. (Италия)

Охорзин В.А. (Красноярск)

Перфильева И. (Чехия)

Поддубный В.В. (Томск)

Подопригора В.Г. (Красноярск)

Рубан А.И. (Красноярск)

Садовский М.Г. (Красноярск)

Семёнкин Е.С. (Красноярск)

Семёнов А.Т. (Новосибирск)

Сороко Э.М. (Белоруссия)

Стоянов Й. (Великобритания)

Уряев С. (США)

Финкель Р. (Великобритания)

Хасан Б.И. (Красноярск)

Хлебопрос Р.Г. (Красноярск)

Холтон Г. (США)

Цих А.К. (Красноярск)

Цициашвили Г. Ш. (Владивосток)

Черемисин А. А. (Красноярск)

Шайдуров В.В. (Красноярск)

Шмидт Э. (Польша)

Шокин Ю.И. (Новосибирск)

де Шпинадель В. (Аргентина)

Янковская А.Е. (Томск)

О р г а н и з а ц и о н н ы й к о м и т е т

Амельчугова С.В. (Красноярск)

Андрейчикова Т.В. (Красноярск)

Баранова И.В. (Красноярск)

Голденко Е.Е. (Красноярск)

Клочков С.В. (Красноярск)

Лукьянова Н.А. (Красноярск)

Семенова Д.В. (Красноярск)

К о н т а к т ы

- Оргкомитет XI международной ФАМЭВ'2012 конференции: Красноярский государственный торгово-экономический институт, ул. Лиды Прушинской 2, к.7-40, Красноярск, 660075, тел. +73912219842, Голденко Елена Евгеньевна, e-mail: ellen_gold@gambler.ru; Сибирский федеральный университет, пр. Свободный 79, к.34-12, Красноярск, 660041, тел. +73912443149, Семёнова Дарья Владиславовна, e-mail: famemconf@gmail.com, url: <http://fam.conf.sfu-kras.ru>.
- Сопредседатель конференции: Воробьёв Олег Юрьевич, т. +73912494795; e-mail: oleg.yu.vorobyev@gmail.com, url: eventology-theory.ru
- Секретарь оргкомитета: Семёнова Дарья Владиславовна, т. +79029468205; e-mail: famemconf@gmail.com

*THE XI INTERNATIONAL CONFERENCE
ON FINANCIAL AND ACTUARIAL MATHEMATICS
AND EVENTOLOGY OF SAFETY
19 ~ 21 April, 2012, Krasnoyarsk*

Topics

- Financial and actuarial mathematics
- Converging nano-bio-info-cogno sciences and technologies for improving human performance
- Eventological mathematics in the humanities, socioeconomic and natural sciences
- Eventology of safety and risk
- Probability theory and statistics
- Eventology and mathematical eventology
- Philosophical eventology and philosophy of probability
- Practical eventology
- Eventological economics
- Eventological psychology
- Eventological problems of artificial intelligence
- Decision-making under risk and uncertainty
- Risk measurement and risk models
- Theory of fuzzy events and generalized theory of uncertainty
- Mathematical onset to chaos in economy
- System analysis and events management
- Events distributions mechanism design theory

Conference CoChairs

Vorobyev Oleg (Russia)

Komarov Sergey (Russia)

Program Committee

Abdushukurov Abdurahim (Uzbekistan)
Allahverdi Novruz (Turkey)
Alexandrov Yuri (Russia)
Aliev Telman (Azerbaijan)
Alizada Tahir (Azerbaijan)
Amelchugov Sergey (Russia)
Angelov Plamen (UK)
Andreyev Jury (Russia)
Cheremisin Alexander (Russia)
Cox Louis (USA)
Dobronec Boris (Russia)
Dorrer Georgy (Russia)
Finkel Rebecca (UK)
Giannopoulos Kostas (UAE)
Goldblatt Joe (UK)
Gorban' Alexander (UK)
Gorodnitsky Irina (USA)
Granovskaya Rada (Russia)
Grigor'ev Yuri (Russia)

Guts Alexander (Russia)
Holton Glyn (USA)
Khasan Boris (Russia)
Khlebopros Rem (Russia)
Kiseliova Tatiana (Germany)
Kuimov Basil (Russia)
Kytmanov Alexander (Russia)
Lefebvre Vladimir (USA)
Lepsky Vladimir (Russia)
Lukin Vladimir (Canada)
Lutsenko Euheny (Russia)
Mazharov Vladimir (Russia)
Nemirovsky Valentin (Russia)
Novosyolov Arcady (Russia)
Okhorzin Vladimir (Russia)
Orsingher Enzo (Italy)
Perfil'eva Irina (Czech Republik)
Poddubny V.V. (TomsK)
Podoprigora Vladimir (Russia)

Ruban Anatoly (Russia)
Sadovsky Michael (Russia)
Semenkin Euheny (Russia)
Semenov Alexander (Russia)
Shaidurov Vladimir (Russia)
Shokin Yuri (Russia)
Soroko Eduard (Belarus)
de Spinadel Vera (Argentina)
Stoyanov Jordan (UK)
Szmidi Eulalia (Poland)
Tsykh August (Russia)
Tsytsyhashvili Gurami (Russia)
Uryasev Stanislav (USA)
Vitlinsky Valdemar (Ukraine)
Vorobyev Alexey (Russia)
Yankovskaya Anna (Russia)
Zander Euheniya (Russia)

Organizing Committee

Amelchugova Svetlana (Russia)
Andreychikova Tatyana (Russia)
Baranova Irina (Russia)
Goldenok Ellen (Russia)
Klochkov Svyatoslav (Russia)
Lukyanova Nataly (Russia)
Semenova Daria (Russia)

Contacts

- Organizing Committee of the XI international FAMES'2012 Conference: Krasnoyarsk State Trade Economy Institute, ul. Lidy Prushinskoi 2, r.7-40, Krasnoyarsk, 660075, Ph. +73912219842, Goldenok Ellen, e-mail: ellen_gold@rambler.ru; Siberian Federal University, pr.Svobodny 79, r.34-12, Krasnoyarsk, 660041, Ph. +73912443149, Semenova Daria, e-mail: famemconf@gmail.com, url: <http://fam.conf.sfu-kras.ru>.
- Conference CoChair: Vorobyev Oleg, tel. +73912494795; e-mail: oleg.yu.vorobyev@gmail.com, url: eventology-theory.com
- Organizing Secretary: Semenova Daria, tel. +79029468205; e-mail: famemconf@gmail.com

С о д е р ж а н и е

DEMOTCHKINE VAL (London, United Kingdom)	16
<i>Hedge Fund Strategies, Financial Instability, and Global Financial Crisis</i>	
IMOMOV A.A. (Karshi city, Uzbekistan)	29
<i>The limit theorem for joint distribution in Q-process</i>	
KUSTITSKAYA T.A. (Krasnoyarsk)	34
<i>Axial function for elliptic acceptance set</i>	
DE SPINADEL VERA W. (Buenos Aires, Argentina)	37
<i>Visualization and technology</i>	
АБАСОВ Р.З. (Баку, Азербайджан)	40
<i>Некоторые обобщенные формулы и их рациональные применения к решению задач по теме «Проценты»</i>	
АБДУШУКУРОВ А.А. и Ф.А. АБДИКАЛИКОВ (Ташкент, Узбекистан)	45
<i>Полупараметрическое оценивание условной функции выживания в регрессионной модели при случайном цензурировании с двух сторон</i>	
АБДУШУКУРОВ А.А. и Н.Т. ДУШАТОВ (Ташкент, Узбекистан)	49
<i>Об одном подходе к решению задач параметрической и структурной идентификации вероятностных распределений с учетом совокупных ошибок в статистических данных</i>	
АБДУШУКУРОВ А.А. и Н.С. НУРМУХАМЕДОВА (Ташкент, Узбекистан)	51
<i>Аппроксимации статистик отношения правдоподобия в модели конкурирующих рисков при информативном случайном цензурировании с двух сторон</i>	
АГАФОНОВА Л.М. и Л.В. ХИСАМУТДИНОВА (Красноярск)	56
<i>Проблемы — логисты и закупщики</i>	
АГАФОНОВА Л.М. и Л.В. ХИСАМУТДИНОВА (Красноярск)	59
<i>Выбор стратегии работы с поставщиком</i>	
АМЕЛЬЧУГОВ С.П., ВОРОБЬЕВ О.Ю. и А.Т. РВАЧЁВ (Красноярск)	62
<i>Риски распространения разлива нефти</i>	
АШУКЯВИЧУТЕ Р.И. (Красноярск)	70
<i>Создание системы эффективного управления подготовки и оценки боеспособности индивидуумов и коллективов с учетом их физиологического, психологического состояния, социальных и эргономических (бытовых) особенностей</i>	
БАРАНОВА И.В. (Красноярск)	72

Множества двудольных множеств событий и их применение

БАРАНОВА И.В. и О.А. КОМАРОВА (Красноярск)	80
<i>Эвентологический подход к методу ассоциативных правил в интеллектуальном анализе данных</i>	
БАТУРО А.Н., ДОРРЕР Г.А. и В.С. КОМОРОВСКИЙ (Красноярск)	86
<i>Оперативное прогнозирование количества пожаров на региональном уровне</i>	
БУРЦЕВА Я.И., РОДИОНОВА Е.В. и С.Ю. ШИРНАЕВА (Самара)	91
<i>Методы математической статистики для исследования результатов деятельности страховых компаний России</i>	
БЫКОВА В.В. (Красноярск)	95
<i>Рекурсия в вычислительных задачах линейной алгебры</i>	
БЫКОВА В.В. и В.О. БОЛХОВЕЦ (Красноярск)	103
<i>Алгоритм разложения графа на атомы кликовыми минимальными сепараторами</i>	
БЫКОВА В.В. и Ю.А. СВИНЦОВ (Красноярск)	105
<i>Программные средства формирования V&S дерева декомпозиции</i>	
ВЕРЕТНОВА К. Ю. и Л.И. ПОКИДЫШЕВА (Красноярск)	107
<i>Метод главных компонент и линейные многообразия на практике: применение к Российской банковской системе</i>	
ВОРОБЬЕВ О.Ю. (Красноярск)	113
<i>Эвентологический системный анализ безопасности</i>	
ВОРОБЬЕВ О.Ю. (Красноярск)	126
<i>Эвентологический анализ систем: система событий во внесистемных обстоятельствах</i>	
ВОРОБЬЕВ О.Ю. (Красноярск)	131
<i>Совокупная система и совокупность систем: эвентологическое сходство и различие</i>	
ВОРОБЬЕВ О.Ю. (Красноярск)	139
<i>Средневероятное событие для множества событий</i>	
ВЫДРЫЧ Н.В. (Красноярск)	148
<i>Исследование потребителей товаров для дома для открытия нового торгового комплекса в г. Красноярск</i>	
ГРИГОРЬЕВ Ю.Д. (Санкт-Петербург)	152

<i>Ветвление решений в нелинейных задачах размещения объектов и планирования эксперимента</i>	
ДЖАМИРЗАЕВ А.А. (Ташкент, Узбекистан)	163
<i>Об одной теореме Г. Крамера</i>	
ДОБРОНЕЦ Б.С., КРАНЦЕВИЧ А.М. и Н.М. КРАНЦЕВИЧ (Красноярск)	164
<i>Компьютерная реализация операций над случайными величинам</i>	
ДОБРОНЕЦ Б.С., ПОПОВА О.А. и Е.В. ГОЛОВЧАНСКАЯ (Красноярск)	168
<i>Численный вероятностный анализ для оценки инвестиционных проектов</i>	
ДОРРЕР Г.А. и С.С. МОСКАЛЕВА (Красноярск)	171
<i>Модель управления образовательным процессом на основе компетентностного подхода</i>	
ДОРРЕР М.Г. и В.В. КУРОХТИН (Красноярск)	175
<i>Определение петель в бизнес-процессе для расчёта топологического уравнения Мейсона</i>	
ЗАМАХАЕВ Е. В., КАЛИСТРАТОВ С. А. и Д.С. ИВАХОВ (Красноярск)	182
<i>Использование воды для заводнения пластов в целях пожаротушения</i>	
ЗАХОРОЛЬНАЯ И.А. и А.А. НАЗАРОВ (Томск)	183
<i>Математическая модель финансовых потоков процедуры пожизненной ренты</i>	
ЗЫРЯНОВ А.А. и М.Г. ДОРРЕР (Красноярск)	186
<i>Трансляция модели бизнес-процессов в нотации ARIS eEPC в GERT-сеть</i>	
ЗЫРЯНОВ А.А. и М.Г. ДОРРЕР (Красноярск)	192
<i>Расчет вероятностных характеристик бизнес-процессов на основе GERT-сетей</i>	
ИВАНОВА Т.П. и Л.Х. ГАЗЕЕВА (Красноярск)	198
<i>Создание системы эффективного управления подготовки и оценки боеспособности для тушения и ликвидации ЧС индивидуумов и коллективов на предприятии</i>	
КИМ О.А. (Красноярск)	199
<i>Оптимальное размещение клапанов на линейном участке трубопровода полным перебором</i>	
КИРИЛЮК А.А. (Красноярск)	202
<i>Методические подходы преподавания систем быстрого счета и быстрых вычислений в общеобразовательной школе</i>	

КОЧАНОВА Ю.С. (Красноярск)	204
<i>Треугольные нормы и конормы</i>	
КРУПКИНА Т.В., БАБЕНЫШЕВ С.В. и В.Ф. МАЖАРОВ (Красноярск)	210
<i>Интегральные показатели в синтезе оценок рисков потерь жизненного потенциала</i>	
КУШБАК КЫЗЫ ГУЛИЗА (Красноярск)	215
<i>Эвентология пожарной безопасности: краткий обзор</i>	
ЛАБИК А.Г. и Е.И. ФИШЕР (Красноярск)	219
<i>Алюмосиликатные полые микросферы</i>	
ЛЕБЕДЕВ Ю.А. (Москва)	221
<i>Новые математические инструменты эвереттики</i>	
МАЖАРОВ В.Ф., ПЛОТНИКОВ Н.Ю., ГОРНЫЙ Б.Э., КРУПКИНА Т.В., БАБЕНЫШЕВ С.В., ТИХОНОВА И.В. и Е.А. АВЕРЧЕНКО (Красноярск)	224
<i>Мониторинг медико-демографических процессов в Красноярском крае между Всероссийскими переписями населения 2002 и 2010 гг.</i>	
МЕДНИЦКИЙ А.Н. и А.Ю. ТРУСОВА (Самара)	231
<i>Актuarные расчеты по добровольному медицинскому страхованию</i>	
МИХАЙЛОВА Е.В., ТРУСОВА А.Ю. и В.Н. НИКИШОВ (Самара)	234
<i>Асимптотическое моделирование двухфакторных групп рисков на основе разложений Корниша-Фишера и трехпараметрического гамма-распределения</i>	
МОИСЕЙЧЕНКО Е.С. (Красноярск)	239
<i>Эвентологический подход к задаче кластеризации разнотипных данных</i>	
МОШКОВИЧ Л.И. и БАБИНА О.И. (Красноярск)	244
<i>Метод имитационного моделирования в России и за рубежом: текущее состояние и основные направления развития</i>	
МУМИНОВ А.Л. (Ташкент, Узбекистан)	247
<i>Об эмпирическом байесовском оценивании по неполным данным</i>	
МУРАДОВ Р.С. (Ташкент, Узбекистан)	249
<i>Оценивания смеси двумерных функций выживания на плоскости при случайном цензурировании справа</i>	
МУХИТДИНОВ А.А. (Ташкент, Узбекистан)	251
<i>О применениях многотипных ветвящихся процессов к решению некоторых актуарных задач</i>	

НАРТОВ Я.В., РЫБНИКОВА М.И. и СЕМЕНОВА Д.В. (Красноярск)	253
<i>Нечеткие меры и нечеткие интегралы</i>	
НАУМОВ А.А. (Новосибирск)	257
<i>К задаче построения стратегий экспериментирования на основе метода предельного перехода</i>	
НАУМОВ А.А. (Новосибирск)	261
<i>К оцениванию эффективности социально-экономических кластеров</i>	
НАУМОВ А.А. (Новосибирск)	267
<i>Управление экономическими системами с возможными рассогласованиями потоков</i>	
НАУМОВ А.А. (Новосибирск)	273
<i>Оценивание информативности экспериментальных данных</i>	
НАУМОВ А.А. и С.В. КРЮКОВ (Новосибирск, Ростов-на-Дону)	279
<i>Использование сценарного подхода и операции наращивания финансовых потоков в задачах оценивания эффективности проектов</i>	
НОВАЧУК А.В. (Красноярск)	283
<i>Особенности формирования маркетингового комплекса ВУЗа</i>	
НОВОСЕЛОВ А. А. (Красноярск)	285
<i>Управление пожарным риском в естественных условиях и на технических объектах</i>	
НУРИТДИНОВ Ш.Н., АБДУШУКУРОВ А.А., ТУРСУНОВ Н. и Б. ШАУМАРОВ (Ташкент, Узбекистан)	288
<i>Об одном подходе к решению задач параметрической и структурной идентификации вероятностных распределений с учетом совокупных ошибок в статистических данных</i>	
ОВЧИННИКОВ А.Е. (Красноярск)	292
<i>Анализ пространственной структуры: постановка гипотез</i>	
ОЛЕЙНИКОВ Б.В. и А.И. ШАЛАБАЙ (Красноярск)	293
<i>К вопросу размещения открытых Интернет-ресурсов в классических библиотечных системах</i>	
ОЛЕЙНИКОВ Б.В. и А.И. ШАЛАБАЙ (Красноярск)	297
<i>Об автоматическом формировании библиографических описаний Интернет-ресурсов в формате RusMarc</i>	
ОХРОМЕНКО А.С. и А.В. ОБУХОВ (Красноярск)	300

<i>Применение высокоэффективных технологий расчета пожарного риска</i>	
ПОПЕЛ Е.В. и Е.С. КИРИК (Красноярск)	302
<i>Об оценивании локальной плотности людского потока</i>	
ПОПОВА О.А. и С.А. КОВЯЗИН (Красноярск)	305
<i>Актуализация процесса моделирования взаимодействия в информационно-обучающей среде</i>	
ПОПКОВА М.И. (Красноярск)	307
<i>Измерение полного сет-расстояния и сет-рассеяния множества событий</i>	
РЫБНИКОВА М.И., СЕМЕНОВА Д.В. и Я.В. НАРТОВ (Красноярск)	309
<i>Обобщение эвентологической функции принадлежности в теории нечетких событий</i>	
САДОВСКИЙ М.Г. (Красноярск)	323
<i>Сравнительное исследование электорального поведения избирателей Красноярска</i>	
САДОВСКИЙ М.Г. и М.В. ЕЛИНА (Красноярск)	328
<i>Стратификация Красноярского края по электоральному поведению жителей</i>	
САДОВСКИЙ М.Г. и К.А. КЛОКОВА (Красноярск)	333
<i>О распределении расстояний до ближайшего соседа в последовательностях</i>	
САДОВСКИЙ М.Г. и Е.Б. ЛОГИНОВА (Красноярск)	337
<i>Об электоральном поведении избирателей России</i>	
САРКИСОВ В.Г. (Самара)	343
<i>Моделирование эволюции восприятия риска в процессе управления портфелем ценных бумаг</i>	
СЕМЕНОВА Д.В. и Н.А. ЛУКЬЯНОВА (Красноярск)	347
<i>Распределения двупараметрических дискретно-непрерывных случайных величин</i>	
СЕМЁНОВ А.Т. (Новосибирск)	354
<i>Вероятности больших уклонений и энтропия</i>	
СЕМЁНОВ А.Т. (Новосибирск)	360
<i>Об устойчивости статистических процедур, связанных с нормальным распределением</i>	
ХАРИН А.А. (Москва)	363

Об интервальном анализе распределений

ХАРИН А.А. (Москва)	368
<i>Экономика. Парадоксы. Разрывы. Эвентология</i>	
ХОЛМУРОДОВ Ф.М. (Ташкент, Узбекистан)	372
<i>Процентная остаточная продолжительность безотказной работы в информативной модели неполных наблюдений при случайном цензурировании с двух сторон</i>	
ЦИЦИАШВИЛИ Г.Ш., ОСИПОВА М.А. и А.С. ЛОСЕВ (Владивосток)	374
<i>Двойственность в асимптотическом анализе вероятности связности случайных графов</i>	
ЧЕРЕМИСИН А.А. и А.В. КУШНАРЕНКО (Красноярск)	379
<i>Влияние фотофоретического взаимодействия на тепловую коагуляцию аэрозолей</i>	
ШИРЯЕВА Л.К. (Самара)	382
<i>О законе распределения студентизированного отклонения выброса от среднего в нормально распределенной выборке</i>	
ШИРЯЕВА Л.К. и К.И. ДЕВЯТАЙКИН (Самара)	388
<i>О распределении студентизированных отклонений в нормально распределенной выборке с выбросом</i>	
ЯНКОВСКАЯ А.Е. и С.В. КИТЛЕР (Томск)	393
<i>Интеллектуальная система ДИОС на основе пороговой и нечеткой логики и еџ приложения</i>	
ЯНКОВСКАЯ А.Е. и М.Е. СЕМЕНОВ (Томск)	399
<i>Компетентностный подход к принятию решений в обучающе-тестирующих системах на основе нечеткой и пороговой логики</i>	
ЯНКОВСКАЯ Т.А. (Красноярск)	404
<i>Математическая модель для диагностики технического состояния горного оборудования</i>	
<i>С п и с о к а в т о р о в</i>	410
<i>L i s t o f a u t h o r s</i>	411
<i>A b s t r a c t s</i>	412

Желаемое

Иди спокойно среди шума и суеты, и помни, покой — в тишине. Будь в хороших отношениях со всеми насколько возможно без уступок. Говори свою правду спокойно и ясно; и слушай других, даже тупых и несведущих — им тоже есть что сказать. Избегай крикливых и агрессивных, они — досада твоему духу.

Сравнивая себя с другими, можешь стать тщеславным или ожесточенным; ибо всегда найдутся люди выше или ниже тебя. Радуйся как своим достижениям, так и своим планам. Проявляй интерес к своему жизненному пути, даже скромному; он — твоё единственное подлинное достояние в изменчивых превратностях судьбы.

Будь осторожен в своих делах, ибо мир полон обмана. И не позволяй ему ослепить тебя, чтобы скрыть существование добродетели; многие люди стремятся к высоким идеалам, и всюду жизнь полна героизма. Будь самим собой. В особенности не симулируй привязанность. Не будь циничным к любви; поскольку перед лицом всех разочарований и бесплодности только она так же вечна, как трава. Принимай с благодарностью уроки лет, изящно расставаясь с приметами молодости.

Укрепляй силу духа — твой щит от ударов судьбы. И не беспокой себя мрачными мыслями. Много страхов рождаются от усталости и одиночества. Не забывая о полезной дисциплине, оставайся нежным к себе. Ты — дитя вселенной, не меньше, чем деревья и звезды; и ты имеешь право быть здесь. Осознаешь ли ты это или нет, но вне всякого сомнения Вселенная развивается так, как должно.

Поэтому, будь в мире с Богом, каким бы ты его себе не представлял. И чем бы ты не занимался, и к чему бы не стремился среди шумной неразберихи жизни, сохраняй покой в своей душе. Со всем его обманом, тяжелой работой и разбитыми мечтами; это — все же прекрасный мир. Радуйся жизни, стремись быть счастливым.

Макс Эрманн, 1927.

(перевод: Олег Воробьев, 2008)

Desiderata

Go placidly amid the noise and the haste, and remember what peace there may be in silence. As far as possible without surrender be on good terms with all persons. Speak your truth quietly and clearly; and listen to others, even to the dull and the ignorant, they too have their story. Avoid loud and aggressive persons, they are vexations to the spirit.

If you compare yourself with others, you may become vain or bitter; for always there will be greater and lesser persons than yourself. Enjoy your achievements as well as your plans. Keep interested in your own career, however humble; it is a real possession in the changing fortunes of time.

Exercise caution in your business affairs, for the world is full of trickery. But let not this blind you to what virtue there is; many persons strive for high ideals, and everywhere life is full of heroism. Be yourself. Especially do not feign affection. Neither be cynical about love; for in the face of all aridity and disenchantment it is as perennial as the grass. Take kindly the counsel of the years, gracefully surrendering the things of youth.

Nurture strength of spirit to shield you in sudden misfortune. But do not distress yourself with dark imaginings. Many fears are born of fatigue and loneliness. Beyond a wholesome discipline, be gentle with yourself. You are a child of the universe, no less than the trees and the stars; you have a right to be here. And whether or not it is clear to you, no doubt the universe is unfolding as it should.

Therefore, be at peace with God, whatever you conceive Him to be. And whatever your labors and aspirations in the noisy confusion of life, keep peace in your soul. With all its sham, drudgery and broken dreams; it is still a beautiful world. Be cheerful. Strive to be happy.

Hedge Fund Strategies, Financial Instability, and Global Financial Crisis

Val Demotchkin

Portal Trading Limited
London, United Kingdom
valdemotch@gmail.com

Abstract. *The article discusses hedge funds in connection to the latest financial crisis.*

Keywords. *Hedge Funds, Performance fees, Hedge Fund Redemptions, Capital Raising, traders, speculators, risk, volatility, financial markets, Currency speculations, Bank Run, Global Financial Crisis, eventology, Financial Instability, Nash Equilibrium, Government intervention.*

1 Introduction

In [1], we discussed Global Macro, Directional and Delta Neutral hedge fund strategies. Market neutral funds have a low correlation with the overall market return. Directional funds specifically take bets on market movements, and so their returns are often strongly correlated with the market. Still there are similarities between all hedge fund strategies as more flexibility comparing with traditional funds.

In [2], we discussed the non-trivial fact that the success of any investment strategy is highly dependent on the skills and implementation ability of individual managers. A good event-driven investment manager is a useful addition to a diversified portfolio of investments, capable of producing absolute non-market correlated returns throughout the economic cycle. The practical application for eventological [9] approach in Decision Making might be the optimization of performance of the event-driven hedge funds.

In [3], we discussed a Performance Fees structure of the hedge funds in general, and also provide a brief overview of the Energy Funds (Energy, Oil and Gas) and the Real Estate Investment Funds.

In this article we will discuss the risks involving in investing to the Hedge Funds, Redemptions and the Capital Raising strategies as well as connection between the hedge funds and the latest financial crisis.

The main financial theories that will be discussed are the Financial Instability Theory of Hyman Minsky and the George Soros' book "Crisis of Global Capitalism". We also will discuss the Diamond–Dybvig model of Bank runs.

The Hyman Minsky's Financial Instability Theory presumes pro-cyclical human nature. In prosperous times, when corporate cash flow rises beyond what is needed to pay off debt, a speculative euphoria develops, and soon thereafter debts exceed what borrowers can pay off from their incoming revenues, which in turn produces a financial crisis. As a result of such speculative borrowing bubbles, banks and lenders tighten credit availability, even to companies that can afford loans, and the economy subsequently contracts. Government intervention required.

A key mechanism that pushes an economy towards a crisis is the accumulation of debt by the non-government sector. He identified three types of borrowers that contribute to the accumulation of insolvent debt: hedge borrowers, speculative borrowers, and Ponzi borrowers.

Both Minsky and Soros agree that people are momentum investors by nature, not valued investors.

The financial math language is required by the intricacy of the economic phenomena to be explained: equilibrium, and bank-runs.

Here we will discuss the influential financial model of bank runs and related financial crises: The Diamond–Dybvig model. The model shows how banks' mix of illiquid assets (such as business or mortgage loans) and liquid liabilities (deposits which may be withdrawn at any time) may give rise to self-fulfilling panics among depositors.

The model, published in 1983 by Douglas W. Diamond of the University of Chicago and Philip H. Dybvig, then of Yale University and now of Washington University in St. Louis, provides a mathematical statement of the idea that an institution with long-maturity assets and short-maturity liabilities may be unstable.

Diamond and Dybvig's paper points out that business investment often requires expenditures in the present to obtain returns in the future (for example, spending on machines and buildings now for production in future years). Therefore, when businesses need to borrow to finance their investments, they wish to do so on the understanding that the lender will not demand repayment(s) until some agreed upon time in the future, in other words prefer loans with a long maturity (that is, low liquidity). The same principle applies to individuals seeking financing to purchase large-ticket items such as housing or automobiles. On the other hand, individual savers (both households and firms) may have sudden, unpredictable needs for cash, due to unforeseen expenditures. So they demand liquid accounts which permit them immediate access to their deposits (that is, they value short maturity deposit accounts).

The paper regards banks as intermediaries between savers who prefer to deposit in liquid accounts and borrowers who prefer to take out long-maturity loans. Under ordinary circumstances, banks can provide a valuable service by channeling funds from many individual deposits into loans for borrowers. Individual depositors might not be able to make these loans themselves, since they know they may suddenly need immediate access to their funds, whereas the businesses' investments will only pay off in the future

(moreover, by aggregating funds from many different depositors, banks help depositors save on the transactions costs they would have to pay in order to lend directly to businesses). Since banks provide a valuable service to both sides (providing the long-maturity loans businesses want and the liquid accounts depositors want), they can charge a higher interest rate on loans than they pay on deposits and thus profit from the difference.

Diamond and Dybvig's crucial point about how banking works is that under ordinary circumstances, savers' unpredictable needs for cash are unlikely to occur at the same time. Therefore, since depositors' needs reflect their individual circumstances, by accepting deposits from many different sources the bank expects only a small fraction of withdrawals in the short term, even though all depositors have the right to take their deposits back at any time. Thus a bank can make loans over a long horizon, while keeping only relatively small amounts of cash on hand to pay any depositors that wish to make withdrawals. (That is, because individual expenditure needs are largely uncorrelated, by the law of large numbers banks expect few withdrawals on any one day.)

However, since banks have no way of knowing whether their depositors really need the money they withdraw, a different outcome is also possible. Since banks lend out at long maturity, they cannot quickly call in their loans. And even if they tried to call in their loans, borrowers would be unable to pay back quickly, since their loans were, by assumption, used to finance long-term investments. Therefore, if all depositors attempt to withdraw their funds simultaneously, a bank will run out of money long before it is able to pay all the depositors. The bank will be able to pay the first depositors who demand their money back, but if all others attempt to withdraw too, the bank will go bankrupt and the last depositors will be left with nothing.

This means that even healthy banks are potentially vulnerable to panics, usually called bank runs. If a depositor expects all other depositors to withdraw their funds, then it is irrelevant whether the banks' long term loans are likely to be profitable; the only rational response for the depositor is to rush to take his or her deposits out before the other depositors remove theirs. In other words, the Diamond–Dybvig model views bank runs as a type of self-fulfilling prophecy: each depositor's incentive to withdraw funds depends on what they expect other depositors to do. If enough depositors expect other depositors to withdraw their funds, then they all have an incentive to rush to be the first in line to withdraw their funds.

In theoretical terms, the Diamond–Dybvig model provides an example of a game with more than one Nash equilibrium. If depositors expect most other depositors to withdraw only when they have real expenditure needs, then it is rational for all depositors to withdraw only when they have real expenditure needs. But if depositors expect most other

depositors to rush quickly to close their accounts, then it is rational for all depositors to rush quickly to close their accounts. Of course, the first equilibrium is better than the second (in the sense of Pareto efficiency). If depositors withdraw only when they have real expenditure needs, they all benefit from holding their savings in a liquid, interest-bearing account. If instead everyone rushes to close their accounts, then they all lose the interest they could have earned, and some of them lose all their savings. Nonetheless, it is not obvious what any one depositor could do to prevent this mutual loss.

In practice, banks faced with bank runs often shut down and refuse to permit more than a few withdrawals, which is called suspension of convertibility. While this may prevent some depositors who have a real need for cash from obtaining access to their money, it also prevents immediate bankruptcy, thus allowing the bank to wait for its loans to be repaid, so that it has enough resources to pay back some or all of its deposits.

However, Diamond and Dybvig argue that unless the total amount of real expenditure needs per period is known with certainty, suspension of convertibility cannot be an optimal mechanism for preventing bank runs. Instead, they argue that a better way of preventing bank runs is deposit insurance backed by the government or central bank. Such insurance pays depositors all or part of their losses in the case of a bank run. If depositors know that they will get their money back even in case of a bank run, they have no reason to participate in a bank run.

Thus, sufficient deposit insurance can eliminate the possibility of bank runs. In principle, maintaining a deposit insurance program is unlikely to be very costly for the government: as long as bank runs are prevented, deposit insurance will never actually need to be paid out. Bank runs became much rarer in the U.S. after the Federal Deposit Insurance Corporation was founded in the aftermath of the bank panics of the Great Depression. On the other hand, a deposit insurance scheme is likely to lead to moral hazard: by protecting depositors against bank failure, it makes depositors less careful in choosing where to deposit their money, and thus gives banks less incentive to lend carefully.

Addressing the question of whether too big to fail is a useful focus for bank regulation, Nobel laureate Paul Krugman wrote[41]:

My basic view is that banking, left to its own devices, inherently poses risks of destabilizing runs; I'm a Diamond–Dybvig guy. To contain banking crises, the government ends up stepping in to protect bank creditors. This in turn means that you have to regulate banks in normal times, both to reduce the need for rescues and to limit the moral hazard posed by the rescues when they happen.

2 Hedge Funds Redemptions

After investing in hedge funds some accredited investors have a much harder time getting their money out of a hedge fund than into them. While this is often preventable it is usually the result of:

- Preset lockup periods where investors must keep their money in the fund for a minimum of 6 months to 3 years depending on the fund mandate but negotiable
- The liquidity of the asset classes the hedge fund deals with. Some hedge funds work in such illiquid markets that they will have redemption clauses in their contracts that allow them to wait 3-12 months for more liquid markets before being forced to sell a position.
- Arbitration. The process of going through arbitration and looking at which funds have been through it before can vary widely and be difficult. While a definite exception to the rule if you get invested with a rogue hedge fund manager you might have to chase them through arbitration or other legal means to redeem your initial investment.

All of this leads to making sure you have your investment goals and expectations clearly defined so they can be included in research a hedge fund consultant does for you and so you can just keep these extra things in mind while doing research yourself. Many hedge funds do not have lockup periods of more than 3-6 months and the majority work in relatively liquid markets. [4]

As the Financial Times put it,

"The salutary lesson for those wanting to invest directly in hedge funds is that, under the commonly used limited partnership framework, they are, in effect, going into business with a managing partner, not just investing."

The hedge managers hate redemptions usually because these hurt their profits.

Hedge Funds closed the third quarter 2007 with over \$2.7 Trillion in total assets under management. In 2007 alone hedge fund assets have risen \$337B so far with one quarter left to go. By moderate estimate the industry gained in excess of \$500B for that year. \$50B of this came from emerging market hedge funds growth with most of those assets being allocated to Chinese and Brazilian hedge fund managers. Other current year trends have been the increasing difficult time that small emerging hedge fund managers have had raising assets, and how there is increased competition among accredited and institutional investors due to large hedge funds keeping their funds open to new investments longer.

These types of statistics are important to keep in mind, if in 9 months hedge funds gained \$337B then on average hedge funds raised over \$37B per month.

So when you read an article about a hedge fund blowing up and losing \$2B it is a horrible situation for that hedge fund

manager and their investors but industry wide it is a fleck on the radar and the former level of hedge fund industry assets are gained back in less than 2 days.[4]

Most hedge fund investment strategies aim to achieve a positive return on investment whether markets are rising or falling. Hedge fund managers typically invest their own money in the fund they manage, which serves to align their interests with investors in the fund.[3][5][6] A hedge fund typically pays its investment manager a management fee, which is a percentage of the assets of the fund, and a performance fee if the fund's net asset value increases during the year. Some hedge funds have a net asset value of several billions dollars. As of 2009, hedge funds represented 1.1% of the total funds and assets held by financial institutions.[7] The estimated size of the global hedge fund industry is US\$1.9 trillion.[8]

Management fees for hedge funds are designed to cover the operating costs of the manager, whereas the performance fee provides the manager's profits. However, due to economies of scale the management fee from larger funds can generate a significant part of a manager's profits, and as a result some fees have been criticized by some public pension funds, such as CalPERS, for being too high.

The Performance fee is typically 20% of the fund's profits during any year, though they range between 10% and 50%. Performance fees are intended to provide an incentive for a manager to generate profits.[7][8] Performance fees have been criticized by Warren Buffett, who believes that because hedge funds share only the profits and not the losses, such fees create an incentive for high-risk investment management. Performance fee rates have fallen since the start of the credit crunch.[9]

Almost all hedge fund performance fees include a "high water mark" (or "loss carry-forward provision"), which means that the performance fee only applies to net profits (i.e. profits after losses in previous years have been recovered). This prevents managers from receiving fees for volatile performance, though a manager will sometimes close a fund that has suffered serious losses and start a new fund, rather than attempting to recover the losses over a number of years without performance fee.[10]

Some performance fees include a "hurdle", so that a fee is only paid on the fund's performance in excess of a benchmark rate (e.g. LIBOR) or a fixed percentage.[11] A "soft" hurdle means the performance fee is calculated on all the fund's returns if the hurdle rate is cleared. A "hard" hurdle is calculated only on returns above the hurdle rate.[citation needed] A hurdle is intended to ensure that a manager is only rewarded if it generates returns in excess of the returns that the investor would have received if it had invested its money elsewhere.

Some hedge funds charge a redemption fee (or withdrawal fee) for early withdrawals during a specified period of time (typically a year) or when withdrawals exceed a predetermined percentage of the original investment.[12] The purpose of the fee is to discourage short-term investing, reduce turnover and deter withdrawals after periods of poor performance. Redemption fees usually remain in the fund and benefit the remaining investors.

3 Capital Raising

Raising Capital for your Hedge Fund

Case Study. Your client is the small hedge funds with investor assets under \$100M. When they are willing to pay a salary, they expect results quickly - within six to nine months at the very most.

To bring in, say \$5M, within this time frame your book and career history should look like this, from the perspective of a small hedge fund that might consider hiring you:

You've successfully raised money for another small (<\$100M) hedge fund and were successful. (We'll define "successful" to mean that you brought in a meaningful volume of allocations, let's say \$10M, in the first eighteen months. Not the commitments, but the actual checks in the bank).

The hedge fund you successfully raised capital for employed a strategy such that the investors who allocated to that fund would logically have an interest in your fund and yourself.

Hedge funds managers earnings

Considering that some of the top performing hedge funds earn upwards of 50% returns per year and that a given manager can manage billions of dollars worth of assets, this type of fee structure can be very lucrative for managers who consistently earn high returns.

For example, the top earning hedge fund manager in 2006, James Simons, earned around \$1.7 billion in earnings. This is quite a bit higher than the highest paid manager on Wall Street, who was paid a relatively "low" \$54 million during the same time period. [13]

Opportunities can arise when there is a strong sector trend in the business of the subsidiary, causing its share to rise sharply within a short time horizon. There are several catalysts that could re-adjust the pricing: The parent can distribute subsidiary shares to parent shareholders, the parent could buy the remaining shares of the subsidiary, or its shares could be de-listed. The major risk of the strategy lies in a disappearance of the link between parent and subsidiary without convergence of the valuation. For example, the parent firm could go bankrupt and use the subsidiary shares as collateral. Another important risk of holding arbitrage is a recall of the borrowed short position (subsidiary) that tends to materialize as it becomes more adverse.

Alternative investments in holding arbitrage appear in trading the spread in the public shares of a non-operating holding company versus its operating subsidiary.

4 Eventology and Decision Making

A new interesting approach was recently offered by Prof. O.Yu. Vorobyev et al. (2009) [14] - the eventological theory of decision-making, the theory of event-based decision making is a theory of decision-making based on eventological principles and using results of mathematical eventology; a theoretical basis of the practical eventology.

The beginnings of this theory which have arisen from event-based representation of the reasonable subject and his decisions in the form of eventological distributions (E-distributions) of sets of events and which are based on the eventological H-theorem are offered. The illustrative example of the eventological decision-making by the reasonable subject on his own event-based behaviour in the financial or share market is considered in their paper.

The practical application for eventological approach might be the optimization of performance of the event-driven hedge funds.

5 Event Driven Hedge Funds

In [2] we discussed that the success of any investment strategy is highly dependent on the skills and implementation ability of individual managers. A good event-driven investment manager is a useful addition to a diversified portfolio of investments, capable of producing absolute non-market correlated returns throughout the economic cycle.

Event Driven Trading is any strategy that seeks to exploit pricing inefficiencies, occurring when companies are involved in corporate events such as mergers, takeovers, restructures (including share buy-backs, spin-offs and capital returns), de-mergers and lock-up expiries.

Traders, who follow event driven strategies, attempt to predict the outcome of a particular corporate event on the security price as well as the optimal time to commit capital.

Another event driven trading strategy involves corporate de-mergers and share lock-up periods. A recent trend to emerge, particularly in Europe, is the process of listed companies floating (spinning off) their subsidiaries. This is based upon the theory that the sum of the parts is often worth more than the whole.

When a company lists one of its subsidiaries on the market, but retains an interest, it is common for there to be a lock-up arrangement over the remaining stake in an attempt to reassure potential investors that the market is not about to be flooded with cheap stock (a similar arrangement takes place in IPOs).

Event driven traders can benefit in a number of ways from corporate de-mergers. Firstly, they will buy the parent company in the expectation that the share price will benefit from the de-merger process. If the strategy is correct, once the de-merger takes place, they will dispose their holding at a higher price than the original entry price. Then, a short time later, they will seek to exploit the lock-up period (usually founder shareholders/private equity (insiders) can sell down their stock holdings 180 days after the initial share offering).

They do this by short selling stock, often using CFDs, ahead of a lock-up expiry and then buying back their short position at a lower price once the insiders have off-loaded their shares.

Here we will discuss the connection between the hedge funds expansion and the global financial crisis. We also will discuss the financial instability theory.

6 Long-Term Capital Management

Long-Term Capital Management L.P. (LTCM) was a speculative hedge fund[15] based in Greenwich, Connecticut that utilized absolute-return trading strategies (such as fixed-income arbitrage, statistical arbitrage, and pairs trading) combined with high leverage. The firm's master hedge fund, Long-Term Capital Portfolio L.P., failed in the late 1990s, leading to a bailout by other financial institutions, under the supervision of the Federal Reserve.[16]

LTCM was founded in 1994 by John Meriwether, the former vice-chairman and head of bond trading at Salomon Brothers. Board of directors members included Myron Scholes and Robert C. Merton, who shared the 1997 Nobel Memorial Prize in Economic Sciences for a "new method to determine the value of derivatives".[17] Initially successful with annualized returns of over 40% (after fees) in its first years, in 1998 it lost \$4.6 billion in less than four months following the Russian financial crisis requiring financial intervention by the Federal Reserve Bank, and the fund closed in early 2000.

7 George Soros and British Pound

On September 16, 1992, Black Wednesday, Soros' fund sold short more than \$10 billion in pounds,[18] profiting from the UK government's reluctance to either raise its interest rates to levels comparable to those of other European Exchange Rate Mechanism countries or to float its currency.

Finally, the UK withdrew from the European Exchange Rate Mechanism, devaluing the pound, earning Soros an estimated \$1.1 billion. He was dubbed "the man who broke the Bank of England".[19] In 1997, the UK Treasury estimated the cost of Black Wednesday at £3.4 billion.

On Monday, October 26, 1992, The Times quoted Soros as saying: "Our total position by Black Wednesday had to be worth almost \$10 billion. We planned to sell more than that. In fact, when Norman Lamont said just before the devaluation that he would borrow nearly \$15 billion to

defend sterling, we were amused because that was about how much we wanted to sell."

Stanley Druckenmiller, who traded under Soros, originally saw the weakness in the pound. "Soros' contribution was pushing him to take a gigantic position." [20][21]

In 1997, during the Asian financial crisis, the Prime Minister of Malaysia Mahathir bin Mohamad accused Soros of using the wealth under his control to punish the Association of Southeast Asian Nations (ASEAN) for welcoming Myanmar as a member. Following on a history of antisemitic remarks, Mahathir made specific reference to Soros' Jewish background ("It is a Jew who triggered the currency plunge"[22]) and implied Soros was orchestrating the crash as part of a larger Jewish conspiracy. Nine years later, in 2006, Mahathir met with Soros and afterwards stated that he accepted that Soros had not been responsible for the crisis.[23] In 1998's *The Crisis of Global Capitalism: Open Society Endangered* Soros explained his role in the crisis as follows:

The financial crisis that originated in Thailand in 1997 was particularly unnerving because of its scope and severity.... By the beginning of 1997, it was clear to Soros Fund Management that the discrepancy between the trade account and the capital account was becoming untenable. We sold short the Thai baht and the Malaysian ringgit early in 1997 with maturities ranging from six months to a year. (That is, we entered into contracts to deliver at future dates Thai Baht and Malaysian ringgit that we did not currently hold.) Subsequently Prime Minister Mahathir of Malaysia accused me of causing the crisis, a wholly unfounded accusation. We were not sellers of the currency during or several months before the crisis; on the contrary, we were buyers when the currencies began to decline – we were purchasing ringgits to realize the profits on our earlier speculation.

Much too soon, as it turned out. We left most of the potential gain on the table because we were afraid that Mahathir would impose capital controls. He did so, but much later.[23]

The nominal U.S. dollar GDP of the ASEAN fell by \$9.2 billion in 1997 and \$218.2 billion (31.7%) in 1998.

Economist Paul Krugman is critical of Soros' effect on financial markets.

"Nobody who has read a business magazine in the last few years can be unaware that these days there really are investors who not only move money in anticipation of a currency crisis, but actually do their best to trigger that crisis for fun and profit. These new actors on the scene do not yet have a standard name; my proposed term is 'Soroi'." [24]

8 Crisis of Global Capitalism

At one point in his new book, "The Crisis of Global Capitalism," [12] George Soros opines [13] that the reader has most likely been attracted to the book by the author's proven

success as an international investor, rather than by either of his other two roles, as philanthropist or as public intellectual and analyst of international financial markets and social policy.

The book is breathtaking in its intellectual ambition, with a scattering of good insights. Yet it is in fact of greatest interest as a potential source of information regarding the inter-relationship of Soros' three roles.

A speculator introspects

One question is foremost in the mind of a reader. When Soros the speculator helps force a currency into crisis and devaluation, how does Soros the philanthropist think about the social or moral implications for the country under attack?

Soros, as an *intellectual analyst*, makes clear his view that, at the end of the 20th century, market values have grown undesirably prominent compared to social values; that financial markets have become excessively volatile due to positive feedback from price movements to speculators' expectations; and that *some sort of government intervention is appropriate*.

The financial math language is required by the intricacy of the economic phenomena to be explained: equilibrium, and bank-runs.

If one gives Soros both a careful reading and the benefit of the doubt, one suspects that he has in mind by *reflexivity* something more interesting and profound than the simple idea that the typical speculator forms expectations extrapolatively.

Contrary to most economists' theories, there is no such thing as the typical speculator, or "representative agent." There are in fact different kinds of speculators operating in the marketplace, with different ways of processing information (i.e., different "models" of how financial markets work), thus producing different expectations of future prices.

After all, if there were not such a diversity of expectations, then there would not be the tremendous volume of trading in financial markets that there is (\$1 ½ trillion per day in the world's foreign exchange markets alone); it's the difference in opinion that makes a horse race. The interaction of different kinds of speculators, of different models, gives the market interesting dynamics.

Some participants form estimates of what they think a currency or stock should be worth based on economic fundamentals such as growth rates, interest rates, and inflation rates.

They are the stabilizing speculators: if the market price is observed to rise above the level dictated by fundamentals, they sell, which works to push the price back down.

In normal times, and especially in the long run, their views dominate the determination of the market price, at least roughly. But a large proportion of participants eschew economic fundamentals, believing them to be irrelevant, at least, for market movements at the short-term horizons where their interests lie. Many subscribe instead to technical analysis, for example.

Soros argues that there has been a noticeable shift in the weight that the market gives to technical analysis, at the expense of fundamentalism [p.79]. There is evidence to support this view.

Such a shift has important implications. If traditional models based on economic fundamentals say that the stock market is overvalued, those investors who respond by selling stocks put downward pressure on the market, thereby dampening the extent of the overvaluation.

But if the fundamentals models are gradually accorded less weight over time, then the pressure on the sell side diminishes over time. As a result, market prices continue to rise. A self-confirming market bubble is born. To produce this result, the technical analysts or other non-fundamentalists need not even subscribe to extrapolative models.

The shift in weight away from fundamentals is not wholly irrational. Investors are simply responding in a reasonable way to the observation that the market rise has repeatedly proven fundamentalists models wrong and technical analysis right.

Every month that the fundamentalists' predictions of doom are unrealized, investors decrease the weight they place on the fundamentalists view of the world.

It is not that they necessarily decide that the market is correctly valued. It is rather that they observe that they lose money if they do not go along with the herd.

It is little use "being right" if everyone else persists in being wrong. By the time the bubble reaches its peak, those who favor selling short based on fundamentals have been proven wrong so many times that there is the little wonder that they have lost credibility. The market is operating far from equilibrium (p.79), outside the range that their models specified.

Of course this may be precisely when the momentum - - the switch to technical analysis -- is spent, and market sentiment begins to turn.

This is only one of a number of models relevant to the Soros view of financial markets. An important example is J. Bradford De Long, Andrei Shleifer, Lawrence Summers and Robert Waldmann (1990), "Noise Trader Risk in Financial Markets" *Journal of Political Economy* 98-4, 703-38. [Their model features a class of traders who follow irrelevant noise, and yet who prosper over time, contrary to the classic Milton

Friedman argument that destabilizing speculators would be driven out of the market.]

What kind of regulation will fit the international financial markets?

There are indeed indications that financial markets do not always work quite as perfectly as the happy majority view of the economic theorists suggests. Most salient are such recurrent disruptions as the 1982 international debt crisis, 1992-93 crisis in the European Exchange Rate Mechanism, 1994-95 Mexican peso crisis, and 1997-98 Asian financial crisis. It does not seem that investors have punished countries when and only when the governments are following bad policies.

First, large inflows often give way suddenly to large outflows, with little news appearing in between that might explain the change in sentiment. Second, contagion sometimes spreads to countries where fundamentals appear strong. Third, the recessions that have hit emerging market countries in such crises have been of such magnitude that it is difficult to argue that the system is working well.

If one were to bite the bullet, and ordain some regulation of international financial markets, what sort would it be? A small tax on all foreign exchange transactions [Tobin tax] Or on all domestic securities transactions [Summers, pre-Treasury] Tax penalties on short-term capital inflows [Chile] Quantitative restrictions on capital outflows. [Malaysia] High reserve requirements on bank borrowing from abroad [Argentina].

Regulation of hedge funds?

These are very different proposals, with very different implications. Yet most commentators do not distinguish. This problem applies to the supporters of government intervention almost as much as to the opponents. The debate over the desirability of measures to slow down international capital flows has been sterile. It generally consists of arguments for and against the virtues of free and unfettered capital markets.

On the one hand, proponents of introducing "sand in the wheels" of international financial markets point to evidence of inefficiencies, anomalies, bubbles, speculative attacks and crashes.

On the other hand, the opponents (which at least until recently, have included the heavy majority of academic economists) argue that any measures to weed out alleged destabilizing short-term capital flows would inevitably also inhibit desirable long-term capital flows. Neither group bothers much to distinguish among the details of the various possible measures.

Controls on capital inflows, or controls on hedge funds

How someone can be expected to weed out the destabilizing capital flows while still "weeding in" desirable stabilizing flows.

Consider one possibility, proposals to regulate hedge funds. Soros argues for fundamental regulation. But the proposed regulation is of a nature unspecified and is, in degree, to fall on hedge funds as heavily as everyone else, but no more heavily.

Hedge funds in general and Soros in particular, have recently acquired in the popular imagination an image as speculation at its most excessive. Currency collapses from London to Kuala Lumpur are blamed on them. But there is danger of scapegoating.

Hedge funds tend to be the smaller players than other categories of speculators, such as international banks and who constitute most of the volume of trade in foreign exchange markets, or local residents of countries who try to get their money out ahead of feared crises.

More importantly, there is a case to be made that hedge funds are more often a source of stabilizing speculation rather than destabilizing. As noted above, they tend to place their bets based on economic fundamentals and arbitrage opportunities, not on the trend-following.

Significantly, some recent volatility in foreign exchange markets seems to result from hedge funds withdrawing from the market -- forced to unwind positions because high leverage does not permit them to continue renewing a bet until such time as the market price catches up where they think it should be -- not because the fund has placed a bet on a trend away from fundamentals.

Assume that regulators were to succeed in clipping the hedge funds in some way (and it is not clear how, since funds like Soros' are registered offshore, precisely to avoid regulation).

It is possible that the weight of stabilizing speculation in the market would thereby shrink, and deviations from fundamentals equilibrium thereby grow.

According to Soros, there are two respects in which some hedge funds may merit their reputation as a potential source of volatility. [In these regards, Soros points out the distinction between Long-Term Capital Management and Soros Fund Management.]

First, he argues that LTCM relied too slavishly on efficient-markets theory. One aspect of this theory, rational expectations statistical methodology, does indeed appear to have been part of the problem.

Under this methodology, statistical estimates based on whatever pattern of movements of financial market prices happened to hold during a recent historical period (means, variances, and correlations) are assumed to hold in the future. But this approach can give the wrong answer *if an unusual event happens* not to have occurred during that period.

An extreme flight to quality -- wherein US treasury bill rates fall at the same time that most other U.S. interest rates rise --

is sufficiently rare historically that hedge funds were caught by surprise when it occurred in August 1998.]

Second, some hedge funds have become extremely leveraged, in the essence placing their bets on margin, i.e., borrowing from their banks to raise the stakes. Bets that go wrong, often because the market has not yet caught up with the economic fundamentals, then threaten the entire system.

This calls for regulation of the banks -as it is here where the public interest is most clearly involved -- more than regulation of the hedge funds.

Let us discuss the penalty on short-term capital inflows that Chile imposed in the early 1990s, in the boom phase of its financing cycle (p.202). Statistical evidence suggests that the composition of inflow is a significant leading indicator of the probability of currency crashes occurring.

The higher the reliance on foreign currency borrowing that is short-term or intermediated through banks, the higher the probability of crisis. The higher the reliance on foreign direct investment the lower the probability of crisis.

The theory is that bank flows in particular are more vulnerable to the moral hazard problems than are other modes of financing such as foreign direct investment and sales of longer-term securities, and that a mismatch of short-term bank liabilities with longer-term bank assets (e.g., real estate) leaves a country vulnerable.

This conclusion lends support to proposals for controls that would seek to change the composition of capital inflows. A common interpretation of Chile's experience is that the controls have succeeded in changing the composition of the capital inflow, in the direction of longer-term maturities, while having little effect on the total magnitude.

While Chile's removal of some of its inflow controls in 1998 have been described by some as evidence against their utility, it could instead be interpreted as an appropriate recognition by Chile that the controls should be maintained only in the phase of the cycle when inflows are potentially excessive. One promising variant is the idea of placing higher reserve requirements on banks' short-term borrowing from abroad in foreign currency (as Argentina has essentially done).

"It should be possible to curb speculation without incurring all the harmful side-effects of capital controls...This is about as far as I want to go in prescribing solutions. Perhaps I have already gone too far."

An International Credit Insurance Corporation Proposal.

There is no explanation of the ICIC proposal here, only a statement that this point in history would be an ideal time to enact the plan because this new institution would encourage greater flows to emerging market countries, which is precisely what is needed. This seems to contradict the argument in the rest of the book, which is more consistent with the belief that capital flows tend to be excessive.

The proposal [in the FT] is to set up an authority that would guarantee international loans for a modest fee. It could be part of the International Monetary Fund, or a new agency. Up to an amount set by the authority, the ICIC guarantee would mean that a borrowing country could access international capital markets at prime rates.

Beyond this, creditors would have to beware. References include Velasco and Cabezas (1997), Edwards (1998), Agosin and Ffrench-Davis (1996, Valdes-Prieto and Soto (1996), and Chucamaro, Laban, and Larrain (1996), who use regression analysis to confirm a relationship between the observed decline in the share of short-term capital inflows into Chile and the deposit scheme.

Perhaps it is only during the "bust" part of the cycle, as now, that the ICIC would act to increase the level of funding for emerging markets. It is probably intended that during the "boom" part of the cycle (e.g., 1991-96), the institution would somehow limit lending. This would in fact be the case if Soros has in mind that the international community's support would be limited to the ICIC, and that the support for all loans would disappear as soon as the national aggregate borrowing went over the approved limit.

But it might not be the case otherwise, especially if the ICIC guaranteed only specific loans, with further loans left to the mercy of the market place. The famous moral hazard problem, which many believe to be the crux of the malady afflicting the international financial system now, could remain, in the enhanced form.

In the first place, public statements that no loans would be bailed out in the bust phase, beyond those insured, would be no more credible than statements under the current system that loans in general will not be bailed out. When a crisis hit a systemically-critical debtor, the international community would feel the need to come to its rescue as much then as it does now.

In the second place, the countries would have an incentive during the boom phase to assign to the guarantee those borrowings that are politically-favored, and to save their most credit-worthy projects to go up against the market test.

In that case, the ICIC guarantees would exacerbate the moral hazard problems that currently exist, rather than diminishing them.

As a result, politics regularly carries the policy-making process far away from the sensible path, on the bandwagons analogous to those afflicting the financial community. Indeed, ultimately, "the political process is less effective than the market process in correcting its own excesses (p.207)." A picture that is accurate but that is not likely to inspire a clear call to public action.

9 Current Global Financial Crisis

The late-2000s financial crisis, also known as the Global Financial Crisis (GFC), is considered by many economists to be the worst financial crisis since the Great Depression of the 1930s.[25] It resulted in the collapse of large financial institutions, the bailout of banks by national governments and downturns in stock markets around the world. In many areas, the housing market also suffered, resulting in numerous evictions, foreclosures and prolonged unemployment. It contributed to the failure of key businesses, declines in consumer wealth estimated in the trillions of U.S. dollars, and a significant decline in economic activity, leading to a severe global economic recession in 2008.[26]

The financial crisis was triggered by a complex interplay of valuation and liquidity problems in the United States banking system in 2008.[3][4] The bursting of the U.S. housing bubble, which peaked in 2007, caused the values of securities tied to U.S. real estate pricing to plummet, damaging financial institutions globally.[5][6] Questions regarding bank solvency, declines in credit availability and damaged investor confidence had an impact on global stock markets, where securities suffered large losses during 2008 and early 2009. Economies worldwide slowed during this period, as credit tightened and international trade declined.[7] Governments and central banks responded with unprecedented fiscal stimulus, monetary policy expansion and institutional bailouts. Although there have been aftershocks, the financial crisis itself ended sometime between late-2008 and mid-2009.[8][9][10]

Many causes for the financial crisis have been suggested, with varying weight assigned by experts.[11] The United States Senate issued the Levin–Coburn Report, which found "that the crisis was not a natural disaster, but the result of high risk, complex financial products; undisclosed conflicts of interest; and the failure of regulators, the credit rating agencies, and the market itself to rein in the excesses of Wall Street." [12]

Critics argued that credit rating agencies and investors failed to accurately price the risk involved with mortgage-related financial products, and that governments did not adjust their regulatory practices to address 21st-century financial markets.[13] The 1999 repeal of the Glass–Steagall Act of 1933 effectively removed the separation that previously existed between Wall Street investment banks and depository banks.[14] In response to the financial crisis, both market-based and regulatory solutions have been implemented or are under consideration.[15]

Causes of the late-2000s financial crisis

Many factors directly and indirectly caused the ongoing Financial crisis of 2007–10 (which started with the US subprime mortgage crisis), with experts placing different weights upon particular causes. The complexity and

interdependence of many of the causes, as well as competing political, economic and organizational interests, have resulted in a variety of narratives describing the crisis. One category of causes created a vulnerable or fragile financial system, including complex financial securities,[1] a dependence on short-term funding markets, and international trade imbalances. Other causes increased the stress on this fragile system, such as high corporate and consumer debt levels. Still others represent shocks to that system, such as the ongoing foreclosure crisis and the failures of key financial institutions.[2] Regulatory and market-based controls did not effectively protect this system or measure the buildup of risk.[1][2] Some causes relate to particular markets, such as the stock market or housing market, while others relate to the global economy more broadly.[3][4]

The U.S. Financial Crisis Inquiry Commission reported its findings in January 2011. It concluded that "the crisis was avoidable and was caused by: Widespread failures in financial regulation, including the Federal Reserve's failure to stem the tide of toxic mortgages; Dramatic breakdowns in corporate governance including too many financial firms acting recklessly and taking on too much risk; An explosive mix of excessive borrowing and risk by households and Wall Street that put the financial system on a collision course with crisis; Key policy makers ill prepared for the crisis, lacking a full understanding of the financial system they oversaw; and systemic breaches in accountability and ethics at all levels." [5][6]

The U.S. housing bubble and foreclosures

Between 1997 and 2006, the price of the typical American house increased by 124%.[7] During the two decades ending in 2001, the national median home price ranged from 2.9 to 3.1 times median household income. This ratio rose to 4.0 in 2004, and 4.6 in 2006.[8] This housing bubble resulted in quite a few homeowners refinancing their homes at lower interest rates, or financing consumer spending by taking out second mortgages secured by the price appreciation.

By September 2008, average U.S. housing prices had declined by over 20% from their mid-2006 peak.[9][10] Easy credit, and a belief that house prices would continue to appreciate, had encouraged many subprime borrowers to obtain adjustable-rate mortgages. These mortgages enticed borrowers with a below market interest rate for some predetermined period, followed by market interest rates for the remainder of the mortgage's term. Borrowers who could not make the higher payments once the initial grace period ended would try to refinance their mortgages. Refinancing became more difficult, once house prices began to decline in many parts of the USA. Borrowers who found themselves unable to escape higher monthly payments by refinancing began to default. During 2007, lenders had begun foreclosure proceedings on nearly 1.3 million properties, a 79% increase over 2006.[11] This increased to 2.3 million in 2008, an 81% increase vs. 2007.[12] As of August 2008, 9.2% of all

mortgages outstanding were either delinquent or in foreclosure.[13]

The Economist described the issue this way: "No part of the financial crisis has received so much attention, with so little to show for it, as the tidal wave of home foreclosures sweeping over America. Government programmes have been ineffectual, and private efforts not much better." Up to 9 million homes may enter foreclosure over the 2009-2011 period, versus one million in a typical year.[14] At roughly U.S. \$50,000 per foreclosure according to a 2006 study by the Chicago Federal Reserve Bank, 9 million foreclosures represents \$450 billion in losses.[15]

Mortgage underwriting

In addition to considering higher-risk borrowers, lenders offered increasingly risky loan options and borrowing incentives. Mortgage underwriting standards declined gradually during the boom period, particularly from 2004 to 2007.[2] The use of automated loan approvals allowed loans to be made without appropriate review and documentation.[27] In 2007, 40% of all subprime loans resulted from automated underwriting.[28][29] The chairman of the Mortgage Bankers Association claimed that mortgage brokers, while profiting from the home loan boom, did not do enough to examine whether borrowers could repay.[30] Mortgage fraud by lenders and borrowers increased enormously.[31]

A study by analysts at the Federal Reserve Bank of Cleveland found that the average difference between subprime and prime mortgage interest rates (the "subprime markup") declined significantly between 2001 and 2007. The quality of loans originated also worsened gradually during that period. The combination of declining risk premium and credit standards is common to boom and bust credit cycles.

The authors also concluded that the decline in underwriting standards did not directly trigger the crisis, because the gradual changes in standards did not statistically account for the large difference in default rates for subprime mortgages issued between 2001-2005 (which had a 10% default rate within one year of origination) and 2006-2007 (which had a 20% rate). In other words, standards gradually declined but defaults suddenly jumped.

Further, the authors argued that the trend in worsening loan quality was harder to detect with rising housing prices, as more refinancing options were available, keeping the default rate lower.[32][33]

Mortgage fraud

In 2004, the Federal Bureau of Investigation warned of an "epidemic" in mortgage fraud, an important credit risk of nonprime mortgage lending, which, they said, could lead to "a problem that could have as much impact as the S&L crisis".[34][35][36][37]

Down payments and negative equity

A down payment refers to the cash paid to the lender for the home and represents the initial homeowners' equity or financial interest in the home. A low down payment means that a home represents a highly leveraged investment for the homeowner, with little equity relative to debt. In such circumstances, only small declines in the value of the home result in negative equity, a situation in which the value of the home is less than the mortgage amount owed. In 2005, the median down payment for first-time home buyers was 2%, with 43% of those buyers making no down payment whatsoever.[38] By comparison, China has down payment requirements that exceed 20%, with higher amounts for non-primary residences.[39]

Economist Nouriel Roubini wrote in *Forbes* in July 2009: "Home prices have already fallen from their peak by about 30%. Based on my analysis, they are going to fall by at least 40% from their peak, and more likely 45%, before they bottom out. They are still falling at an annualized rate of over 18%. That fall of at least 40%-45% percent of home prices from their peak is going to imply that about half of all households that have a mortgage—about 25 million of the 51 million that have mortgages—are going to be underwater with negative equity and will have a significant incentive to walk away from their homes." [40]

Economist Stan Leibowitz argued in the *Wall Street Journal* that the extent of equity in the home was the key factor in foreclosure, rather than the type of loan, credit worthiness of the borrower, or ability to pay. Although only 12% of homes had negative equity (meaning the property was worth less than the mortgage obligation), they comprised 47% of foreclosures during the second half of 2008. Homeowners with negative equity have less financial incentive to stay in the home.[41]

The *L.A. Times* reported the results of a study that found homeowners with high credit scores at the time of entering the mortgage are 50% more likely to "strategically default" -- abruptly and intentionally pull the plug and abandon the mortgage—compared with lower-scoring borrowers. Such strategic defaults were heavily concentrated in markets with the highest price declines. An estimated 588,000 strategic defaults occurred nationwide during 2008, more than double the total in 2007. They represented 18% of all serious delinquencies that extended for more than 60 days in the fourth quarter of 2008.[42]

Predatory lending

Predatory lending refers to the practice of unscrupulous lenders, to enter into "unsafe" or "unsound" secured loans for inappropriate purposes.[43] A classic bait-and-switch method was used by Countrywide, advertising low interest rates for home refinancing. Such loans were written into mind-numbingly detailed contracts, and swapped for more expensive loan products on the day of closing. Whereas the

advertisement might state that 1% or 1.5% interest would be charged, the consumer would be put into an adjustable rate mortgage (ARM) in which the interest charged would be greater than the amount of interest paid. This created negative amortization, which the credit consumer might not notice until long after the loan transaction had been consummated.

Countrywide, sued by California Attorney General Jerry Brown for "Unfair Business Practices" and "False Advertising" was making high cost mortgages "to homeowners with weak credit, adjustable rate mortgages (ARMs) that allowed homeowners to make interest-only payments." [44] When housing prices decreased, homeowners in ARMs then had little incentive to pay their monthly payments, since their home equity had disappeared. This caused Countrywide's financial condition to deteriorate, ultimately resulting in a decision by the Office of Thrift Supervision to seize the lender.

Countrywide, according to Republican Lawmakers, had involved itself in making low-cost loans to politicians, for purposes of gaining political favors. [45]

Former employees from Ameriquest, which was United States's leading wholesale lender, [46] described a system in which they were pushed to falsify mortgage documents and then sell the mortgages to Wall Street banks eager to make fast profits. [46] There is growing evidence that such mortgage frauds may be a cause of the crisis. [46]

Risk-taking behavior

In a June 2009 speech, U.S. President Barack Obama argued that a "culture of irresponsibility" [47] was an important cause of the crisis. He criticized executive compensation that "rewarded recklessness rather than responsibility" and Americans who bought homes "without accepting the responsibilities." He continued that there "was far too much debt and not nearly enough capital in the system. And a growing economy bred complacency." [48]

A key theme of the crisis is that many large financial institutions did not have a sufficient financial cushion to absorb the losses they sustained or to support the commitments made to others. Using technical terms, these firms were highly leveraged (i.e., they maintained a high ratio of debt to equity) or had insufficient capital to post as collateral for their borrowing. A key to a stable financial system is that firms have the financial capacity to support their commitments. [49] Michael Lewis and David Einhorn argued: "The most critical role for regulation is to make sure that the sellers of risk have the capital to support their bets." [50]

Pro-cyclical human nature

Keynesian economist Hyman Minsky described how speculative borrowing contributed to rising debt and an eventual collapse of asset values. [63] Economist Paul

McCulley described how Minsky's hypothesis translates to the current crisis, using Minsky's words:

"...from time to time, capitalist economies exhibit inflations and debt deflations which seem to have the potential to spin out of control. In such processes, the economic system's reactions to a movement of the economy amplify the movement--inflation feeds upon inflation and debt-deflation feeds upon debt deflation." In other words, people are momentum investors by nature, not value investors. People naturally take actions that expand the apex and nadir of cycles. One implication for policymakers and regulators is the implementation of counter-cyclical policies, such as contingent capital requirements for banks that increase during boom periods and are reduced during busts. [64]

Minsky proposed theories linking financial market fragility, in the normal life cycle of an economy, with speculative investment bubbles endogenous to financial markets. Minsky claimed that in prosperous times, when corporate cash flow rises beyond what is needed to pay off debt, a speculative euphoria develops, and soon thereafter debts exceed what borrowers can pay off from their incoming revenues, which in turn produces a financial crisis. As a result of such speculative borrowing bubbles, banks and lenders tighten credit availability, even to companies that can afford loans, and the economy subsequently contracts.

This slow movement of the financial system from stability to fragility, followed by crisis, is something for which Minsky is best known, and the phrase "Minsky moment" refers to this aspect of Minsky's academic work.

"He offered very good insights in the '60s and '70s when linkages between the financial markets and the economy were not as well understood as they are now," said Henry Kaufman, a Wall Street money manager and economist. "He showed us that financial markets could move frequently to excess. And he underscored the importance of the Federal Reserve as a lender of last resort." [320]

Minsky's model of the credit system, which he dubbed the "financial instability hypothesis" (FIH), [321] incorporated many ideas already circulated by John Stuart Mill, Alfred Marshall, Knut Wicksell and Irving Fisher. [322] "A fundamental characteristic of our economy," Minsky wrote in 1974, "is that the financial system swings between robustness and fragility and these swings are an integral part of the process that generates business cycles." [323]

Disagreeing with many mainstream economists of the day, he argued that these swings, and the booms and busts that can accompany them, are inevitable in a so-called free market economy – unless government steps in to control them, through regulation, central bank action and other tools. Such mechanisms did in fact come into existence in response to crises such as the Panic of 1907 and the Great Depression. Minsky opposed the deregulation that characterized the 1980s.

Understanding Minsky's financial instability hypothesis

Hyman Minsky's theories about debt accumulation received revived attention in the media during the subprime mortgage crisis of the late 2000s.[326]

Minsky argued that a key mechanism that pushes an economy towards a crisis is the accumulation of debt by the non-government sector. He identified three types of borrowers that contribute to the accumulation of insolvent debt: hedge borrowers, speculative borrowers, and Ponzi borrowers.

The "hedge borrower" can make debt payments (covering interest and principal) from current cash flows from investments. For the "speculative borrower", the cash flow from investments can service the debt, i.e., cover the interest due, but the borrower must regularly roll over, or re-borrow, the principal.

The "Ponzi borrower" (named for Charles Ponzi, see also Ponzi scheme) borrows based on the belief that the appreciation of the value of the asset will be sufficient to refinance the debt but could not make sufficient payments on interest or principal with the cash flow from investments; only the appreciating asset value can keep the Ponzi borrower afloat. Because of the unlikelihood of most investments' capital gains being enough to pay interest and principal, much of this type of finance is fraudulent.

If the use of Ponzi finance is general enough in the financial system, then the inevitable disillusionment of the Ponzi borrower can cause the system to seize up: when the bubble pops, i.e., when the asset prices stop increasing, the speculative borrower can no longer refinance (roll over) the principal even if able to cover interest payments. As with a line of dominoes, collapse of the speculative borrowers can then bring down even hedge borrowers, who are unable to find loans despite the apparent soundness of the underlying investments.[321]

Applying the hypothesis to the subprime mortgage crisis

Economist Paul McCulley described how Minsky's hypothesis translates to the subprime mortgage crisis.[327]

McCulley illustrated the three types of borrowing categories using an analogy from the mortgage market: a hedge borrower would have a traditional mortgage loan and is paying back both the principal and interest; the speculative borrower would have an interest-only loan, meaning they are paying back only the interest and must refinance later to pay back the principal; and the ponzi borrower would have a negative amortization loan, meaning the payments do not cover the interest amount and the principal is actually increasing. Lenders only provided funds to ponzi borrowers due to a belief that housing values would continue to increase.

McCulley writes that the progression through Minsky's three borrowing stages was evident as the credit and housing bubbles built through approximately August 2007. Demand for housing was both a cause and effect of the rapidly-expanding shadow banking system, which helped fund the shift to more lending of the speculative and ponzi types, through ever-riskier mortgage loans at higher levels of leverage.

This helped drive the housing bubble, as the availability of credit encouraged higher home prices. Since the bubble burst, we are seeing the progression in reverse, as businesses de-leverage, lending standards are raised and the share of borrowers in the three stages shifts back towards the hedge borrower.

McCulley also points out that human nature is inherently pro-cyclical, meaning, in Minsky's words, that "from time to time, capitalist economies exhibit inflations and debt deflations which seem to have the potential to spin out of control. In such processes, the economic system's reactions to a movement of the economy amplify the movement – inflation feeds upon inflation and debt-deflation feeds upon debt deflation."

In other words, people are momentum investors by nature, not value investors. People naturally take actions that expand the high and low points of cycles. One implication for policymakers and regulators is the implementation of counter-cyclical policies, such as contingent capital requirements for banks that increase during boom periods and are reduced during busts.

10 Conclusion

The non-linear Financial Instability model of Hyman Minsky has been considered as well as the causes and timeline of the current global financial crisis. Also, we have continued to discuss hedge funds strategies.

The success of any investment strategy is highly dependent on the skills and implementation ability of individual managers. A good event-driven investment manager is a useful addition to a diversified portfolio of investments, capable of producing absolute non-market correlated returns throughout the economic cycle.

Hedge funds focus on strategies that traditional funds cannot undertake, or cannot do well. The three defining characteristics of hedge funds are very strong incentive structures for managers, light regulation, and investment opacity.

Hedge funds undertake investment strategies which play to one or more of these strengths. Long-short strategies rely on hedge funds' freedom to short equities and take derivatives positions, both of which are often forbidden for traditional funds, or restricted by funds' investment mandates.

Hedge fund strategies requiring fast decisions in risky environments, such as event-driven strategies and tactical trading strategies, are helped by the very strong management incentives used by hedge funds. The investment opacity of hedge funds is crucial in many relative-value strategies since it prevents other investors from uncovering the fund's positions and squeezing its transactions in illiquid markets.

In contrast to hedge funds, traditional funds are characterized by conservative incentive structures for managers, tight regulation, and investment clarity. This gives traditional funds an advantage for strategies designed to target an asset-class benchmark, with a relatively cautious overlay of active positions.

Back in 2004, the biggest Wall Street investment banks have created the instrument of their own destruction, the credit default swap on the subprime mortgage bond. [29]

The combination of debt-financing and mark-to-market accounting conspire to give price movements in the asset markets an unstable positive feedback. [30]

The self-reinforcing asset-debt cycles are the essential element of Hyman Minsky's Financial Instability Hypothesis. [31]

Special thanks are owed to Professor Oleg Yu. Vorobyev.

Reference

- [1] Val Demotchkin. A Comparison of Hedge Fund Strategies. 8th International FAM Conference on Financial and Actuarial Mathematics and Related Fields, Krasnoyarsk, Russia, 2009
- [2] Val Demotchkin. A comparison of event driven hedge fund strategies. XIII International EM Conference on Eventological Mathematics and Related Fields, Krasnoyarsk, Siberia, Russia, 2009
- [3] Val Demotchkin. A comparison of Hedge Fund strategies. Part 3. XV International EM Conference on Eventological Mathematics and Related Fields, Krasnoyarsk, Siberia, Russia, 2011
- [4] Richard Wilson Hedge Fund Blog.
- [5] Anson, Mark J.P. (2006). *The Handbook of Alternative Assets*. Wiley, John & Sons, Incorporated. p. 123. ISBN 047198020X.
- [6] Nocera, Joe (16 May 2009). "Hedge Fund Manager's Farewell". *The New York Times*.
- [7] "Hedge Funds: How They Serve Investors In U.S. and Global Markets" (PDF). Hedge Fund Facts.org. Coalition of Private Investment Companies. 2009.
- [8] "Hedge fund industry assets swell to \$1.92 trillion". *Daily FT*. 24 January 2011.
- [9] Opalesque (10 March 2010). "Incentive fees fall since start of the financial crisis".
- [10] Hedge Funds: Fees Down? Close Shop". *Businessweek.com*. 2005-08-08.
- [11] "AIMA Roadmap to Hedge Funds".
- [12] George Soros "The Crisis of Global Capitalism"
- [13] Jeffrey A. Frankel. *The Book Review: "The Crisis of Global Capitalism,"* by George Soros.
- [14] Vorobyev, Oleg Yu., Goldblatt, Joe Jeff and Finkel, Rebecca (2009): *Eventological Theory of Decision Making*. Published in: *Journal of Iberian Federal University. Mathematics & Physics*, 1 (2009): pp. 3-16
- [15] A financial History of the United States Volume II: 1970 - 2001, Jerry W. Markham, Chapter 5: Bank Consolidation, M.E.Sharpe, Inc., 2002
- [16] Greenspan, Alan (2007). *The Age of Turbulence: Adventures in a New World*. The Penguin Press. pp. 193-195. ISBN 978-1-59420-131-8.
- [17] The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences 1997.
- [18] www.georgesoros.com/faqs/archive/category/finance
- [19] Litterick, David (September 13, 2002), "Billionaire who Broke the Bank of England", *The Telegraph*.
- [20] Steven Drobny, "Inside the House of Money", John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, 2006.
- [21] Soros on Soros: *Staying Ahead of the Curve* (John Wiley, 1995) ISBN 0-471-12014-6
- [22] "Mahathir's dark side". *The Daily Telegraph* (London). October 24, 2003.
- [23] Soros, George (1999). *The Crisis of Global Capitalism: Open Society Endangered*, 2nd ed., PublicAffairs, ISBN 1-891220-27-4, pp. 208-209.
- [24] Krugman, Paul (1999). *The accidental theorist: and other dispatches from the dismal science*. New York: W. W. Norton & Company. p. 160.
- [25] Three top economists agree 2009 worst financial crisis since great depression; risks increase if right steps are not taken. (February 29, 2009). *Reuters*.
- [26] *The US Financial and Economic Crisis: Where Does It Stand and Where Do We Go From Here?* Martin Neil Baily and Douglas J. Elliott. June 2009
- [27] Michael Simkovic, "Secret Liens and the Financial Crisis of 2008" *American Bankruptcy Law Journal*, Vol. 83, p. 253, 2009.
- [28] Michael Simkovic, *Bankruptcy Immunities, Transparency, and Capital Structure*, Presentation at the World Bank, January 11, 2011
- [29] Hyman P. Minsky. *Stabilizing an Unstable Economy*, 1986
- [30] George Cooper. *The Origin of Financial Crisis. Central banks, credit bubbles and the Efficient Market fallacy*. 2008, p. 105
- [31] Michael Lewis. *Boomerang. Travels in the New Third World*, 2011, p. ix.
- [32] Uchitelle, Louis (October 26, 1996). "H. P. Minsky, 77, Economist Who Decoded Lending Trends". *The New York Times*. <http://www.nytimes.com/1996/10/26/us/h-p-minsky-77-economist-who-decoded-lending-trends.html?pagewanted=1>. Retrieved May 4, 2010.
- [33] *The Financial Instability Hypothesis* by Hyman P. Minsky, Working Paper No. 74, May 1992, pp. 6-8
- [34] pg. 14, *Manias, Panics, and Crashes*, 4th Ed. by Charles P. Kindleberger
- [35] Minsky, Hyman P. (1974). "The Modeling of Financial Instability: An introduction". *Modeling and Simulation. Proceedings of the Fifth Annual Pittsburgh Conference*. 5.
- [36] *Are we "It" yet?*, by Steve Keen, Associate Professor in economics and finance at the University of Western Sydney, July 3rd, 2010
- [37] *A Minsky Meltdown: Lessons for Central Bankers*, by Janet L. Yellen, President and CEO, Federal Reserve Bank of San Francisco, April 16, 2009
- [38] *The Credit Crisis: Denial, delusion and the "defunct" American economist who foresaw the dénouement*
- [39] *McCulley-PIMCO-The Shadow Banking System and Hyman Minsky's Economic Journey*
- [40] Hyman P. Minsky, John Maynard Keynes, Columbia University Press, 1975. Donald Markwell, John Maynard Keynes and International Relations: *Economic Paths to War and Peace*, Oxford University Press, 2006.
- [41] Krugman, Paul (January 11, 2010). "Too big to fail?". *The Conscience of a Liberal*. *The New York Times*. <http://krugman.blogs.nytimes.com/2010/01/11/too-big-to-fail-fail-2/>.

The limit theorem for joint distribution in Q-process

Azam A. Imomov

Institute Mathematics and Information Technologies of Uzbek Academy of Sciences,
 Karshi State University,
 Kuchabag street 17, 180100 Karshi city, Uzbekistan
 imomov_azam@mail.ru

Abstract. We find out the limit law of the joint distribution of the population size and the total progeny in Q-processes.

Keywords. Galton-Watson Branching Processes; Q-processes; total progeny; limit theorem

1 Introduction and main result

This paper is a continuation of the author paper [8].

Let Z_n ($n \in \mathbb{N}_0$) be a population size of the Galton-Watson branching Process (GWP) in the n th generation; $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \{\mathbb{N} = 1, 2, \dots\}$. The value $A := \mathbf{E}\zeta_{nk}$ denotes the mean number of offspring of the single individual; see, e.g., [1, pp. 1–2].

Let $p_k := \mathbf{P}\{Z_1 = k \in \mathbb{N}_0\}$ denote the offspring law of a single individual and $p_0 > 0$ and $p_0 + p_1 \neq 1$. According to a branching condition the evolution law of GWP is regulated by probability generating function (GF) $F(s) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_k s^k$ and the GF $F_n(s) := \mathbf{E}s^{Z_n}$ is determined by the n -step iteration of $F(s)$; see [1, p. 2].

We know that in cases when $A < 1$ and $A = 1$ the trajectory of GWP is die out asymptotically. Accordingly in these cases the properties of GWP are investigated traditionally on nonzero trajectories. In this context we recall the following theorem on joint distribution of Z_n and $Y_n := \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$. The variable Y_n denote the total progeny of single individual until time n in GWP.

Теорема 1 (see, e.g., [11, p. 143]). *Let in GWP $A = 1$ and $F''(1) < \infty$. Then two-dimensional random vector $(Z_n/\mathbf{E}[Z_n | Z_n > 0]; Y_n/\mathbf{E}[Y_n | Z_n > 0])$ weakly converges as $n \rightarrow \infty$ to the one $(Z^*; Y^*)$, for which the Laplace transform is form of*

$$\mathbf{E} \left[e^{-\lambda Z^* - \theta Y^*} \right] = \left[\frac{sh2\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}} + \lambda \left(\frac{sh\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}} \right)^2 \right]^{-1}, \quad \lambda, \theta \geq 0.$$

The limit Laplace transform has been obtained also by D.Kennedy [10] studying the behaviour of Z_n conditioned on the event $\{Y := \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m = n\}$ as $n \rightarrow \infty$. Setting $\lambda = 0$ gives the well-known conditional limit law for $2Y_n/F''(1)n$ derived by A.Pakes [13, Theorem 4].

This theorem contains (at $\theta = 0$) the well-known A.Yaglom's result [19], according to which a limit of

conditional distribution

$$S_{n,m}(x) := \mathbf{P} \left\{ \frac{2Z_n}{F''(1)n} \leq x \mid Z_{n+m} > 0 \right\}$$

exists as $n \rightarrow \infty$, for any $m \in \mathbb{N}_0$, namely

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,m}(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$

Investigations shows that treating the conditioning of not-extinction in remote future $Z_\infty > 0$ instead of fundamental conditioning $Z_n > 0$ deliver a new limit distribution law discrepant from classical one (e.g. qua conditioning distribution of Z_n under $Z_\infty > 0$ we mean $\mathbf{P}\{Z_n | Z_\infty > 0\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z_n | Z_{n+m} > 0\}$). So T.Harris [3] pointed out that at the same conditions as in Theorem 1 the following result holds:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} S_{n,m}(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}, \quad x > 0.$$

Later the condition $Z_\infty > 0$ was treated by J.Lamperti and P.Ney [12], K.Athreya and P.Ney [1, pp. 56–60], A.Pakes [13], [15], [17], A.Imomov [5], [6], [8], Sh.Formanov and A.Imomov [2]. In the paper of A.Pakes [18] and in author papers [7], [9] a continuous time case was discussed.

The stochastic process $\{W_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ defined by GWP under conditioning of $Z_\infty > 0$ is called in [1, pp. 56] the Q-process. In fact the Q-process $\{W_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ is homogeneous Markov chain with zero state $W_0 = 1$, which is given by transition probabilities

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(n)} &= \mathbf{P}\{W_{n+k} = j \mid W_k = i\} \\ &= \mathbf{P}\{Z_{n+k} = j \mid Z_k = i, Z_\infty > 0\}, \end{aligned}$$

for $n, i, j, k \in \mathbb{N}$. As was proved in [1972, pp. 56–58] these probabilities are form of

$$Q_{ij}^{(n)} = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^n} \mathbf{P}\{Z_{n+k} = j \mid Z_k = i\}, \quad (1)$$

here q is an extinction probability of GWP, which is the smallest root of the equation $s = F(s)$ on set of $s \in (0; 1]$ and $\beta := F'(q)$.

Further we need the GF $W_n^{(i)}(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}} Q_{ij}^{(n)} s^j$. Seeing the branching property of GWP and (1.1) we have the following relation:

$$W_n^{(i)}(s) = \left[\frac{F_n(qs)}{q} \right]^{i-1} W_n(s), \quad (2)$$

where the GF $W_n(s) := W_n^{(1)}(s) = \mathbf{E} [s^{W_n} | W_0 = 1]$ has a form

$$W_n(s) = s \frac{F'_n(qs)}{\beta^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

We see that the Q-process $\{W_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ can be defined by family of nonnegative integer valued random variables $\{\omega_{nk}, n, k \in \mathbb{N}\}$, recursively as

$$W_n = \sum_{k=1}^{W_{n-1}} \omega_{nk},$$

where all variables ω_{nk} have a common GF $W(s) = W_1(s)$. Throughout we will assume that $\alpha := \mathbf{E}\omega_{nk}$ is finite. It same that $F''(q)$ is finite also and we find out that $\alpha = W'(1) = 1 + qF''(q)/\beta$. Needless to say that $\alpha > 1$.

In this paper we will investigate a limit of a joint distribution of the Q-process and its total progeny for the case of $A = 1$ (the critical case for GWP).

By the total progeny in the Q-process we mean the random variable

$$S_n := W_0 + W_1 + \dots + W_{n-1}, \quad S_0 = 0.$$

A main result of this work is the following theorem.

Теорема 2. *Let $A = 1$. Then the random vector $(W_n/\mathbf{E}W_n; S_n/\mathbf{E}S_n)$ weakly converges as $n \rightarrow \infty$ to a random vector $(W^*; S^*)$, which has a Laplace transform*

$$\mathbf{E} [e^{-\lambda W^* - \theta S^*}] = \left[ch\sqrt{\theta} + \frac{\lambda sh\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}} \right]^{-2}, \quad \lambda, \theta \geq 0.$$

We note that the same limit Laplace transform appears in paper of A.Pakes [17] although in the different context. Moreover putting $\lambda = 0$ gives the result for the total progeny in GWP on conditioning $Z_\infty > 0$; see [13, Theorem 5].

Further we will essentially use the GF

$$J_n(s; x) := \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{P} \{W_n = i, S_n = k\} s^i x^k, \quad (s; x) \in \mathbb{D} \quad (4)$$

of joint distribution of W_n and S_n on set of

$$\mathbb{D} = \left\{ |s| \leq 1, |x| \leq 1 : \sqrt{(s-1)^2 + (x-1)^2} \geq r > 0 \right\}.$$

In Section 2 we get sight of deeper connection between the Q-processes and GWPI. This connection allows us to find out the necessary relations for GF $J_n(s; x)$. In the Section 3 we will discuss several preliminary results on properties of GFs in case of $A = 1$. These results will be used to the proof of Theorem 2 in Section 4.

2 Q-processes as GWPI

By iterating $F(s)$, the GF $W_n(s)$ may be written as

$$W_n(s) = s \prod_{k=0}^{n-1} G \left(\frac{F_k(qs)}{q} \right), \quad (5)$$

with $G(s) = F'(qs)/\beta$. It is easily to see that to the GF (2.1) is comparable a following random sum of random variables:

$$W_0 = 1, \quad W_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{W_n-1} \xi_{n+1k} + \eta_{n+1}, \quad (6)$$

where ξ_{nk} are i.i.d. random variables with common GF $F(qs)/q$ for all n and k . And η_n are i.i.d. random variables with $\mathbf{E}s^{\eta_n} = G(s)$. In pursuance of the last reasoning we can do conclusion that the Q-process may be replaced by following branching process. In the beginning there is one particle. Process' evolution starts by stream of the immigrating particles whose emergence intensity law is originated by GF $G(s)$. The particles-immigrants have arrived in population further obey the GF $F(qs)/q$. Besides it the initial particle does not disappear and does not breed. This "eternal particle" is present throughout all evolution of the process.

Sometimes designating $\bar{W}_n = W_n - 1$ the relation (2.2) we write down in form of

$$\bar{W}_n = \sum_{k=1}^{\bar{W}_{n-1}} \xi_{nk} + \eta_n. \quad (2.2^*)$$

We see that the sequence $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ is nothing but as the GWPI with $\bar{W}_0 = 0$ and transition probabilities $\bar{Q}_{ij}^{(n)} := \mathbf{P} \{\bar{W}_{n+k} = j | \bar{W}_k = i\} = Q_{i+1j+1}^{(n)}$. In this $\bar{Z}_{n+1} = \sum_{k=1}^{\bar{Z}_n} \xi_{nk}$ is the "internal" GWP obeys the GF $\mathbf{E}s^{\xi_{nk}} = F(qs)/q$ and arrival intensity of particles-immigrants is regulated by GF $G(s)$; on the detail of GWPI with general GF $G(s)$ we refer the reader to C.Heatcote [4] and A.Pakes [14], [16].

In concordance with definition of GWPI for the GF $\bar{W}_n^{(i)}(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{Q}_{ij}^{(n)} s^j$ the same relations (1.3) take place. Thus the research of asymptotic properties of Q-processes may be reduced to studying of corresponding properties of GWPI. Therefore in further research we essentially will based on the known properties of GWPI.

Remark. *The GWPI $\{\bar{W}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ may not be supercritical. Really, the mean number of the single individual offspring in "internal process" $\{\bar{Z}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ is*

$$\mathbf{E}\xi_{nk} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{F(qs)}{q} \right]_{s=1} = \begin{cases} 1, & A = 1, \\ \beta < 1, & A \neq 1. \end{cases} \quad (7)$$

The variable $\bar{Y}_n := \sum_{k=0}^{n-1} \bar{Z}_k$ denotes the total progeny in the process $\{\bar{Z}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ until time of n . Put into

consideration a joint GF $H_n(s; x) := \mathbf{E}s^{\bar{Z}_n}x^{\bar{Y}_n}$, $(s; x) \in \mathbb{D}$. In pursuance of reasoning of [13] we will be convinced that for the GF $H_n(s; x)$ following functional relations are fair:

$$\begin{aligned} H_0(s; x) &= s, \\ H_{n+1}(s; x) &= x \frac{F(qH_n(s; x))}{q}. \end{aligned} \quad (8)$$

Put the random variable $\bar{S}_n := \sum_{k=0}^{n-1} \bar{W}_k$ represents a total progeny in the GWPI, defined by relation (2.2*). According to the general theory of GWPI the joint GF $\bar{J}_n(s; x) := \mathbf{E}s^{\bar{W}_n}x^{\bar{S}_n}$, $(s; x) \in \mathbb{D}$, looks like as following (see [17]):

$$\bar{J}_n(s; x) = \prod_{k=0}^{n-1} G(H_k(s; x)), \quad (9)$$

where GF $G(s)$ is given in (2.1) and $H_n(s; x)$ satisfies to the equations (2.4).

Now by means of formulas (2.4) and (2.5) we easy will find out representation for GF $J_n(s; x)$ defined by (1.4). According to (2.2) and (2.2*) we see that $\bar{S}_n = S_n - n$, and therefore $J_n(s; x) = sx^n \bar{J}_n(s; x)$. Hence keeping our denotations we have

$$J_n(s; x) = s \prod_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x F'(qH_k(s; x))}{\beta} \right]. \quad (10)$$

3 Some discussions on generating functions in case $A = 1$

From now on we will consider the case $A = 1$. In this case the formula (2.6) becomes

$$J_n(s; x) = s \prod_{k=0}^{n-1} [x F'(H_k(s; x))], \quad (11)$$

where $H_n(s; x) = \mathbf{E}s^{Z_n}x^{Y_n}$.

As

$$\left. \frac{\partial J_n(s; x)}{\partial s} \right|_{(s; x)=(1; 1)} = \mathbf{E}W_n$$

and

$$\left. \frac{\partial J_n(s; x)}{\partial x} \right|_{(s; x)=(1; 1)} = \mathbf{E}S_n,$$

by direct differentiation from the formula (3.1) it is found

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}W_n &= (\alpha - 1)n + 1, \\ \mathbf{E}S_n &= \frac{\alpha - 1}{2}n(n + 1) + n, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

where, as well as earlier, $\alpha = W'(1) = 1 + F''(1)$.

We will use the GF $\Delta_n(s; x) := h(x) - H_n(s; x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, where $h(x) = \mathbf{E}x^Y$ is the GF of $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$. This variable denotes the total number of particles

participating in process $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ for all time of its evolution. Since in considering case this process to die out with probability 1, the variable Y exists always.

By virtue of $\mathbf{P}\{Z_n > 0\} = O(1/n)$ as $n \rightarrow \infty$ (see [1, p.11]) we see

$$\sup_{(s; x) \in \mathbb{D}} |\Delta_n(s; x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

and using arguments in [11, p.127, Lemma 3] gives

$$|\Delta_k(s; x)| \leq |\Delta_j(s; x)|, \quad (14)$$

for all $k \in \mathbb{N}_0$ and $j = 0, 1, \dots, k$.

We know also that for $\Delta_n(s; x)$ the following asymptotic expansion holds:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_n(s; x)} &= \frac{1}{u^n(x)} \left[\frac{1}{\Delta_0(s; x)} + \frac{b(x)[1 - u^n(x)]}{1 - u(x)} \right] \\ &+ \frac{1}{u^n(x)} \Sigma_{kn}(s; x), \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$u(x) := x F'(h(x)), \quad b(x) := \frac{F''(h(x))}{2F'(h(x))},$$

and

$$\Sigma_{kn}(s; x) := \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(s; x) u^k(x),$$

with $\sup_{(s; x) \in \mathbb{D}} |\varepsilon_n(s; x)| \leq \varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$; see [11, p.136].

Further the behaviors of $h(x)$ and $u(x)$ in the neighborhood of point $x = 1$ will be useful. It is known that

$$1 - h(x) \sim \sqrt{2(1 - x)/F''(1)}, \quad x \rightarrow 1; \quad (16)$$

see [11, p.126]. On the other hand, by means of Taylor expansion we will find out

$$F'(h(x)) \sim 1 - F''(1)(1 - h(x)), \quad x \rightarrow 1. \quad (17)$$

Considering together relations (3.6) and (3.7) gives

$$u(x) \sim 1 - \sqrt{2F''(1)(1 - x)}, \quad x \rightarrow 1. \quad (18)$$

4 Proof of the Main result

Let $\Psi_n(\lambda; \theta)$, $\lambda, \theta > 0$, be the Laplace transform of distribution of considered two-dimensional random variable $(W_n/\mathbf{E}W_n; S_n/\mathbf{E}S_n)$. Owing to formulas (3.1) and (3.2), we will be convinced of

$$\Psi_n(\lambda; \theta) \sim J_n(\lambda_n; \theta_n) = \lambda_n \theta_n^n \prod_{k=0}^{n-1} F'(H_k(\lambda_n; \theta_n)), \quad (19)$$

as $n \rightarrow \infty$, where $\lambda_n = \exp\{-\lambda/(\alpha - 1)n\}$ and $\theta_n = \exp\{-2\theta/(\alpha - 1)n^2\}$. We see that the term $\lambda_n \theta_n^n$ on

the right side of (4.1) tends to unity as $n \rightarrow \infty$. We are assured that $A_{kn}(\lambda; \theta) := F'(H_k(\lambda_n; \theta_n))$ is non-decreasing on k for fixed n and both $\lambda, \theta > 0$. Then using the inequality $\ln(1-x) \geq -x - x^2/(1-x)$, $0 \leq x < 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \ln \prod_{k=0}^{n-1} A_{kn}(\lambda; \theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\{1 - (1 - A_{kn}(\lambda; \theta))\} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} (1 - A_{kn}(\lambda; \theta)) + \rho_n^{(1)}(\lambda; \theta) \\ &= I_n(\lambda; \theta) + \rho_n^{(1)}(\lambda; \theta), \end{aligned} \quad (20)$$

where

$$I_n(\lambda; \theta) = - \sum_{k=0}^{n-1} (1 - A_{kn}(\lambda; \theta)), \quad (21)$$

and

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho_n^{(1)}(\lambda; \theta) &\geq - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[1 - A_{kn}(\lambda; \theta)]^2}{A_{kn}(\lambda; \theta)} \\ &\geq \frac{1 - A_{0n}(\lambda; \theta)}{A_{0n}(\lambda; \theta)} I_n(\lambda; \theta). \end{aligned} \quad (22)$$

It is easy to see that $1 - A_{0n}(\lambda; \theta) = 1 - F'(\lambda_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Then $\rho_n^{(1)}(\lambda; \theta) \rightarrow 0$, if $I_n(\lambda; \theta)$ has a finite limit as $n \rightarrow \infty$.

By Taylor expansion for $0 \leq x < 1$, we have

$$F'(t) = F'(t_0) - F''(t_0)(t_0 - t) + (t_0 - t)g(t_0; t), \quad (23)$$

where $g(t_0; t) = (t_0 - t)F'''(\tau)/2$ with $t < \tau < t_0$. Setting $t = H_k(\lambda_n; \theta_n)$ and $t_0 = h(\theta_n)$ in (4.5) and using the GF $\Delta_k(s; x)$, equation (4.3) becomes

$$\begin{aligned} I_n(\lambda; \theta) &= -[1 - F'(h(\theta_n))]n \\ &\quad - F''(h(\theta_n)) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(\lambda_n; \theta_n) \\ &\quad + \rho_n^{(2)}(\lambda; \theta), \end{aligned} \quad (24)$$

where

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho_n^{(2)}(\lambda; \theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(\lambda_n; \theta_n) g_{kn}(\lambda; \theta) \\ &\leq \Delta_0(\lambda_n; \theta_n) \sum_{k=0}^{n-1} g_{kn}(\lambda; \theta), \end{aligned} \quad (25)$$

since the inequality (3.4) takes place, and $g_{kn}(\lambda; \theta) := g(h(\theta_n); H_k(\lambda_n; \theta_n))$. Using the relation (3.6) we find out that

$$\Delta_0(\lambda_n; \theta_n) \sim \frac{\lambda - 2\sqrt{\theta}}{F''(1)n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

In view of (3.3) we see that $g_{kn}(\lambda; \theta) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Hence an arithmetical mean of these

expressions $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_{kn}(\lambda; \theta) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Then from (4.7) and (4.8) follows that the term $\rho_n^{(2)}(\lambda; \theta)$ approaches zero as $n \rightarrow \infty$. Therefore it follows by (3.6), (3.7) and (4.6) that

$$I_n(\lambda; \theta) \sim -2\sqrt{\theta} - F''(1) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(\lambda_n; \theta_n), \quad (27)$$

as $n \rightarrow \infty$. Now we observe the sum on the right side of (4.9). From (3.5)–(3.8) we easily may see that

$$\left| \Delta_k(\lambda_n; \theta_n) - \frac{4\sqrt{\theta}}{F''(1)n} \frac{\mu e^{-2k\sqrt{\theta}/n}}{(1 - e^{-2k\sqrt{\theta}/n}) \mu + 1} \right|$$

equal $O(1/n^2)$ as $n \rightarrow \infty$, where $\mu = (\lambda - 2\sqrt{\theta})/4\sqrt{\theta}$. So the second addendum in expression (4.9) we will transform in the following:

$$F''(1) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(\lambda_n; \theta_n) \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4\mu\sqrt{\theta} e^{-2k\sqrt{\theta}/n}}{(1 - e^{-2k\sqrt{\theta}/n}) \mu + 1} \frac{1}{n}.$$

The sum on right side of last equation can be recognized as an upper or a lower Darboux sum (depending on $\mu + 1 < 0$ or $\mu + 1 > 0$ respectively) of the Riemann integral

$$\int_0^1 \frac{4\mu\sqrt{\theta} e^{-2\sqrt{\theta}x}}{(1 - e^{-2\sqrt{\theta}x}) \mu + 1} dx = 2 \ln \left[(1 - e^{-2\sqrt{\theta}}) \mu + 1 \right].$$

So that finally we obtain

$$I_n(\lambda; \theta) \sim -2\sqrt{\theta} - 2 \ln \left[\frac{\lambda - 2\sqrt{\theta}}{4\sqrt{\theta}} (1 - e^{-2\sqrt{\theta}}) + 1 \right].$$

Having considered together (4.1), (4.2) and last relation, we complete the Theorem proof.

Список литературы

- [1] A. A. Imomov. On a form of condition of non-extinction of branching processes. *Uzbek Mathematical Journal*, 2:46–51, 2001. (in Russian).
- [2] A. A. Imomov. Some asymptotical behaviors of galton-watson branching processes under condition of non-extinctivity of it remote future. In *Abstracts of Comm. of 8th Vilnius Conference: Probability Theory and Mathematical Statistics*, page 118. Vilnius, Novosibirsk, 2002.
- [3] A. A. Imomov. A differential analog of the main lemma of the theory of markov branching processes and its applications. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57(2):307–315, 2005.
- [4] A. A. Imomov. Sq-processes as the galton-watson branching processes with immigration. In *Proceedings of IX FAMET Conference: Financial and Actuarial Mathematics and Eventconvergence of Technology*, pages 148–152. SFU, Krasnoyarsk, 2010 (in Russian).

-
- [5] A. A. Imomov. On markov analogue of q-processes with continuous time. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 84:58–64, 2011.
- [6] A. G. Pakes. On the critical galton-watson process with immigration. *Journal of Australian Mathematical Society*, 4:476–482, 1971.
- [7] A. G. Pakes. Some limit theorems for the total progeny of a branching process. *Advances in Applied Probability*, 3(1):176–192, 1971.
- [8] A. G. Pakes. Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration. *Stochastic Processes and its Applications*, 3:175–185, 1975.
- [9] A. G. Pakes. Limit theorems for the simple branching process allowing immigration, i. the case of finite offspring mean. *Advances in Applied Probability*, 11:31–62, 1979.
- [10] A. G. Pakes. Revisiting conditional limit theorems for the mortal simple branching process. *Bernoulli*, 5(6):969–998, 1999.
- [11] A. G. Pakes. Critical markov branching process limit theorems allowing infinite variance. *Advances in Applied Probability*, 42:460–488, 2010.
- [12] A. M. Yaglom. Some limit theorems of theory of branching random processes. *Reports of Academy of Sciences of USSR*, 13(8):795–798, 1947 (in Russian).
- [13] C. R. Heathcote. A branching process allowing immigration. *Journal of the Royal Statistical Society*, 27(1):138–143, 1965.
- [14] D. P. Kennedy. The galton-watson process conditioned on the total progeny. *Journal of Applied Probability*, 12(4):800–806, 1975.
- [15] J. Lamperti and P. E. Ney. Conditioned branching processes and their limiting diffusions. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 13:126–137, 1968.
- [16] K.B. Athreya, P.E. Ney. *Branching processes*. Springer, New York, 1972.
- [17] Sh. K. Formanov and A. A. Imomov. On asymptotic properties of q-processes. *Uzbek Mathematical Journal*, 3:175–183, 2011 (in Russian).
- [18] T.E. Harris. Some mathematical models for branching processes. In *In Proc. 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 305–328. 1951.
- [19] V. F. Kolchin. *Random mappings*. Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).

Axial function for elliptic acceptance set

Tatyana Kustitskaya

Siberian Federal University
Krasnoyarsk, Russia
m-tanika@yandex.ru

Abstract. *In this paper the model of generalized coherent risk measures is considered. Within the bounds of the model the elliptic acceptance set is examined. The axial function which reflects individual attitude to risk is studied.*

Keywords. *Generalized coherent risk measure, risk aversion, preference relation, elliptic cone, axial function.*

1 Introduction

We work in a probability space (Ω, \mathcal{A}, P) , where Ω is a reference set, \mathcal{A} - a σ -algebra specified on Ω , P - a probability measure, specified on the sets of \mathcal{A} .

Definition 1. *A Risk X on (Ω, \mathcal{A}) is any measurable mapping from Ω to \mathbf{R} .*

The set of all risks on (Ω, \mathcal{A}) we denote by \mathcal{X} .

Suppose that a preference relation \preceq on \mathcal{X} reflects an individual attitude to risk of a certain investor.

It can be represented by a real-valued functional. We work with the following representation:

$$\rho(X) \leq \rho(Y), \text{ if } X \preceq Y, \quad X, Y \in \mathcal{X} \quad (1)$$

A preference \preceq on \mathcal{X} is called risk averse if for all nonsingular risks $\Delta : E\Delta = 0$ and any $a \in \mathbf{R}$

$$a + \Delta \prec a. \quad (2)$$

In terms of risk measure the property of risk aversion can be written as

$$\rho(a + \Delta) < \rho(a).$$

For some preferences we can get a numerical characteristic of risk aversion.

In [3] it is shown that for the canonical risk measure ρ value of risk aversion $c_{a, \Delta}$ is a solution of

$$\rho(a + \Delta) = \rho(a - c). \quad (3)$$

2 Generalized coherent risk measures

Suppose that $|\Omega| = n$. Then $X = (x_1, \dots, x_n)$ is a vector from \mathbf{R}^n .

Also we introduce a norm $\|\cdot\|$ in \mathbf{R}^n .

We postulate that any acceptance set A satisfies the following axioms:

A1: $C_+ \subset A$, $C_+ = \{X \in \mathcal{X} : X \geq 0\}$

A2: $A \cap C_- = \emptyset$, $C_- = \{X \in \mathcal{X} : X < 0\}$

A3: A is a convex cone (if $X \in A$, $Y \in A$, then $\alpha_1 X + \alpha_2 Y \in A$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$).

A *generalized coherent risk measure* f_A , associated with A is determined by

$$f_A(X) = f_{A, \|\cdot\|}(X) = \delta_A(X) \inf_{Y \in \partial A} \|X - Y\|, \quad (4)$$

$$\delta_A(X) = \begin{cases} 1, & X \in A, \\ -1, & X \in A^c, \end{cases}$$

where ∂A is a boundary of A .

The functional $f_A(X)$ exhibits the following properties:

M) monotonicity:

$$f_A(X) \leq f_A(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}, X \leq Y;$$

PH) positive homogeneity:

$$f_A(\lambda X) = \lambda f_A(X), \quad \forall \lambda \geq 0, X \in \mathcal{X};$$

S) superadditivity:

$$f_A(X + Y) \geq f_A(X) + f_A(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X};$$

Sh) shortcut property:

$\forall X \in \mathcal{X} \exists X'(X) \in \partial A$ that
 $\|X - X'(X)\| = \inf_{Y \in \partial A} \|X - Y\|$ and

$$f_A(X + \lambda u(X)) = f_A(X) + \lambda, \quad -\infty < \lambda \leq \lambda_A(X),$$

$$\text{where } \lambda_A(X) > 0, \quad u(X) = \delta_A(X) \frac{X - X'_A(X)}{\|X - X'_A(X)\|}$$

It is obvious that the classical coherent risk measure [1] is a particular case of generalized coherent risk measures corresponding to the norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

For generalized coherent risk measure $f(X)$

$$c_{0, \Delta} = \frac{f(\Delta)}{f(-I)}. \quad (5)$$

3 Elliptic acceptance set

Consider a set

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X^i - (P, X)np_i)^2}{r^2(p_i)} \leq (P, X)^2, \quad (6)$$

$$X = (X^1, \dots, X^n) \in \mathbf{R}^n$$

and suppose that it satisfies the following conditions:

$$(P, X) \geq 0; \quad (7)$$

$$r(p) \geq \sqrt{\frac{n}{p^2} + n^3 p^2} \quad (8)$$

Theorem 1. *The set A , determined by inequality (6), is an acceptance set for some preference.*

Proof

For A to be an acceptance set it is sufficient to satisfy Axioms **A1-A3**.

1. First we prove that A satisfies **A2**: $A \cap C_- = \emptyset$. Consider an arbitrary $X \in C_-$

$$X^i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow (P, X) < 0,$$

therefore, X doesn't satisfy (7).

2. Then we prove **A3**: A is a convex set.

Let $X \in A$. Then $(P, X) = a > 0$ and

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X^i - anp_i)^2}{r^2(p_i)} \leq a^2 \quad (9)$$

The set $\{Y : (P, Y) = a\}$ also satisfies (9) and it forms a n -dimensional ellipsoid E_a , which is a convex set.

Suppose that $X' = \lambda X$, $\lambda \geq 0$. Then $(P, X') = \lambda a$. X' also belongs to A (It can be verified by substituting in(6)).

Moreover, it belongs to the ellipsoid $E_{\lambda a}$

$$\frac{(X^1 - \lambda anp_1)^2}{r^2(p_1)} + \dots + \frac{(X^n - \lambda anp_n)^2}{r^2(p_n)} \leq \lambda a^2, \quad (10)$$

like all other vectors $Y' = \lambda Y$, $Y \in E_a$. Hence, A is a cone and all its hyperplane sections $(P, X) = a$, $a > 0$ are ellipsoids.

Therefore, A is a convex set.

3. At last we prove **A1**: $C_+ \subset A$.

Consider the basis $e = \{e_i, i = 1, \dots, n : e_i^i = 1, e_i^j = 0\}$.

Any vector $X \in C_+$ can be represented as a convex linear combination of the elements of the basis e :

$$X = X^1 e_1 + X^2 e_2 + \dots + X^n e_n, \quad X^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Since Axiom **A3** is satisfied, we can assert that $C_+ \subset A$, if $e_i \in A \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Then we prove that $e_1 \in A$ (for the rest e_i the proof is similar). Substitute coordinates of e_1 in (6):

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - np_1^2)^2}{r^2(p_1)} + \frac{(np_1 p_2)^2}{r^2(p_2)} + \dots + \frac{(np_1 p_n)^2}{r^2(p_n)} = \\ & = \frac{1 - 2np_1^2 + n^2 p_1^4}{r^2(p_1)} + n^2 p_1^2 \left(\frac{p_2^2}{r^2(p_2)} + \dots + \frac{p_n^2}{r^2(p_n)} \right) \leq \\ & \leq \frac{1 - 2p_1^2 + n^2 p_1^4}{\frac{n}{p_1^2} + n^3 p_1^2} + \\ & + n^2 p_1^2 \left(\frac{p_2^2}{\frac{n}{p_2^2} + n^3 p_2^2} + \dots + \frac{p_n^2}{\frac{n}{p_n^2} + n^3 p_n^2} \right) \leq \\ & \leq \frac{p_1^2 (1 - 2np_1^2 + n^2 p_1^4)}{n(1 + n^2 p_1^4)} + n^2 p_1^2 \left(\frac{p_2^2}{n^3 p_2^2} + \dots + \frac{p_n^2}{n^3 p_n^2} \right) \leq \\ & \leq \frac{p_1^2}{n} + n^2 p_1^2 \frac{n-1}{n^3} = p_1^2 = (e_1, P)^2 \end{aligned}$$

Hence, $e_j \in A \quad j = 1, \dots, n$, thus, $C_+ \subset A$.

4 Spherical cone

Consider $P = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$. Let the norm in \mathcal{X} be Euclidean ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$).

Substituting P in (6), we get the following inequality for A_P :

$$(X^1 - (P, X))^2 + \dots + (X^n - (P, X))^2 \leq (P, X)^2 r^2(1/n).$$

By I we denote the unit vector $(1, \dots, 1)$, and by r_0 the following form $r_0 = r(1/n)$.

Combining this with (4), we obtain

$$\|X - (P, X)I\| \leq (P, X)r_0$$

$$\left\| X - \frac{(I, X)}{n} I \right\| \leq \frac{(I, X)}{n} r_0, \quad (I, X) \geq 0. \quad (11)$$

All sections of the cone by hyperplanes $(I, X) = a$ are n -dimensional spheres of radius $(I, X)r_0/n$.

An acceptance cone is called a **spherical cone** if it is defined by (11).

In [2] it is proved that the value of risk aversion for the preference, determined by (11) can be evaluated as

$$c_{0,\Delta} = \frac{1}{\sqrt{n + r^2(1/n)}} \quad (12)$$

Therefore,

$$r\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{1 - nc_{0,\Delta}^2}}{c_{0,\Delta}} \quad (13)$$

5 Some classes of axial functions

It follows from (6) that the function $r(p)$ is a parameter of a cone which determines an individual attitude to risk. It also determines how the attitude to risk changes depending on the changes of the probability measure.

It is also reasonable to assume that $r(p)$ is monotonically decreasing on $[0, 1]$.

One of the ways to define an individual preference by an elliptic acceptance cone is to take $r(p)$ from some class of one-parameter functions (that satisfies (8) and evaluate the parameter according to the previous decisions of the individual.

Another way can be the following: we can firstly choose a class of functions and then evaluate the parameter using (13).

Assume that $r_m^1(p) = m\sqrt{\frac{n}{p^2} + n^3}$ is an axial function. It obviously satisfies (8). Consider two representatives of this class:

$$r_1^1(p) = \sqrt{\frac{n}{p^2} + n^3}, \quad r_{10}^1(p) = 10\sqrt{\frac{n}{p^2} + n^3}.$$

As $r_1(p) \leq r_2(p) \forall p \in [0, 1]$ we get that an individual whose preferences are determined by the function $r_1(p)$ is more cautious than an individual whose preferences are determined by $r_2(p)$.

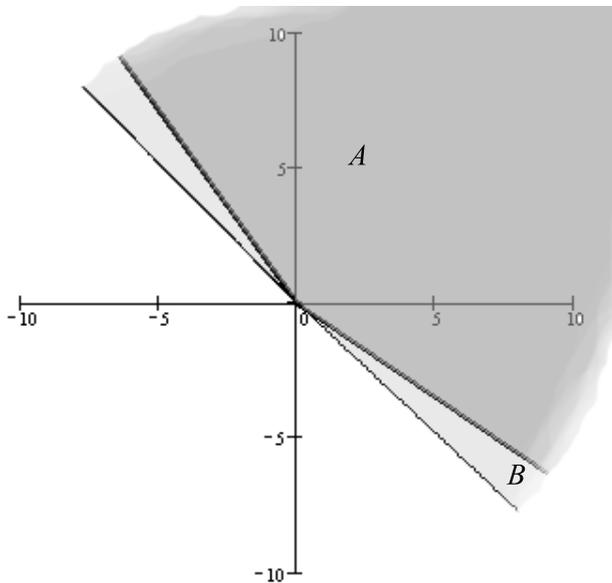


Fig. 1: Acceptance cones A and B corresponded to functions $r_1^1(p)$ and $r_{10}^1(p)$

On Figure 1 we see acceptance cones for the case of two-dimensional space and $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. A is an elliptic acceptance cone corresponded to r_1^1 , and B corresponds to r_{10}^1 . Note that $A \subset B$.

To determine different types of dependence of attitude to risk on probability we can introduce some classes of axial functions:

$$1) r_m^1(p) = m\sqrt{\frac{n}{p^2} + n^3}, \quad m \geq 1;$$

$$2) r_m^2(p) = \sqrt{\frac{n}{p^m} + n^3}, \quad m \geq 2;$$

$$3) r_m^3(p) = m\sqrt{\frac{n}{\ln^2(p+1)} + n^3}, \quad m \geq 1.$$

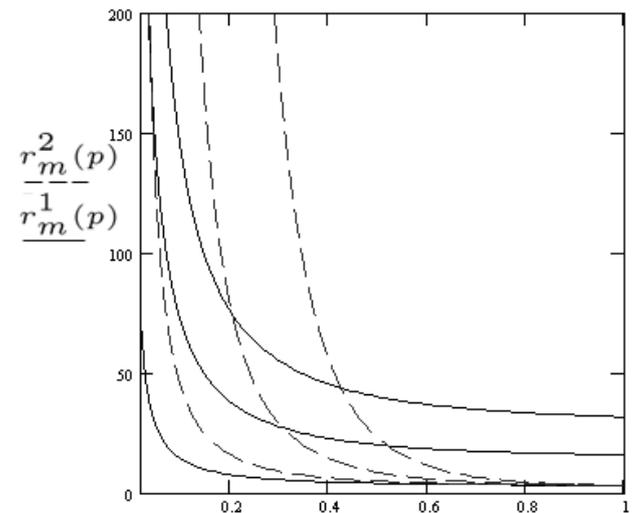


Fig. 2: Two classes of axial functions: $r_m^1(p)$ and $r_m^2(p)$

On Figure (2) we see that representatives of the class r_m^1 provide an even narrowing of the cone in the direction of i coordinate simultaneously with the growth of p_i . The function r_m^2 provides a sharp narrowing.

Список литературы

- [1] Artzner Ph., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228, 1999.
- [2] Kustitskaya T. Acceptance cone for some preferences. *Proceedings of the X International FAMES'2011 Conference / Oleg Vorobyev ed. - Krasnoyarsk, KSTEI, SFU*, pages 192–196, 2011.
- [3] Novosyolov A.A. Risk aversion: qualitative approach and quantitative assessments. *Automatics and telemechanics*, 7:165–177, 2003.

Visualization and technology

Vera W. de Spinadel

Centre of Mathematics & Design MAyDI
 University of Buenos Aires, Argentina
 E-mail: vspinade@fibertel.com.ar
 Internet: http://www.maydi.org.ar

Abstract. *The purpose of this presentation is to show how the visualization obtained with the actual mathematical/informatic tools, such as computerized graphics, constitute an essential element in the application of mathematical concepts in the research of many subjects, from fractal structures, knots, transition to chaos up to the most general topological transformations.*

Keywords. *Fractals, chaos, strange attractor, logistic equation.*

1. INTRODUCTION

Since the first manifestations of men, Mathematics has been one of the basic tools in the creation and technological execution of many objects, through different epochs and styles.

In architectonic design, for example, the volume design has followed patterns derived from Euclidian Geometry, while the decorative elements in buildings and monuments, were generated following processes of repetition, homotecy and symmetry.

To obtain more aesthetic and harmonic proportions, the well known Golden Mean $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ has been used in numerous artistic and constructive processes, as well as its rational approximations that are ratios of two consecutive terms of the Fibonacci secondary sequence

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (1.1)$$

where each term is the sum of the two precedent ones. Similarly, other members of the Family of Metallic Means [1] like the Silver Mean, the Bronze Mean, the Copper Mean, the Nickel Mean, etc., satisfy common mathematical properties that give them a great importance in the actual research about the stability of macro- and micro- non linear dynamical systems, being used also as the base of many proportion systems. Painting has also adopted mathematical rules to enrich the compositions, beginning with the deepness sensation through perspective, in which parallel lines cut in the infinite point. Also sculpture has used numerous concepts from the euclidian geometry as well as from non euclidian geometries, non oriented surfaces, knots and interlaced figures (see the Doctorate Thesis about Mathematical Sculpture at the Valencia University, Spain [2]).

Today, the available computer systems provide really new ideas to increase creativity in every science. That is the reason to analyze the growing use of visualization in the use of mathematical concepts, specially the influence of the computerized graphics trying to explain phenomena that include from the surfaces formed by the soap bubbles, fractal structures, phyllotactic schema, the variation of the prices at the Stock Exchange, knots and the transition to chaos up to hyperbolic spaces (non euclidian) and the most general topological transformations.

2. CHAOS IN ECONOMY

The classical deterministic model of economical growth, as is well known, is based in three elements:

1. an equation relating the neat rate of births of the population with the income;
2. a production function describing the “**immediate labor product**”;
3. a distribution function defining the labor salaries.

This model is a non linear dynamic system that may exhibit “**chaos**” if it depends sensibly of the initial values. Obviously, to attempt the mathematical analysis of non linear dynamic systems, it is necessary to use solving approximate methods that are, generally, iterative. More precisely, a dynamic system that describes the variation of a certain function with time, depends of the initial values if given two initial values sufficiently close, the two iterated sequences by them generated, are notable separated. To detect chaos, we have to introduce two concepts:

- a. the set of all the attractors in a dynamic system is called the “**attractor**” S;
- b. a dynamic system is called transitive if when the initial value is near to some point of the attractor S, then the sequence of iterates is near every point of S.

A dynamic system that is transitive, shows dependence of the initial values and possesses repellent cycles near the attractor S, exhibits chaos and the attractor is called a “**strange attractor**”. In other words, a dynamic system shows chaos if in one sense there is unpredictability (changing the initial values, nothing can be predicted) but in another sense there is predictability (in some moment, the trajectory will reach the strange attractor but we do not know when...).

The marvellous field of qualitative behaviors inherent to the classical model and the evolution to chaos, can be analyzed when a production function is introduced. A reasonable production function is given by the following non linear expression

$$f(P) = AP^b(1 - P)^d, \quad (2.1)$$

in which the term AP^b represents the production function and the term $(1 - P)^d$ is a factor of reduction of the productivity produced by a concentrated surplus of population. Let us assume, for simplicity, that $b = d = 1$. Then the production function is given by the quadratic function

$$f(P) = AP(1 - P) \quad (2.2)$$

that is called the “**logistic equation**”, discovered by Pierre F. Verhulst (1804-1849) studying the dynamic of populations [3]. This quadratic equation that describes a non linear dynamic system of economic growth, can be solved iteratively, taking as time unity a generation of 25 years. The results obtained are the following: for $A < A_\infty = 3,5699456\dots$, the iterates $f^{(n)}(P)$ with $0 \leq P \leq 1$ are periodic with a period of length 2^m . For $A = A_\infty$ the iterates are aperiodic and converge to a “**strange attractor**”.

In this case, the strange attractor is a ternary point Cantor set [4], Figure 1, modified in the sense that it is a stochastic distribution with a probability of appearance assigned to each every third in the iteration. This distribution is called a multi-scalar fractal since the original object (a segment of unitary length) is divided into N parts that are not all equal.

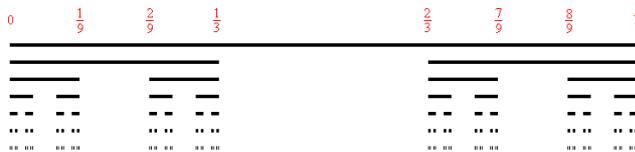


Fig. 1 – Cantor set

This set is asymptotically modelized through a generator with two intervals of different lengths $A_1 = 0,408$; $A_2 = A_1^2$ and equal probabilities $p_1 = p_2 = 0,5$. The fractal dimension D (that is a quantitative measure of the irregularity of the fractal structure) of this model of attractor is given by the equation corresponding to multi-scale fractals (see [5]), applied to this case of a two-scale fractal:

$$A_1^D + A_2^D = 1. \quad (2.3)$$

Operating, it results $A_1^D + (A_1^D)^2 - 1 = 0$ which positive solution is

$$A_1^D = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618\dots$$

a number that is called by physicists the Golden Mean because they work in the unitary interval, reducing all the values mod 1. Notice that $0,618\dots = 1/\phi$. Then

$$D = \frac{\log 0,618}{\log 0,408} \cong 0,537$$

that represents the point of maximum value of the logistic parable. In Fig. 2 the multifractal spectra of iterates of the logistic equation in the point of accumulation of duplication of periods is represented [6].

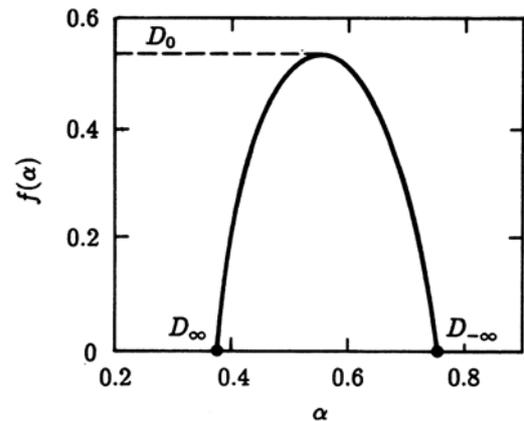


Fig. 2 – Logistic parable

It is interesting to mention that the logistic equation, solved iteratively, presents bifurcations of duplication of period, as can be seen at Fig. 3, that are universal paths of transition to chaos. This means that this complicated behavior is quite common in many physical, ecological and economic systems that are not related among them.

The analysis and search of these universals paths of transition to chaos, that are generally of fractal origin, is one of the more important subjects in the actual scientific development. Fractals and chaos are present many times together, even when they denote different processes.

An object is called a “**fractal**” in relation to its geometry, that means, when its border, its surface or its internal

structure show a constitution that amplified and amplified until infinite, is always invariant.

Instead, a process is chaotic with respect to its dynamics, that is, when it is impossible to make any type of prognosis about its evolution since initial conditions very similar produce behaviors of the system that are completely different. First, it is necessary to geometrize the dynamics of the system if one wants to relate both concepts. However, with computerized graphics, it is possible to detect fractal structures that are universal scenarios of the transition to chaos.

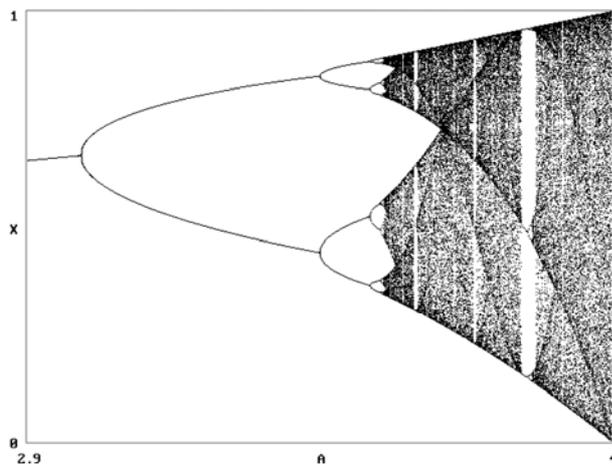


Fig. 3 – Bifurcations of duplication of period

References

- [1] Vera W. de Spinadel (2004), “*La Familia de Números Metálicos*”, cuadernos del CIMBAGE Nro. 6, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, pp. 17-45, ISSN 1666-5112.
- [2] Ricardo Zalaya Báez y Javier Barrallo Calonge (2007), “*La Escultura Matemática y su clasificación*”, Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, España, ISBN 84-8363-044-3.
- [3] P.-F. Verhulst (1845), “*Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*”, *Nouv. Mém. De l'Acad. Roy. Des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles* XVIII 8, pp. 1-38.
- [4] Vera W. de Spinadel, Jorge G. Perera y Jorge H. Perera (1993), “*Geometría Fractal*”. Second Edition extended and corrected, with a CD containing the source codes, Editorial Nueva Librería, ISBN 978-987-1104-45-1(2007).
- [5] Vera W. de Spinadel (1998), “*From the Golden Mean to Chaos*”, book edited by Nueva Librería ISBN 950-43-9629-1. 2nd. edition 2004 Nobuko, ISBN 987-1135-48-3. 3rd. Edition Nueva Librería, June 2010, ISBN 978-987-1104-83-3.
- [6] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia y B. I. Shraiman [1986], “*Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets*”, *Phys. Rev.*, **A33**, pp. 1141-1151.

Некоторые обобщенные формулы и их рациональные применения к решению задач по теме “Проценты”

Рагиб Зейнал оглы Абасов

Азербайджанская государственная нефтяная Академия
Баку
Rahib-55@mail.ru

Аннотация. *Выявление и развитие математических способностей учащихся и повышения их интереса к самостоятельной творческой работе в математике является одной из важных задач современных средних школ. При этом основным показателем считается умение находить нужное обобщение и рациональное решение рассмотренных задач, а также сделать анализ математических фактов. Для этого не требуется специальное математическое дарование, достаточно, чтобы учитель всегда поддерживал творческую активность ученика, предлагая ему соответствующие задания. А таких задач в школьной математике достаточно, поскольку любой математический вопрос можно углублять неограниченно и учитель может в каждой теме требовать от своих учеников рациональных обобщений, доступных для них. Одной из таких тем может оказаться тема “Проценты”.*

Ключевые слова. *Обобщение, проценты, отношение, рациональное решение.*

Программа по школьной математике, устроена таким образом, что тема “Проценты” изучается в младших классах, где, собственно говоря, серьезной математики еще нет и к задачам по этой теме, к сожалению, не возвращаются в старших классах. В результате, углубленные задачи на проценты часто вызывают затруднения у учащихся. Думаем, что и по этой причине, даже опытные математики не ставили вопрос об обобщенных формулах для рационального решения задач на проценты. В результате каждая задача, на проценты решается стандартно, с помощью характерных вычислений, т.е. без применения соответствующей обобщенной формулы. И для другой задачи подобного типа этот же механизм вычисления повторяется. Думаем, что после решения достаточного количества задач одного и того типа, когда ученики уже полностью поняли сущность рассмотренной задачи, если не будем пытаться найти соответствующую обобщенную формулу, то потом трудно будет привлечь внимание учащихся к самостоятельной работе о рациональных способах решения. А вдохновлять ученика к творчеству – это и является главной задачей нынешней школы. Противоречие налицо, что делать?

Вообще говоря, школьное изучение темы “Проценты” привлекало внимания многих математиков разных времен и по разным вопросам. Взгляды, советы, подходы к этой теме разные [1-6]. Но, независимо от всего этого сделать рациональные обобщения всегда является

полезным делом для быстрого и эффективного решения задач определенного типа.

Учитывая все сказанное, думаем что, на факультативных занятиях в старших классах можно рассмотреть специальную тему об обобщенных формулах по теме “Проценты”.

В данной работе без доказательства мы приводим несколько таких формул, укажем их эффективное применение и сделаем некоторый анализ по этим формулам.

Ученики с помощью своего учителя легко могут доказать справедливость этих формул и найти задачи где можно эффективно их применять.

Задача 1. На сколько процентов число b меньше a , если число a больше b на $p\%$.

$$\text{Ответ: } \frac{100p}{100+p} \% \quad (1)$$

Например, если a больше b на 10% , то b меньше a на $\frac{100 \cdot 10}{100+10} = 9\frac{1}{11}\%$.

Задача 2. На сколько процентов число b меньше a , если число a меньше чем b на $p\%$.

$$\text{Ответ: } \frac{100p}{100-p} \% \quad (2)$$

Эти же задач можно соответственно сформулировать еще следующим образом.

Задача 3. Число b увеличили на $p\%$. На сколько процентов надо уменьшить полученное число, чтобы получить данное число b ?

$$\text{Ответ: } \frac{100p}{100+p} \% \quad (3)$$

Задача 4. Число b уменьшили на $p\%$. На сколько процентов надо увеличить полученное число, чтобы получить данное число b ?

$$\text{Ответ: } \frac{100p}{100-p} \% \quad (4)$$

Задача 5. Число увеличили на $p\%$, а результат увеличили на $q\%$. На сколько процентов увеличено данное число?

$$\text{Ответ: } \left(p + q + \frac{pq}{100} \right) \% . \quad (5)$$

Задача 6. Число сначала уменьшили на $p\%$, а результат уменьшили на $q\%$. На сколько процентов уменьшено данное число?

$$\text{Ответ: } \left(p + q - \frac{pq}{100} \right) \% . \quad (6)$$

Задача 7. Число увеличили на $p\%$, а результат уменьшили на $q\%$. На сколько процентов и в каком смысле изменено данное число?

$$\text{Ответ: } \left(p - q - \frac{pq}{100} \right) \% . \quad (7)$$

Замечание 1. При конкретных значениях p и q здесь можно получить разные ответы. Если в результате получится положительный процент, это означает, что после этой операции данное число увеличилось настолько же процентов. Если получится отрицательный процент – значит, данное число уменьшилось настолько же процентов. И, наконец, если получится нуль – значит, после этой операции данное число не изменилось.

Задача 8. Число уменьшили на $p\%$, а результат уменьшили на $q\%$. На сколько процентов и в каком смысле изменено данное число?

$$\text{Ответ: } \left(q - p - \frac{pq}{100} \right) \% . \quad (8)$$

Замечание 2. Если в последних двух формулах примем $p = q$, то в обоих случаях получим один и тот же ответ:

$$-\frac{p^2}{100} \% . \quad (9)$$

Это означает, что нет разницы, если сначала увеличить число на $p\%$, а потом уменьшить на $p\%$ или, наоборот, всегда данное число уменьшается на $\frac{p^2}{100} \%$.

Пример. Если число увеличили на 14% , а потом результат уменьшили на 14% (или наоборот), то в результате данное число уменьшится на $\frac{14^2}{100} \% = 1,96\%$.

Задача 9. Сколько процентов составляет число b от числа a , если число a составляет на $p\%$ от числа b .

$$\text{Ответ: } \frac{100^2}{p} \% . \quad (10)$$

Задача 10. Число a составляет $p_1\%$ от числа b_1 , b_1 составляет $p_2\%$ от, и так далее, b_{n-1} составляет $p_n\%$ от b_n . Сколько процентов составляет число a от числа b_n ?

$$\text{Ответ: } \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}{100^{n-1}} \% .$$

В числе текстовых задач на проценты особое место занимают задачи на смеси, растворы и сплавы, называемые еще задачами на процентное содержание или концентрацию. В таких задачах, говоря о смесях, растворах и сплавах, будем употреблять общий термин “смесь” независимо от ее вида. Смесь состоит из “чистого вещества” и “примеси”. “Чистое вещество” определяется в каждой задаче отдельно, и при этом все остальные вещества, составляющие смесь, относят к примеси. Долей (α) чистого вещества в смеси называется отношение количества чистого вещества (m) в смеси к общему количеству (M) смеси, т.е.

$$\alpha = \frac{m}{M} .$$

После этого в [2] устанавливаются основные этапы решения задач, и в конце составляется уравнение, которое содержит неизвестные m, M, α , а также составляют нужную таблицу вычисления.

Но думаем, что такая постановка решения задач на проценты эффективна в младших классах, чтобы ученики глубоко поняли сущность решаемых задач. Но, всё-таки, после полного осознания сущности решаемых задач появится желание об обобщенных формулах для решения этих задач, чтобы каждый раз не повторять стандартные этапы вычисления. Поэтому мы продолжили разговор об обобщенных формулах для решения задач на проценты и укажем еще несколько таких формул.

Задача 11. Имеем m литров (l) смеси с процентным содержанием чистого вещества. Сколько литров пресной воды нужно добавить, чтобы получилась смесь с $q\%$ чистого вещества ($p > q$)?

Ответ: $\frac{m(p-q)}{q} l$. (11)

$$b = a - \frac{20 \cdot a}{100}.$$

Пример. Сколько литров пресной воды нужно добавить к 10l 70%-ной смеси, чтобы получить 40%-ную смесь?

Пусть теперь a больше b на $x\%$, тогда, приняв за 100 % число b , найдем

Решение: $\frac{m(p-q)}{q} = \frac{10 \cdot (70-40)}{40} = 7,5l$.

$$a = b + \frac{x \cdot b}{100}.$$

Задача 12. Имеем $m l$ смеси с процентным содержанием чистого вещества $p\%$. Сколько литров $r\%$ -ной смеси нужно добавить, чтобы получилось $q\%$ -ная смесь?

Из этих двух равенств следует такое:

Ответ: $\frac{m(p-q)}{q-r} l$. (12)

$$a = \left(a - \frac{20 \cdot a}{100} \right) + \frac{x}{100} \cdot \left(a - \frac{20 \cdot a}{100} \right).$$

Решая это уравнение относительно x , получим:

Ясно, что при $r = 0$ получится формула (11).

$$x = 25\%.$$

Задача 13. Имеем $m l$ $p\%$ -ной смеси. Сколько литров воды нужно выпарить, чтобы получить $q\%$ -ную смесь ($q > p$)?

Из этой схемы решения следует, что если вместо 20% было задано другое число (процент), то для решения задачи мы должны были повторять всю схему решения. Конечно, это неэффективно в практических целях. Поскольку такие задачи имеют стандартный характер, то выгодно доказать соответствующую обобщенную формулу.

Ответ: $\frac{m(q-p)}{q} l$.

Если применим формулу (2) то сразу получим ответ:

Ясно, что задачи с номерами 11 и 13 взаимно обратные по содержанию. Это видно также в соответствующих ответах.

$$x = \frac{100p}{100-p} = \frac{100 \cdot 20}{100-20} = 25\%.$$

Список подобных обобщенных формул можно продолжить, рассматривая новые задачи на проценты. Еще раз отметим, что для доказательства этих формул эффективно можно привлечь внимание учащихся старших классов, заинтересованных исследовательской работой.

Пример 2. На сколько процентов увеличится реальная стоимость зарплаты, если все цены промышленных и продовольственных товаров уменьшатся на 25%?

Но, теперь рассмотрим несколько конкретных задач, где эффективно применяются вышеуказанные обобщенные формулы. Рассмотренные здесь задачи подобраны из конкретных статей и даже учебников. Поэтому, при анализе этих задач сначала излагается (может и неполно) авторское решение, а потом применяется соответствующая вышеуказанная формула.

В [1] автор, принимая несколько обозначений, после долгих вычислений, приходит к результату: $33\frac{1}{3}\%$.

Пример 1. [3] На сколько процентов число a больше b , если b меньше a на 20%?

Анализ показывает, что если вместо 25% взяли бы $p\%$ и повторяли бы всю схему вычисления, по которой действовал автор в [1], то можно было прийти опять к формуле (2) в задаче 2, хотя эти две задачи могут нам показаться задачей разного характера:

$$x = \frac{100p}{100-p} = \frac{100 \cdot 25}{100-25} = 33\frac{1}{3}\%.$$

Авторское решение: По условию b меньше a на 20%. Значит, приняв a за 100%, для b получим:

Пример 3 [4].

а). Высоту прямоугольной коробки увеличили на 10%, а ее длину и ширину не изменили. На сколько процентов увеличился объем коробки?

- б). Длину и ширину прямоугольной коробки уменьшили на 10%, а высоту не изменили. На сколько процентов уменьшили объем коробки?
- в). Длину прямоугольной коробки увеличили на 10%, ширину уменьшили на 10%, а высоту не изменили. Изменился ли объем коробки? Если да, то как?

Автор этой задачи не дает полное решение, вместе с тем считает эти задачи олимпиадного характера.

Легко доказать, что произведение нескольких положительных чисел изменится на $p\%$, если только один сомножитель изменится на $p\%$, причем характеры изменения одинаковы. Поэтому в пункте а) ответ будет 10%, поскольку объем коробки вычисляется по формуле $V = a \cdot b \cdot c$, где a, b и c - длины сторон коробки.

Если изменятся только два сомножителя, то можно применять формулы (5) – (9). В частности, если увеличены две стороны коробки, то применяется формула (5):

$$p + q + \frac{pq}{100} = 10 + 10 + \frac{10 \cdot 10}{100} = 21\% .$$

И, наконец, если один из сомножителей увеличили на $p\%$, а другой уменьшили на $p\%$, то надо применять формулу (9). И поэтому, в пункте в) получим

$$-\frac{p^2}{100}\% = -1\% ,$$

т.е. в данном случае объем коробки уменьшится на 1%.

Пример 4. [6]. В одном городе Канады 70% населения могут говорить по-французски, а 80% по-английски. Сколько процентов населения этого города могут говорить на этих двух языках.

Автор этой задачи предложил два способа решения – алгебраический и геометрические методы. Оба эти методы красивы, но что нам мешает в конце такой простой задачи найти соответствующую обобщенную формулу: если $p\%$ говорит на одном языке, а $q\%$ на другом ($(p + q > 100)$), то

$$(p + q - 100)\%$$

населения могут говорить на этих двух языках (в таких задачах предполагается, что каждый житель этого города может говорить хотя бы на одном языке).

Пример 5. [2]. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

Авторское решение:

- 1) Пусть требуется добавить x кг пресной воды.
- 2) За чистое вещество примем соль. Тогда морская вода – это смесь с 5%-ным содержанием чистого вещества, пресная вода – с 0%-ным содержанием чистого вещества.
- 3) Переходя к долям, получаем, что доля соли в морской воде составляет 0,05, доля соли в пресной воде равна 0, доля соли в смеси, которую нужно получить, - 0,015.
- 4) Происходит соединение смесей по следующей таблице:

Состояние смеси	m (кг)	M (кг)	α
1	$0,05 \cdot 30$	30	0,05
2	$0 \cdot x$	x	0
3	$0,05 \cdot 30$	$30+x$	0,015

- 5) Исходя из третьей строки этой таблицы, составим уравнение $m = \alpha M$: $0,05 \cdot 30 = 0,015(30 + x)$.

6) Решаем полученное уравнение и находим $x = 70$ кг. Конечно, такое подробное решение насколько разборчиво, настолько и не практично. Потому, что если данные числа в условии этой задачи изменятся, то для ее решения придется повторять всю схему решения полностью.

Но, если использовать обобщенную формулу (11), то сразу получим

$$x = \frac{m(p - q)}{q} = \frac{30 \cdot (5 - 1,5)}{1,5} = 70 \text{ кг.}$$

И, наконец, последний пример возьмем из учебника [5].

Пример 6. Стороны прямоугольника увеличились на 10%. На сколько процентов увеличится его площадь.

Авторское решение.

Пусть a – длина и b – ширина этого прямоугольника. Находим стороны нового прямоугольника: длина – $a + \frac{a}{100} \cdot 10 = 1,1 a$; ширина – $b + \frac{b}{100} \cdot 10 = 1,1 b$. Тогда

площадь нового прямоугольника будет $1,1a \cdot 1,1b = 1,21ab$. По известной формуле находим, на сколько процентов увеличилась площадь данного прямоугольника:

$$\frac{1,21ab - ab}{ab} \cdot 100\% = 21\%.$$

Ясно, что если в таких задачах вместо 10% зададим другое число (процент), то пришлось бы повторять все вычисления заново.

Здесь целесообразно применять формулу (5) при $p = q = 10\%$:

$$p + q + \frac{pq}{100} = 10 + 10 + \frac{10 \cdot 10}{100} = 21\%.$$

В этом учебнике аналогичными вычислениями решается и следующая задача: длина прямоугольника увеличилась на 20%, а ширина уменьшилась на 10%. На сколько процентов и в каком смысле изменилась площадь прямоугольника

Замечание 3. Поскольку площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = a \cdot b$, то процентное изменение площади прямоугольника фактически не зависит от того, какие именно стороны прямоугольника и на сколько процентов изменятся (в любом варианте).

В каждом варианте для решения подобных задач можно применять соответствующую формулу из (5) – (9). Учитывая замечание 3, необходимо сделать корректировку в условиях подобных задач, которые встречаются в разных источниках.

Также ясно, что процентное изменение площади квадрата и круга ($S = a^2$; $S = \pi \cdot r^2$) можно найти, применив формулу (5) – (9). Например, если радиус круга увеличился на 10%, то его площадь увеличится на $10 + 10 + \frac{10 \cdot 10}{100} = 21\%$ (в формуле (5) принимаем $p = q = 10\%$).

Учитывая все сказанное в этой статье, приходим к выводу: необходимо пересмотреть программу школьного курса по теме “Проценты”.

Заключение

В данной работе приводятся несколько обобщенных формул по теме “Проценты”. Далее, указываются некоторые их рациональные применения к решению задач на проценты.

Литература

- [1] О.О. Барабанов. *Задачи на проценты как проблема нормы словоупотребления*. Математика в школе, 5: 50-60, 2003.
- [2] М.И. Водинчар, Г.А. Лайкова, Ю.К. Рябова. *Решение задач на смеси, растворы и сплавы методом уравнений*. Математика в школе, 4: 56-62, 2001.
- [3] А.Р. Рязановский. *Задачи на части и проценты*. Математика в школе, 1: 18-22, 1992.
- [4] А.В. Шевкин. *Еще раз об изучении процентов*. Математика в школе, 1: 20-22, 1993.
- [5] М. Марданов и др. *Математика. Учебник 6-го класса*. Баку, с. 225, 2002. (на азерб. языке).
- [6] «Квант» для младших школьников: Математика 6-8, М.: Бюро Квантум, с.32-37, 1988.

Полупараметрическое оценивание условной функции выживания в регрессионной модели при случайном цензурировании с двух сторон

Абдурахим Ахмедович

Абдушукуров

Национальный Университет Узбекистана,

Ташкент

a_abdushukurov@rambler.ru

Фархад Абдижалиевич

Абдикаликов

Национальный Университет Узбекистана,

Ташкент

Аннотация. В информативной модели регрессии при случайном цензурировании с двух сторон построена степенная оценка для условной функции выживания. Исследованы асимптотические свойства оценки.

Ключевые слова: непараметрическая регрессия, информативное случайное цензурирование, степенная оценка, функция выживания.

1. Введение

Пусть случайная величина (с.в.) Z находится под влиянием другой с.в. X . В медико-биологических исследованиях Z соответствует времени жизни индивидуума, X - дозе лекарства, а в промышленных опытах эти с.в. соответствуют времени безотказной работы технического устройства и напряжению (давлению и температуре) которому подвергается это устройство. В таких практических ситуациях задача состоит в оценке функции выживания испытываемого объекта при заданном значении фактора влияния (ковариаты) X . Однако, как правило в таких случаях с.в. Z полностью не наблюдаема и может быть цензурирована. Такую задачу впервые при случайном цензурировании справа рассматривал Беран [4], предложив оценку множительной структуры. В дальнейшем эта оценка была исследована также и в работах [6,7]. Авторы [3] построили и исследовали оценку степенной структуры. В условной модели пропорциональных интенсивностей (МПИ) соответствующая степенная оценка исследована в [8]. В настоящей работе впервые рассматривается модель информативного случайного цензурирования с двух сторон и в ней построены новые оценки степенной структуры. Исследованы асимптотические свойства оценки.

2. Информативная модель и её характеристика

Рассмотрим ситуацию, когда с.в. Z подвергается случайному цензурированию с двух сторон парой с.в. (L, Y) . Предполагается, что компоненты вектора (L, Z, Y) независимые с.в. при заданной ковариате X со значениями из отрезка $[0, 1]$. Пусть $\{(L_k, Z_k, Y_k), k = \overline{1, n}\}$ - независимые реализации вектора

(L, Z, Y) в n экспериментах и $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$

- фиксированные точки дизайна ковариаты X . Через K_x, F_x и G_x обозначим условные функции распределения (ф.р.) с.в. L_x, Z_x и Y_x соответственно при $X = x$ и предположим, что они непрерывны. Пусть $\xi_x = L_x \vee (Z_x \wedge Y_x)$, где

$$a \wedge b = \min(a, b), a \vee b = \max(a, b).$$

Наблюдается следующая выборка объема n :

$$S^{(n)} = \left\{ (\xi_i, \chi_i^{(0)}, \chi_i^{(1)}, \chi_i^{(2)}, X_i), i = \overline{1, n} \right\},$$

где

$$\xi_i = L_i \vee (Z_i \wedge Y_i), \chi_i^{(0)} = I(Z_i \wedge Y_i < L_i),$$

$$\chi_i^{(1)} = I(L_i \leq Z_i \leq Y_i), \chi_i^{(2)} = I(L_i \leq Y_i < Z_i)$$

и $I(A)$ - индикатор события A . Заметим, что в выборке $S^{(n)}$ интересующие нас с.в. Z_i наблюдаемы лишь при $\chi_i^{(1)} = 1$. Задача состоит в оценивании условной

функции выживания $1 - F_x$ по выборке $S^{(n)}$. Пусть H_x и N_x - условные ф.р. с.в. ξ_x и $\eta_x = Z_x \wedge Y_x$ при $X = x$. Тогда легко находим, что $H_x(t) = K_x(t)N_x(t)$ и

$$N_x(t) = 1 - (1 - F_x(t))(1 - G_x(t)), t \geq 0.$$

В настоящей работе рассматривается случай информативного случайного цензурирования, когда ф.р. цензурирующих с.в. K_x и G_x выражаются через оцениваемую ф.р. F_x следующим образом при всех $t \geq 0$:

$$\begin{cases} 1 - G_x(t) = (1 - F_x(t))^{\theta_x}, \\ K_x(t) = (N_x(t))^{\beta_x}, \end{cases} \quad (1)$$

где θ_x и β_x - положительные неизвестные параметры. Следует напомнить, что в случае отсутствия ковариаты X модель (1) была предложена и исследована автором [1,2]. Из формул (1) легко находим следующее представление для условной ф.р. F_x :

$$1 - F_x(t) = \left[1 - (H_x(t))^{\lambda_x} \right]^{\gamma_x}, t \geq 0, \quad (2)$$

где $\lambda_x = \frac{1}{1+\beta_x}$ и $\gamma_x = \frac{1}{1+\theta_x}$. Непосредственным вычислением находим, что

$$P(\chi_x^{(0)}=1)=1-\lambda_x, P(\chi_x^{(1)}=1)=\gamma_x\lambda_x, P(\chi_x^{(2)}=1)=(1-\gamma_x)\lambda_x \quad (3)$$

Формула (2) играет ключевую роль в построении оценки для F_x . Прежде всего исследуем модель (1) и сформулируем теорему, характеризующую эту модель.

Теорема 1. Равенства (1) имеют место тогда и только тогда, когда с.в. ξ_x и $(\chi_x^{(0)}, \chi_x^{(1)}, \chi_x^{(2)})$ - независимы.

Для оценивания $1-F_x$ по формуле (2) сперва оценим $H_x(t)$ и параметры λ_x, γ_x . Пусть $x_0=0$, $\pi(t)$ - известная плотность вероятности (ядро) $\{h_n\}$ - последовательность положительных постоянных (ширина окна) такая, что $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\{\omega_{ni}(x; h_n)\}_{i=1}^n$ - веса Гессера-Мюллера, где

$$\omega_{ni}(x; h_n) = \frac{1}{C_n(x; h_n)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_n} \pi\left(\frac{x-y}{h_n}\right) dy, \quad i=1, \dots, n;$$

$$C_n(x; h_n) = \int_0^{x_n} \frac{1}{h_n} \pi\left(\frac{x-y}{h_n}\right) dy, \quad \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) = 1.$$

Для оценивания ф.р. $H_x(t)$ и вероятностей $\{p_x^{(m)} = P(\chi_x^{(m)}=1), m=0,1,2\}$ используем статистики типа Стоуна [5]:

$$H_{xh}(t) = \sum_{i=1}^n I(\xi_i \leq t) \omega_{ni}(x; h_n), \quad (4)$$

$$p_{xh}^{(m)} = \sum_{i=1}^n \chi_i^{(m)} \omega_{ni}(x; h_n), \quad m=0,1,2.$$

В частности, при $\omega_{ni}(x; h_n) = 1/n$ (т.е. при отсутствии ковариат) (4) становятся обычными эмпирическими оценками. Подставив оценки (4) вместо вероятностей в уравнениях (3), находим оценки параметров λ_x и γ_x в виде

$$\lambda_{xh} = 1 - p_{xh}^{(0)}, \quad \gamma_{xh} = p_{xh}^{(1)} (1 - p_{xh}^{(0)})^{-1}. \quad (5)$$

Теперь подставив оценки (4) и (5) в (2), получаем оценку для $1-F_x$ в виде

$$1 - F_{xh}(t) = \left\{ 1 - [H_{xh}(t)]^{\lambda_{xh}} \right\}^{\gamma_{xh}}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

3. Асимптотические результаты.

Далее нами будут использованы обозначения

$$(I) \quad \underline{\Delta}_n = \min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad \bar{\Delta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

$$(II) \quad \|\pi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2(y) dy, \quad m_1(\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} y\pi(y) dy,$$

$$m_2(\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \pi(y) dy$$

Легко видеть, что ввиду условий (1)

$$T_{F_x} = T_{G_x} = T_{N_x} = T_{K_x} = T_{H_x} = \inf\{t \geq 0 : H_x(t) = 1\}$$

$$\text{и } \tau_{F_x} = \tau_{G_x} = \tau_{N_x} = \tau_{K_x} = \tau_{H_x} = \sup\{t \geq 0 : H_x(t) = 0\}.$$

Рассмотрим условия:

$$(Y1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad x_n \rightarrow 1, \quad \bar{\Delta}_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \bar{\Delta}_n - \underline{\Delta}_n = o\left(\frac{1}{n}\right);$$

(Y2) $\pi(y)$ - плотность с компактным носителем $[-M, M]$, где число $M > 0$, а также $m_1(\pi) = 0$ и π удовлетворяет условию Липшица:

$$|\pi(y) - \pi(y')| \leq C_\pi |y - y'|;$$

$$(Y3) \quad \text{производные } \dot{F}_x(t) = \frac{\partial}{\partial x} F_x(t), \quad \ddot{F}_x(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_x(t) -$$

существуют и непрерывны для $(x,t) \in [0,1] \times [\tau, T]$, где $\tau > \tau_{F_x}$, $T < T_{F_x}$ и $\tau < T$.

$$(Y4) \quad \text{Производные } \dot{\theta}_x = \frac{d}{dx} \theta_x, \quad \dot{\beta}_x = \frac{d}{dx} \beta_x,$$

$\ddot{\theta}_x = \frac{d^2}{dx^2} \theta_x$, $\ddot{\beta}_x = \frac{d^2}{dx^2} \beta_x$ существуют и непрерывны для $0 \leq x \leq 1$.

Далее используем также обозначения

$$\dot{H}_x(t) = \frac{\partial}{\partial x} H_x(t), \quad \ddot{H}_x(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x(t),$$

$$\|\dot{H}\| = \sup_{(x,t) \in [0,1] \times [\tau, T]} |\dot{H}_x(t)|, \quad \|\ddot{H}\| = \sup_{(x,t) \in [0,1] \times [\tau, T]} |\ddot{H}_x(t)|,$$

$$r^{-1} = \sup_{\tau \leq t \leq T} \left[(H_x(t))^{p_x^{(0)}} - H_x(t) \right]^{-1}, \quad \dot{p}_x^{(m)} = \frac{d}{dx} p_x^{(m)},$$

$$\ddot{p}_x^{(m)} = \frac{d^2}{dx^2} p_x^{(m)}, \quad \|\dot{p}_x^{(m)}\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\dot{p}_x^{(m)}|,$$

$$\|\ddot{p}_x^{(m)}\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\ddot{p}_x^{(m)}|, \quad m=0,1.$$

Заметим, что существование и непрерывность всех этих производных следует из условий (Y3) и (Y4).

Сформулируем теорему о равномерной сильной состоятельности оценки (6).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (Y1)–(Y4), $h_n \rightarrow 0$ и $r > 0$.

(A) Для $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n , пусть

$$\min\left(\frac{1}{p_x^{(0)}}, \frac{1}{1-p_x^{(0)}}, \frac{1}{p_x^{(1)}}\right) \geq \max\left(\frac{r}{r+8}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+3}\right) \geq \frac{\varepsilon r}{\varepsilon r+18} \geq 4 \max\left\{r^{-1}\left(\|\dot{H}\|\bar{\Delta}_n + \|\ddot{H}\|m_2(\pi)h_n^2\right), \left[r(1-p_x^{(0)})\right]^{-1} \cdot \left(\|\dot{p}_x^{(0)}\|\bar{\Delta}_n + \|\ddot{p}_x^{(0)}\|m_2(\pi)h_n^2\right), \left(p_x^{(1)}\right)^{-1}\left(\|\dot{p}_x^{(1)}\|\bar{\Delta}_n + \|\ddot{p}_x^{(1)}\|m_2(\pi)h_n^2\right)\right\}.$$

Тогда

$$P\left(\sup_{\tau \leq t \leq T} |F_{xh}(t) - F_x(t)| > \varepsilon\right) \leq \frac{4C_1}{r} \left[\frac{(r+8)}{H_x(\tau)} e^{-C_2 \left(\frac{rH_x(\tau)}{r+8}\right)^2 nh_n} + e^{-C_2 \left(\frac{r}{4}\right)^2 nh_n} + \frac{3}{2\varepsilon} e^{-C_2 \left(\frac{\varepsilon r}{6}\right)^2 nh_n} \right] + 4 \left[e^{-C_0 \left(\frac{r p_x^{(0)}}{r+8}\right)^2 nh_n} + e^{-C_0 \left(\frac{\varepsilon r(1-p_x^{(0)})}{\varepsilon r+18}\right)^2 nh_n} + e^{-C_0 \left(\frac{\varepsilon p_x^{(1)}}{\varepsilon+3}\right)^2 nh_n} \right],$$

для некоторых абсолютных постоянных C_0, C_1 и C_2 .

(B) Если при $n \rightarrow \infty$, $\frac{nh_n^5}{\log n} = O(1)$, то

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |F_{xh}(t) - F_x(t)| \stackrel{\text{н.н.}}{=} O\left(\left(\frac{\log n}{nh_n}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Следующий результат состоит в асимптотическом представлении оценок (6) в виде взвешанной суммы с оценкой остаточного члена.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (Y1)–(Y4), $h_n \rightarrow 0$, $\frac{nh_n^5}{\log n} = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ и $r > 0$.

Тогда для $t \in (\tau_{F_x}, T_{F_x})$:

$$F_{xh}(t) - F_x(t) = \sum_{i=1}^n \omega_n(x, h_n) \Psi_{ix}(\xi_i, \chi_i^{(0)}, \chi_i^{(1)}, \chi_i^{(2)}) + q_n(t, x), \quad (7)$$

где

$$\Psi_{ix}(\xi_i, \chi_i^{(0)}, \chi_i^{(1)}, \chi_i^{(2)}) = (1 - F_x(t)) \left\{ p_x^{(1)} \left[(H_x(t))^{p_x^{(0)}} - H_x(t) \right]^{-1} \right.$$

$$\cdot (I(\xi_i \leq t) - H_x(t)) - \left[\frac{p_x^{(1)}}{(1-p_x^{(0)})^2} \log \left[1 - (H_x(t))^{1-p_x^{(0)}} \right] + \frac{p_x^{(1)}}{(1-p_x^{(0)})} H_x(t) \log H_x(t) \cdot \left[(H_x(t))^{p_x^{(0)}} - H_x(t) \right]^{-1} \right] \cdot \left. \left(\chi_i^{(0)} - p_x^{(0)} \right) - \frac{1}{(1-p_x^{(0)})} \log \left[1 - (H_x(t))^{1-p_x^{(0)}} \right] \left(\chi_i^{(1)} - p_x^{(1)} \right) \right\}$$

при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |q_n(t, x)| \stackrel{\text{н.н.}}{=} O\left(\frac{\log n}{nh_n}\right). \quad (8)$$

Следствие. Из теоремы 3 при достаточно больших n следует, что $(nh_n)^{\frac{1}{2}}(F_{xh}(t) - F_x(t))$ аппроксимируется суммой в (7) умноженной на $(nh_n)^{\frac{1}{2}}$ со скоростью $(nh_n)^{-\frac{1}{2}} \log n$.

С учетом этого приведём асимптотическую нормальность оценок (6).

Теорема 4. Пусть выполнены условия (Y1)–(Y4) и $r > 0$.

(A) Если $nh_n^5 \rightarrow 0$ и $(nh_n)^{-\frac{1}{2}} \log n \rightarrow 0$, тогда при $n \rightarrow \infty$ и $t \in [\tau, T]$

$$(nh_n)^{\frac{1}{2}}(F_{xh}(t) - F_x(t)) \Rightarrow N(0, \sigma_x^2(t)).$$

(B) Если $h_n = Cn^{-\frac{1}{2}}$ при некотором $C > 0$, тогда при $n \rightarrow \infty$ и $t \in [\tau, T]$

$$(nh_n)^{\frac{1}{2}}(F_{xh}(t) - F_x(t)) \Rightarrow N(a_x(t), \sigma_x^2(t)),$$

где

$$a_x(t) = \frac{1}{2}(1 - F_x(t)) \left\{ p_x^{(1)} \left[(H_x(t))^{p_x^{(0)}} - H_x(t) \right]^{-1} \ddot{H}_x(t) - \left[\frac{p_x^{(1)}}{(1-p_x^{(0)})^2} \log \left[1 - (H_x(t))^{1-p_x^{(0)}} \right] + \frac{p_x^{(1)}}{(1-p_x^{(0)})} H_x(t) \log H_x(t) \cdot \left[(H_x(t))^{p_x^{(0)}} - H_x(t) \right]^{-1} \right] \right\}$$

$$\frac{p_x^{(1)}}{(1-p_x^{(0)})} H_x(t) \log H_x(t) \left[(H_x(t))^{p_x^{(0)}} - H_x(t) \right]^{-1} \dot{p}_x^{(0)} -$$

$$\frac{1}{1-p_x^{(0)}} \log \left[1 - (H_x(t))^{1-p_x^{(0)}} \right] \dot{p}_x^{(1)} \left. \vphantom{\frac{p_x^{(1)}}{(1-p_x^{(0)})}} \right\}.$$

$$\cdot m_2(\pi) C^{\frac{1}{2}} = a_x^0(t) C^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_x^2(t) = \|\pi\|_2^2 (1 - F_x(t))^2 \left\{ A_x^2(t) H_x(t) (1 - H_x(t)) + \right.$$

$$\left. + B_x^2(t) p_x^{(0)} (1 - p_x^{(0)}) + C_x^2(t) p_x^{(1)} (1 - p_x^{(1)}) - 2B_x(t) C_x(t) p_x^{(0)} p_x^{(1)} \right\},$$

$$A_x(t) = p_x^{(1)} \left[(H_x(t))^{p_x^{(0)}} - H_x(t) \right]^{-1},$$

$$B_x(t) = - \left[\frac{p_x^{(1)}}{(1-p_x^{(0)})} C_x(t) + \frac{A_x(t)}{(1-p_x^{(0)})} H_x(t) \log H_x(t) \right],$$

$$C_x(t) = - \frac{1}{(1-p_x^{(0)})} \log \left[1 - (H_x(t))^{1-p_x^{(0)}} \right].$$

Литература

- [1] *Абдушукуров А.А.* Модель случайного цензурирования с двух сторон и критерий независимости для нес. // Доклады АН РУз. – 1994. - №.11. с. 8-9.
- [2] *Abdushukurov A.A.* Nonparametric estimation of the distribution function based on relative risk function. // Commun. Statist.: Th&Meth. – 1998. v. 27.-№.8. –p.1991-2012.
- [3] *Абдушукуров А.А., Абдикаликов Ф.А.* Оценка условной функции распределения при непараметрической регрессии с фиксированным дизайном. // Сб. Статистические методы оценивания и проверка гипотез. – Пермь. Пермский госуниверситет. – 2011. – вып. 23. – с. 181-189.
- [4] *Beran R.* Nonparametric regression with randomly censored survival data. Technical Report. Univ. California. Berkeley. – 1981. – 19p.
- [5] *Stone C.J.* Consistent nonparametric regression. //Ann. Statist.-1977/ - v.5.-p. 595-645.
- [6] *Van Keilegom I., Veraverbeke N.* Uniform strong convergence for the conditional Kaplan-Meier estimator and its quantiles. // Commun. Statist.: Th.&Meth. – 1996. – v.25.-p.2251-2265.
- [7] *Van Keilegom I., Veraverbeke N.* Estimation and bootstrap with censored data in fixed desing nonparametric regression. // Ann. Inst. Statist. Math.-1997.-v.49.-№3. – p.467-491.
- [8] *Veraverbeke N., Cadarso-Suares C.* Estimation of the conditional distribution in a conditional Koziol-Green model. // Test. – 2000. v.-v.9.№1.-p. 97-122.

Состоятельность оценки средней остаточной времени жизни в зависимой модели случайного цензурирования справа

Абдурахим Ахмедович Абдушукуров
Национальный Университет Узбекистана,
Ташкент
a_abdushukurov@rambler.ru

Нурлан Таирбекович Душатов
Национальный Университет Узбекистана,
Ташкент
n_dushatov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача оценивания функции выживания и средней остаточной времени жизни при случайном цензурировании наблюдений справа. Для построения оценок используются архимедова копула функции.

Ключевые слова. случайное цензурирование, функция выживания, средняя остаточная время жизни, архимедова копулы.

Рассмотрим последовательность $\{(X_k, Y_k), k \geq 1\}$ - независимых и одинаково распределенных (н.о.р.) пар неотрицательных случайных величин (с.в.) с общей совместной функцией распределения (ф.р.) $H(x, y) = P(X_1 \leq x, Y_1 \leq y)$, $(x, y) \in \bar{R}^{+2} = [0, \infty] \times [0, \infty]$. Пусть маргинальные ф.р. $F(x) = P(X_1 \leq x) = H(x, +\infty)$ и $G(y) = P(Y_1 \leq y) = H(+\infty, y)$, $x, y \in \bar{R}^+$, являются непрерывными, $F(0) = G(0) = 0$. Рассмотрим случай, когда последовательность $\mathbb{X} = \{X_k, k \geq 1\}$ цензурируется справа последовательностью $\mathbb{Y} = \{Y_k, k \geq 1\}$ и в n -м шаге эксперимента наблюдается выборка $\mathbb{V}^{(n)} = \{(Z_k, \delta_k), 1 \leq k \leq n\}$, где $Z_k = \min(X_k, Y_k)$ и $\delta_k = I(Z_k = X_k)$, т.е. интересующие нас с.в. X_k наблюдаемы лишь в случае $\delta_k = 1$. Следует отметить, что здесь последовательности \mathbb{X} и \mathbb{Y} могут быть и зависимыми. В данной статистической модели задача состоит в оценивании функционалов от неизвестной ф.р. F при мешающей неизвестной ф.р. G . Такие задачи возникают в медико-биологических, социологических исследованиях, в инженерии, в страховом деле и в других областях исследований практического характера.

Рассмотрим оценку F_n из работ [1,2,4] для ф.р. F . Пусть $C(u, v)$ - копула - функция, соответствующая паре (X_1, Y_1) и

$C^*(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, отвечающая ей копула выживания является архимедовой: $C^*(u, v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)]$. Здесь φ - функция-

генератор копулы $\varphi: [0, 1] \rightarrow \bar{R}^+$ - непрерывная, строго убывающая функция такая, что $\varphi(1) = 0$, $\varphi(0) = \infty$ и φ^{-1} - обратная для φ функция. Определим оценку F_n формулой $F_n(x) = 1 - S_n^X(x)$, где

$$S_n^X(x) = \varphi^{-1}[\varphi(S_n^Z(x))\mu_n(x)], \quad x \in \bar{R}^+, \quad (1)$$

при этом в формулу (1) входят статистики:

$$\begin{aligned} \mu_n(x) &= \varphi(\tilde{S}_n^X(x)) / \varphi(\tilde{S}_n^Z(x)), \\ S_n^Z(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(Z_k > x) = 1 - H_n(x), \\ \varphi(\tilde{S}_n^X(x)) &= - \int_0^x I(S_n^Z(t-) > 0) S_n^Z(t-) \varphi'(S_n^Z(t)) d\Lambda_n^X(t), \\ \varphi(\tilde{S}_n^Z(x)) &= - \int_0^x I(S_n^Z(t-) > 0) S_n^Z(t-) \varphi'(S_n^Z(t)) d\Lambda_n^Z(t), \\ \Lambda_n^X(t) &= \int_0^t \frac{dH_{1n}(s)}{S_n^Z(s-)}, \quad \Lambda_n^Z(t) = \int_0^t \frac{dH_n(s)}{S_n^Z(s-)}, \\ H_{1n}(s) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(Z_k \leq s, \delta_k = 1). \end{aligned}$$

В настоящей работе рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} E(x) &= E(x; F) = M(X_1 - x / X_1 > x) = \\ &= (S^X(x))^{-1} \int_x^{+\infty} S^X(t) dt, \quad x \in [0, T_X], \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_X = \inf\{x \geq 0 : S^X(x) = 0\}$, $S^X = 1 - F$.

При анализе данных типа времени жизни функционал $E(\cdot; F)$ называется средним остаточным временем жизни, который существует при условии $\mu = E(0; F) = MX_1 < +\infty$. Полный обзор работ и асимптотический анализ ядерных оценок $E(x)$ в случае полной, бутстреп и неполной выборок при независимом цензурировании имеется в монографии [3]. Здесь в модели зависимого случайного цензурирования справа построим следующую оценку для $E(x)$:

$$E_n(x) = E(x; F_n) = \begin{cases} 0, & x \geq Z^{(n)}, \\ (S_n^X(x))^{-1} \int_x^{+\infty} S_n^X(t) dt, & x \in [0, Z^{(n)}], \end{cases} \quad (3)$$

где $Z^{(n)} = \inf\{x \geq 0: S_n^Z(x) = 0\} = \max\{Z_1, \dots, Z_n\}$.

Пусть $T_Z = \inf\{x \geq 0: S^Z(x) = 0\}$, $S^Z(x) = P(Z_1 > x)$.

Тогда $T_Z = \min\{T_X, T_Y\}$. Поскольку оценки (1) и (3) определены на интервале $[0, Z^{(n)}]$ а также при $n \rightarrow \infty$

$$Z^{(n)} \xrightarrow{n.n.} T_Z, \quad (4)$$

то доопределим функцию (2) полагая

$$E(x) = \begin{cases} E(x; F), & x < T_Z, \\ 0, & x \geq T_Z. \end{cases} \quad (5)$$

В настоящей работе рассмотрим свойство сходимости к нулю (при $n \rightarrow \infty$) последовательности с.в.

$\varepsilon_n(F) = \sup_{0 \leq x < \infty} \chi(F(x)) |E_n(x) - E(x)|$, где весовая

функция $\chi: [0, 1] \rightarrow \bar{R}^+$ удовлетворяет условиям:

(А) χ – измеримая функция и при каждом $\eta > 0$:

$$\sup\{\chi(u) : u \in [0, 1 - \eta]\} < \infty.$$

(В) Функция $\chi^*(u) = \chi(u)/(1-u)$ не убывает в окрестности 1.

$$(C) \int_0^{T_X} \left\{ (S^X(x))^{-1} \int_x^{T_X} \chi(F(y)) dy \right\} dF(x) < \infty.$$

В нижеприводимых условиях на распределение H и копулы φ под $\Lambda(x)$ подразумеваются интегральные интенсивности $\Lambda^X(x) = -\log S^X(x)$ и $\Lambda^Z(x) = -\log S^Z(x)$.

(D) Функция φ строго убывает на $(0, 1]$ и является достаточно гладкой в следующем смысле: первые две производные функций $\varphi(x)$ и $\psi(x) = -x\varphi'(x)$

ограничены для $x \in [\varepsilon, 1]$, где $\varepsilon > 0$ произвольное число. Более того, производное φ' ограничено и отделено от нуля на $[0, 1]$.

$$(E) 0 < \int_0^{T_Z} [\psi(S^Z(x))]^2 d\Lambda(x) < \infty.$$

$$(F) \int_0^{T_Z} |\psi'(S^Z(x))| d\Lambda(x) < \infty.$$

Имеет место следующее утверждение о равномерной состоятельности E_n с весом.

Теорема. Пусть $\mu = MX_1 < \infty$ и выполнены условия (A)-(F). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_n(F) \xrightarrow{P} 0. \quad (6)$$

Литература

- [1] Абдушукуров А.А., Мурадов Р.С. Модель одномерного зависимого случайного цензурирования справа и оценки функции выживания. // Узб. Матем. ж-л. 2011. №3, с. 3-13.
- [2] Абдушукуров А.А., Душатов Н.Т., Мурадов Р.С. Оценивание функционалов многомерного распределения по цензурированным наблюдениям при помощи копула функций. // Сб. Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Пермь. Пермский Госуниверситет. 2011. вып. 23, с. 132-143.
- [3] Сагидуллаев К.С., Абдушукуров А.А. Асимптотический анализ ядерных оценок, связанных со средним значением. LAP. LAMBERT Academic Publishing. 2011. 132p.
- [4] Dushatov N.T., Muradov R.S. Estimation of multivariate survival function by dependent censored data. // Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference. Book of Abstracts of the International Workshop. Novosibirsk, 20-22 September 2011. p.17.

Аппроксимации статистик отношения правдоподобия в модели конкурирующих рисков при информативном случайном цензурировании с двух сторон

**Абдурахим Ахмедович
Абдушукуров**

Национальный Университет Узбекистана,
Ташкент
a_abdushukurov@rambler.ru

**Наргиза Сайдиллаевна
Нурмухамедова**

Национальный Университет Узбекистана,
Ташкент
rasulova_nargiza@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена аппроксимации статистики отношения правдоподобия в информативной модели случайного цензурирования с двух сторон последовательностью стохастических интегралов от вклада выборки. Этот результат содержит в себе свойство локальной асимптотической нормальности эксперимента.

Ключевые слова. статистика отношения правдоподобия, модель конкурирующих рисков, локальная асимптотическая нормальность, случайное цензурирование.

1. Введение

Наиболее важным свойством статистических моделей является свойство локальной асимптотической нормальности (ЛАН) статистики отношения правдоподобия (СОП) регулярного статистического эксперимента. Грубо говоря, под регулярностью эксперимента подразумевается дифференцируемость функции правдоподобия (ФПП) модели по неизвестному параметру θ и в частности существование фишеровской информации $I(\theta)$ модели. Суть ЛАН заключается в том, что СОП модели допускает аппроксимацию функциями вида $\exp\left\{u\omega_{n,\theta} - \frac{1}{2}u^2\right\}$, где $\omega_{n,\theta}$ - асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) нормальные с параметрами $(0,1)$ случайные величины (с.в.). Свойства экспериментов, удовлетворяющих условию ЛАН в случае независимых и одинаково распределенных (н.о.р.) наблюдений изучали А.Вальд, Л.Ле Кам и Я.Гаек (подробно см. [6-11]). В работах [3-5] установлены результаты аппроксимации СОП стохастическими интегралами в моделях конкурирующих рисков (МКР) при случайном цензурировании наблюдений справа и с двух сторон. Такой вариант ЛАН обобщает классические результаты ЛАН. В настоящей работе рассматриваются аналогичные задачи в МКР, когда случайное цензурирование с двух сторон является информативной.

2. Информативная модель и её характеристика

Следуя [3-5], рассмотрим МКР. Пусть X - с.в. со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, где

$\mathcal{X} \subseteq R^1$ и $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{X})$. Рассмотрим попарно несовместные события $\{A^{(1)}, \dots, A^{(k)}\}$ (или хотя бы $P(A^{(i)} \cap A^{(j)}) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, k}$), такие, что $P\left(\bigcup_{i=1}^k A^{(i)}\right) = 1$. В МКР интерес представляют

совместные свойства с.в. X и событий $\{A^{(i)}, i = \overline{1, k}\}$.

Пусть $\{\delta^{(i)} = I(A^{(i)}), i = \overline{1, k}\}$ - индикаторы указанных событий и совместное распределение вектора $(X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)})$ задано с точностью до неизвестного параметра $\theta \in \Theta$:

$$Q_{\theta}(x, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}) = P_{\theta}(X < x, \delta^{(1)} = y^{(1)}, \dots, \delta^{(k)} = y^{(k)}),$$

где $x \in R^1, y^{(i)} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, k}$ и Θ - открытое множество в R^1 .

Пусть $H(x; \theta) = P_{\theta}(X \leq x)$ и $H^{(i)}(x; \theta) = P_{\theta}(X < x, \delta^{(i)} = 1)$ - маргинальные распределения с.в. X и $(X, \delta^{(i)}), i = \overline{1, k}$ соответственно. Поскольку $\delta^{(1)} + \dots + \delta^{(k)} = 1$, то $H^{(1)}(x; \theta) + \dots + H^{(k)}(x; \theta) = H(x; \theta)$ - для всех $(x; \theta) \in R^1 \times \Theta$. Пусть субраспределения $H^{(i)}$ абсолютно непрерывны и имеют плотности $h^{(i)}$. Тогда существует плотность h у ф.р. H и для всех $(x; \theta) \in R^1 \times \Theta$: $h(x; \theta) = h^{(1)}(x; \theta) + \dots + h^{(k)}(x; \theta)$. Предположим, что с.в. X подвергается случайному цензурированию с двух сторон парой с.в. (L, Y) с абсолютно непрерывными ф.р. $K(x; \theta) = P_{\theta}(L < x)$ и $G(y; \theta) = P_{\theta}(Y < y)$. При этом также предполагается, что с.в. $\{X, L, Y\}$ - независимы в совокупности, а цензурирование является информативной, т.е. ф.р. K и G выражаются через ф.р. H следующими формулами для всех $(x; \theta) \in R^1 \times \Theta$:

$$\begin{cases} 1-G(x;\theta) = (1-H(x;\theta))^\alpha, \\ K(x;\theta) = [1-(1-H(x;\theta))^{\alpha+1}]^\beta, \end{cases} \quad (1)$$

где α и β положительные неизвестные мешающие параметры не зависят от основного параметра θ .

Пусть k и g плотности, соответствующие ф.р. K и G . Тогда согласно (1)

$$\begin{aligned} k(x;\theta) &= \beta [1-(1-H(x;\theta))^{\alpha+1}]^{\beta-1} \cdot \\ &\cdot (\alpha+1)(1-H(x;\theta))^{\alpha-1} h(x;\theta), \\ g(x;\theta) &= \alpha(1-H(x;\theta))^{\alpha-1} h(x;\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\tau_H = \inf\{x: H(x;\theta) > 0\}$ и $T_H = \sup\{x: H(x;\theta) < 1\}$. Тогда согласно (1), $\tau_H = \tau_K = \tau_L$ и $T_H = T_K = T_L$, а плотности (2) положительны на множестве $[\tau_H; T_H]$.

Пусть $\{(X_j, L_j, Y_j, A_j^{(1)}, \dots, A_j^{(k)}), j \geq 1\}$ - последовательность независимых повторений совокупности $(X, L, Y, A^{(1)}, \dots, A^{(k)})$ и на n -м шаге эксперимента наблюдается выборка объема n $\bar{Z}^{(n)} = (\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n)$, где $\bar{Z}_j = (Z_j; \Delta_j^{(-1)}, \Delta_j^{(0)}, \Delta_j^{(1)}, \dots, \Delta_j^{(k)})$, $Z_j = L_j \vee (X_j \wedge Y_j) = \max(L_j, \min(X_j, Y_j))$, $\Delta_j^{(l)} = I(D_j^{(l)})$, $l = -1, 0, 1, \dots, k$, события $D_j^{(-1)} = \{\omega: X_j(\omega) \wedge Y_j(\omega) < L_j(\omega)\}$,

$$D_j^{(0)} = \{\omega: L_j(\omega) \leq Y_j(\omega) < X_j(\omega)\}$$

и

$$D_j^{(i)} = A_j^{(i)} \cap \{\omega: L_j(\omega) \leq X_j(\omega) \leq Y_j(\omega)\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Заметим, что в выборке $\bar{Z}^{(n)}$ интересующие нас пары $(X, A_j^{(i)})$ наблюдаемы при $\Delta_j^{(i)} = 1, i = \overline{1, k}$. Введем ф.р.

$$M(x;\theta) = P_\theta(X_j \wedge Y_j \leq x) = 1 - (1-G(x;\theta)) \cdot (1-H(x;\theta))$$

и $N(x;\theta) = P_\theta(Z_j \leq x) = K(x;\theta)M(x;\theta)$, а также

$$\text{субраспределения} \quad T^{(l)}(x;\theta) = P_\theta(Z_j \leq x; \Delta_j^{(l)} = 1),$$

$l = -1, 0, 1, \dots, k$. Легко убедиться в том, что

$$T^{(-1)}(x;\theta) = \int_{-\infty}^x M(u;\theta) dK(u;\theta),$$

$$T^{(0)}(x;\theta) = \int_{-\infty}^x K(u;\theta)(1-H(u;\theta)) dG(u;\theta), \quad (3)$$

$$T^{(i)}(x;\theta) = \int_{-\infty}^x K(u;\theta)(1-G(u;\theta)) dH^{(i)}(u;\theta), \quad i = \overline{1, k}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^k T^{(i)}(x;\theta) = \int_{-\infty}^x K(u;\theta)(1-G(u;\theta)) dH(u;\theta) = T(x;\theta)$$

и

$$T^{(-1)}(x;\theta) + T^{(0)}(x;\theta) + T^{(1)}(x;\theta) + \dots + T^{(k)}(x;\theta) = N(x;\theta).$$

Пусть $\gamma = \frac{1}{1+\alpha}$ и $\lambda = \frac{1}{1+\beta}$. Тогда согласно (1)

непосредственным вычислением субраспределений по формулам (3) имеем

$$\begin{aligned} T^{(-1)}(x;\theta) &= \int_{-\infty}^x M(u;\theta) d(M(u;\theta))^\beta = \\ &= \frac{\beta}{1+\beta} (M(x;\theta))^{\beta+1} = (1-\lambda)N(x;\theta), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T^{(0)}(x;\theta) &= - \int_{-\infty}^x (M(u;\theta))^\beta (1-H(u;\theta)) d(1-H(u;\theta))^\alpha = \\ &= - \frac{\alpha}{1+\alpha} \int_{-\infty}^x (M(u;\theta))^\beta d(1-H(u;\theta))^{\alpha+1} = \end{aligned} \quad (5)$$

$$= - \frac{\alpha}{1+\alpha} \int_{-\infty}^x (M(u;\theta))^\beta dM(u;\theta) = (1-\lambda)\gamma N(x;\theta),$$

$$\begin{aligned} T(x;\theta) &= \frac{1}{1+\alpha} \int_{-\infty}^x (M(u;\theta))^\beta d(1-H(u;\theta))^{\alpha+1} = \\ &= \frac{1}{1+\alpha} \int_{-\infty}^x (M(u;\theta))^\beta dM(u;\theta) = \lambda\gamma N(x;\theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Информативная модель случайного цензурирования с двух сторон впервые была введена в работах [1,2]. Следуя [1,2], докажем теорему о характеристизации модели (1) независимостью с.в. Z_j и вектора $(\Delta_j^{(-1)}, \Delta_j^{(0)}, \Delta_j)$,

где $\Delta_j = \Delta_j^{(1)} + \dots + \Delta_j^{(k)}$.

Теорема 2.1. Модель (1) имеет место тогда и только тогда, когда с.в. Z_j и вектор $(\Delta_j^{(-1)}, \Delta_j^{(0)}, \Delta_j)$ независимы при каждом $j \geq 1$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть имеют место формулы (2). Тогда имеют место представления (4)-(6) для субраспределений. Переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$ в этих формулах, в частности для всех $\theta \in \Theta$ будем иметь

$$P_\theta(\Delta_j^{(-1)} = 1) = 1 - \lambda, \quad P_\theta(\Delta_j^{(0)} = 1) = (1 - \gamma)\lambda \quad \text{и}$$

$$P_\theta(\Delta_j = 1) = \lambda \gamma. \quad (7)$$

Введём события $A = \{Z_j \leq x\}$ и $\{B_{-1}, B_0, B_1\}$, где $B_m = \{\Delta_j^{(m)} = 1\}$, $m = -1, 0$ и $B_1 = \{\Delta_j = 1\}$. Тогда из соотношений (4)-(7) следует независимость событий A и $\{B_m, m = -1, 0, 1\}$. Аналогично можно показать и независимость и других комбинаций этих событий и их отрицаний. Это показывает независимость с.в. Z_j и вектора $(\Delta_j^{(-1)}, \Delta_j^{(0)}, \Delta_j)$. Обратно, пусть с.в. Z_j и вектор $(\Delta_j^{(-1)}, \Delta_j^{(0)}, \Delta_j)$ независимы. В частности, из независимости Z_j и $\Delta_j^{(-1)}$ для всех $x > \tau_K$ имеем

$$\begin{aligned} K(x; \theta) &= \exp \left\{ - \int_x^{+\infty} \frac{dT^{(-1)}(u; \theta)}{M(u; \theta)K(u; \theta)} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -P_\theta(\Delta_j^{(-1)} = 1) \int_x^{+\infty} \frac{dN(u; \theta)}{N(u; \theta)} \right\} = \\ &= [M(x; \theta)K(x; \theta)]^{P_\theta(\Delta_j^{(-1)} = 1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует второе представление в (1) при $\beta = P_\theta(\Delta_j^{(-1)} = 1)P_\theta(\Delta_j^{(-1)} \neq 1)$. С другой стороны, ввиду независимости Z_j и $\Delta_j^{(0)}$ для всех $x > \tau_G$

$$\begin{aligned} 1 - G(x; \theta) &= \exp \left\{ - \int_{-\infty}^x \frac{dT^{(0)}(u; \theta)}{K(u; \theta)(1 - H(u; \theta))} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -P_\theta(\Delta_j^{(0)} = 1) \int_{-\infty}^x \frac{dN(u; \theta)}{K(u; \theta) - N(u; \theta)} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

также из независимости Z_j и Δ_j при всех $x > \tau_H$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - H(x; \theta) &= \exp \left\{ - \int_{-\infty}^x \frac{dT(u; \theta)}{K(u; \theta) - N(u; \theta)} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -P_\theta(\Delta_j = 1) \int_{-\infty}^x \frac{dN(u; \theta)}{K(u; \theta) - N(u; \theta)} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что для всех $(x; \theta) \in R^1 \times \Theta$

$$-\log(1 - G(x; \theta)) = -\alpha \log(1 - H(x; \theta)), \quad (10)$$

где $\alpha = P_\theta(\Delta_j^{(0)} = 1) (P_\theta(\Delta_j = 1))^{-1}$, что показывает справедливость и первой формулы в (1). Теорема 2.1 доказана.

Пусть $p^{(-1)} = P_\theta(\Delta_j^{(-1)} = 1)$ и $p = P_\theta(\Delta_j = 1)$. Тогда

$$\gamma = \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{p}{1 - p^{(-1)}}, \quad \lambda = \frac{1}{1 + \beta} = 1 - p^{(-1)}$$

и следовательно оценки для этих параметров являются статистики

$$\gamma_n = \frac{P_n}{1 - p_n^{(-1)}} \text{ и } \lambda = 1 - p_n^{(-1)}, \quad (11)$$

где $p_n^{(-1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta_j^{(-1)}$, $P_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \Delta_j^{(i)}$.

3. Аппроксимация СОП

Пусть $(\mathcal{Y}^{(n)}, \mathcal{U}^{(n)}, Q_\theta^{(n)})$ - последовательность статистических экспериментов, порождённых наблюдениями $\bar{Z}^{(n)}$, где $\mathcal{Y}^{(n)} = \{\mathcal{X} \times \{0, 1\}^{(k+2)}\}^{(n)}$, $\mathcal{U}^{(n)} = \sigma(\mathcal{Y}^{(n)})$, $Q_\theta^{(n)}$ - распределение на $(\mathcal{Y}^{(n)}, \mathcal{U}^{(n)})$, являющееся " n -кратным произведением одномерных" распределений Q_θ . Семейство мер $\{Q_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta, n \geq 1\}$ является абсолютно непрерывным относительно меры $\nu^{(n)} = \nu_1 \times \dots \times \nu_n$, где $d\nu_m = dx_m \times \varepsilon_{y_m^{(-1)}} \times \dots \times \varepsilon_{y_m^{(k)}}$, $\varepsilon_{y_m^{(l)}}$ - считающие меры, сосредоточенные в точке $y_m^{(l)} \in \{0, 1\}$, $l = -1, 0, 1, \dots, k$; $m = \bar{1}, \bar{n}$, ее плотность задается формулой

$$\begin{aligned} p_n(\bar{Z}^{(n)}; \theta) &= \frac{dQ_\theta^{(n)}(\bar{Z}^{(n)})}{d\nu^{(n)}(\bar{Z}^{(n)})} = \\ &= \prod_{j=1}^n \left\{ [M(Z_j; \theta)k(Z_j; \theta)]^{\Delta_j^{(-1)}} [K(Z_j; \theta) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (1 - H(Z_j; \theta))g(Z_j; \theta)]^{\Delta_j^{(0)}} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \prod_{i=1}^k [K(Z_j; \theta)(1 - G(Z_j; \theta))h^{(i)}(Z_j; \theta)]^{\Delta_j^{(i)}} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь, учитывая формулы (1) и (2), плотность (12) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_n(\bar{Z}^{(n)}; \theta) &= \chi_n(\alpha; \beta) \prod_{j=1}^n \left\{ [t(Z_j; \theta)]^{1 - \Delta_j} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \prod_{i=1}^k [t^{(i)}(Z_j; \theta)]^{\Delta_j^{(i)}} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\chi_n(\alpha; \beta) = [\beta(\alpha + 1)] \sum_{j=1}^n \Delta_j^{(\alpha-1)} \cdot \alpha^{\sum_{j=1}^n \Delta_j^{(0)}}$ - не зависит от θ , $t(x; \theta) = \sum_{i=1}^n t^{(i)}(x; \theta)$ - плотность субраспределения $T(x; \theta)$ и

$$t^{(i)}(x; \theta) = h^{(i)}(x; \theta) K(x; \theta) (1 - G(x; \theta)) = \frac{\partial T^{(i)}(x; \theta)}{\partial x},$$

$i = \overline{1, k}$. Заметим, что согласно представлению (13) статистика $(Z_1, \dots, Z_n; \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ является достаточной статистикой для данной информативной модели. Из (13) следует, что свойство ЛАН для этой модели зависит от свойств плотностей $t^{(i)}, i = \overline{1, k}$. Поскольку $t^{(i)}(x; \theta) = h^{(i)}(x; \theta) [1 - H(x; \theta)]^\alpha [1 - (1 - H(x; \theta))]^\beta$, $t^{(i)}(x; \theta) \leq h^{(i)}(x; \theta)$ и $t(x; \theta) \leq h(x; \theta)$ для всех $i = \overline{1, k}$ и $(x; \theta) \in R^1 \times \Theta$, то часть условий регулярности для справедливости ЛАН сформулируем в терминах субплотностей $\{h^{(i)}, i = \overline{1, k}\}$ в МКР. Сформулируем эти условия.

(У1) Носители субплотностей $N_{h^{(i)}} = \{x: h^{(i)}(x; \theta) > 0\}$, $i = \overline{1, k}$ не зависят от параметра θ и множество $\bigcap_{i=1}^k N_{h^{(i)}} \neq \emptyset$.

(У2) Для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\theta_1 \neq \theta_2$ и $x \in N_{h^{(i)}}$, $h^{(i)}(x; \theta_1) \neq h^{(i)}(x; \theta_2)$, $i = \overline{1, k}$.

(У3) Существуют и конечны для всех x производные $\partial^l h^{(i)}(x; \theta) / \partial \theta^l$, $l = 1, 2; i = \overline{1, k}$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\partial^l h^{(i)}(x; \theta) / \partial \theta^l| dx < \infty, l = 1, 2; i = \overline{1, k}.$$

(У4) Функции $\left\{ \frac{\partial \log t^{(i)}(x; \theta)}{\partial \theta}, i = \overline{1, k}, \frac{\partial \log t(x; \theta)}{\partial \theta} \right\}$

являются функциями ограниченной вариации.

(У5) Информация Фишера

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta) &= \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log t^{(i)}(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dT^{(i)}(x; \theta) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log t(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d[T^{(-1)}(x; \theta) + T^{(0)}(x; \theta)] \end{aligned}$$

является конечной и положительной в точке $\theta = \theta_0$.

Определим эмпирические оценки распределений $N(x; \theta)$, $T^{(m)}(x; \theta)$, $m = -1, 0, 1, \dots, k$ и $T(x; \theta)$:

$$N_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(Z_j < x) = T_n^{(-1)}(x) + T_n^{(0)}(x) + T_n(x),$$

$$T_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta_j^{(m)} I(Z_j < x), m = -1, 0, 1, \dots, k,$$

$$T_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k T_n^{(i)}(x).$$

Далее обозначим $N(x; \theta_0) = N(x)$, $T^{(m)}(x; \theta_0) = T^{(m)}(x)$, $m = -1, 0, 1, \dots, k$ и $T(x; \theta_0) = T(x)$, где $\theta_0 \in \Theta$ истинное значение θ . Пусть $\theta_n = \theta_0 + \frac{u}{\sqrt{n}} \in \Theta$, где $u \in R^1$.

Зададимся СОП

$$\begin{aligned} L_n(u) &= \frac{p_n(\tilde{Z}^{(n)}; \theta_n)}{p_n(\tilde{Z}^{(n)}; \theta_0)} = \\ &= \prod_{j=1}^n \left\{ \prod_{i=1}^k \left[\frac{t^{(i)}(Z_j; \theta_n)}{t^{(i)}(Z_j; \theta_0)} \right]^{\Delta_j^{(i)}} \cdot \left[\frac{t(Z_j; \theta_n)}{t(Z_j; \theta_0)} \right]^{1-\Delta_j} \right\}, \end{aligned}$$

а также его логарифмом

$$\begin{aligned} \log L_n(u) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^k \Delta_j^{(i)} \log \left[\frac{t^{(i)}(Z_j; \theta_n)}{t^{(i)}(Z_j; \theta_0)} \right] + \right. \\ &+ \left. (1 - \Delta_j) \log \left[\frac{t(Z_j; \theta_n)}{t(Z_j; \theta_0)} \right] \right\} = \\ &= n \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left[\frac{t^{(i)}(x; \theta_n)}{t^{(i)}(x; \theta_0)} \right] dT_n^{(i)}(x) \right\} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left[\frac{t(x; \theta_n)}{t(x; \theta_0)} \right] d[T_n^{(-1)}(x) + T_n^{(0)}(x)]. \quad (14) \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 3.1. Пусть справедливы условия регулярности (У1)-(У5). Тогда при каждом $u \in R^1$ для СОП имеет место представление

$$L_n(u) = \exp \{ u \mathbb{W}_n - \frac{u^2}{2} \mathcal{J}(\theta_0) + R_n(u) \},$$

где

$$\mathbb{W}_n = \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log t^{(i)}(x; \theta_0)}{\partial \theta} dn^{-1/2} \tilde{W}_i(T^{(i)}(x); n) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log t(x; \theta_0)}{\partial \theta} dn^{-1/2} [\tilde{W}_{-1}(T^{(-1)}(x); n) + \tilde{W}_0(T^{(0)}(x); n)],$$

и $R_n(u) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по $Q_{\theta_0}^{(n)}$ -вероятности. Здесь $\{\tilde{W}_m(y; n), m = -1, 0, 1, \dots, k\}$ - двухпараметрические винеровские процессы на $[0, 1] \times (0, \infty)$, при этом компоненты вектора $(\tilde{W}_{-1}, \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_k)$ являются независимыми.

Замечание 3.1. Ввиду свойств процессов $\{\tilde{W}_m, m = -1, 0, 1, \dots, k\}$ с.в. \mathbb{W}_n являются суммой независимых стохастических интегралов Ито и при каждом $n \geq 1$:

$$\mathcal{L}(\mathbb{W}_n / Q_{\theta_0}^{(n)}) \stackrel{D}{=} N(0, \mathbb{J}(\theta_0)).$$

Следовательно, утверждение теоремы можно записать в виде: при каждом $u \in R^1$

$$L_n(\tilde{Z}^{(n)}) = u \mathbb{J}^{1/2}(\theta_0) \zeta - \frac{u^2}{2} \mathbb{J}(\theta_0) + R_n(u), \quad (15)$$

где $\zeta \stackrel{D}{=} N(0, 1)$. Из (15) следует ЛАН для СОП L_n в точке θ_0 .

Замечание 3.2. Теорема 3.1 имеет место и в случае векторного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \subset R^s$. В этом случае скалярные величины заменяются на соответствующие скалярные произведения.

Литература

[1] Абдушукуров А.А. Модель случайного цензурирования с двух сторон и критерии независимости для неё // *Доклады АН РУз*. 1994. №11. с.8-9.
 [2] Abdushukurov A.A. Nonparametric estimation of the distribution function based on relative risk function // *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 1998. v.27. №8. p.1991-2012.
 [3] Абдушукуров А.А., Нурмухамедова Н.С. Аппроксимации статистики отношения правдоподобия в модели конкурирующих рисков // *ДАН РУз*. 2012. № 3.
 [4] Абдушукуров А.А., Нурмухамедова Н.С. Аппроксимация статистики отношения правдоподобия в модели конкурирующих рисков при случайном цензурировании с двух сторон. // *Вести НУУз*. 2011. №.4. с. 162-172.
 [5] Бобожонов Ж.А., Нурмухамедова Н.С. Аппроксимация статистики отношения правдоподобия в модели конкурирующих рисков при случайном цензурировании справа. // *Сб. Статистические методы оценивания и проверки*

гипотез. Пермь. Пермский Госуниверситет. 2011. вып.23. с. 152-165.
 [6] [Wald A. Tests of statistical hypothesis concerning several parameters, when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.* 54. 1943. p.426-482.
 [7] Le Cam L. On some asymptotic properties of the maximum likelihood estimates and related Bayes estimates.// *Univ. California Publ. Statist.* 1953. v.1. p.277-330.
 [8] Hajek J. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation // *Proc. Sixth. Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.* -1972. -V.1. -P. 175-194.
 [9] Русас Дж. Контигуальность вероятностных мер. – М. : Мир. 1975.-254с.
 [10] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука. 1979.-527с.
 [11] Van der Vaart A.W. *Asymptotic Statistics*. Cambridge Univ. Press. 1998. 443p.

Проблемы — логисты и закупщики

Людмила Михайловна Агафонова

Сибирский Федеральный университет
Институт экономики и управления
бизнес-процессами, Красноярск
ALM400955@yandex.ru

Лариса Викторовна Хисамутдинова

Сибирский Федеральный университет
Институт экономики и управления
бизнес-процессами, Красноярск
lora.krsk@rambler.ru

Аннотация. *О существующих проблемах взаимодействия отдела логистики и отдела закупок. Пути разрешения этих проблем. Разделение полномочий между отделами.*

Ключевые слова. *Отдел логистики, отдел закупок, стратегический уровень, тактический уровень, операционный уровень*

1 Введение

Задачи, которые стоят перед отделом логистики и отделом закупок, и рычаги, которые они используют для решения этих задач — настолько переплетены между собой, что иногда высшему руководству бывает даже сложно разделить их чётко между ними. Что уж говорить о разрешении проблем в их общем поле деятельности и ответственности за это. Поэтому первое, что надо сделать — это провести по этому полю границу ответственности каждого отдела.

2 Трудности отношений между отделами логистики и закупок

Некоторые руководители, чтобы раз и навсегда определить ответственного за решение любых — будь то глобальных или локальных — задач, делают один из отделов главным, а другой, соответственно, оказывается в подчинённом положении. К сожалению, такое разрубание этого “гордиева узла” не всегда хорошо и для самих отделов, и для компании в целом:

1. В случае, когда логистика начинает подчиняться закупкам, она утрачивает одну из своих основных функций — перестаёт минимизировать затраты! Нет, на операционном уровне эта задача решается, и возможно даже лучше чем раньше, так как больше собственно логистике и нечем заняться, она просто обслуживает потребности закупок, вовремя подгоняя транспорт и качественно размещая товар на складах, делая это по минимальным расценкам рынка. Но ведь в результате фирма может начать проигрывать покрупному: транспорт начинает ездить полупустым, а склад затовариваться пусть и нужными позициями, но купленными в слишком большом количестве — и то, и другое ведёт к серьёзным

издержкам, не оправдываемым даже 100 %-ным уровнем сервиса.

2. Не стоит думать, что подчинение отдела закупок отделу логистики — сильно лучше. Да, затраты — минимальны, причём на всех уровнях и, если дело поставлено правильно, оптимизированы так, чтобы давать и минимальную результирующую сумму по всем этапам. Однако теперь уже закупки упрощаются до уровня отслеживания заявок, оплат поставщикам и поиска новых предложений. При этом всё чаще возникают ситуации оголения товарных остатков, и фирма начинает терять прибыль уже из-за этого. Реальная жизнь всегда сложнее любых формул, и именно поэтому, отдел закупок нужен в принципе, и есть множество ситуаций, когда только специалист по закупкам может заранее предусмотреть необходимость в дополнительном или, наоборот, сокращённом заказе той или иной позиции, например, такие (но не только):

- ожидаемые перебои с этой позицией (начиная с информации от самого поставщика, и заканчивая ежегодными сезонными перебоями с поставками, например, связанными с празднованием Нового года);
- ожидаемый значительный рост цен (объявленный заранее самим поставщиком или же прогнозируемый по каким-то показателям);
- возможность дополнительных скидок при поставке определённого объёма;
- финансовые возможности компании по товарному кредиту и оплатам поставщику;
- закупка совершенно новой позиции;
- закупка частично взаимозаменяемых позиций,
- и многое другое. . .

3. Правда, в случае, когда отделы логистики и закупок вроде как независимы, но при этом их взаимоотношения, уровень и зоны ответственности чётко не очерчены, — всё ещё хуже. Во-первых, такая ситуация обычно быстро скатывается к одному из вариантов, описанных выше, а, во-вторых, зачастую при этом скатывании из-за обострения отношений между сотрудниками

этих отделов — даже частные плюсы из описанных выше вариантов, не проявляются, хотя минусы — обязательно. И самое главное, вне зависимости от того — становится один из отделов главенствующим де-факто или сохраняется статус-кво независимости отделов, отсутствие единого управления на фоне соперничества за главенствующую роль приводит к потере позитивной коммуникации между отделами, которые должны работать в теснейшей связке. В результате, даже самые простые, но нестандартные внешние ситуации могут привести к проблемам, приносящим компании ощутимые убытки, при этом сея ещё большую вражду между отделами и в итоге замыкая этот порочный круг.

3 Пути решения проблемы

Так как же быть?.. Во-первых, нужно определиться с текущей целью компании в целом. Бывают ситуации, когда один из двух первых вариантов — полностью подходит: например, компании надо всеми доступными средствами минимизировать затраты на транспорт и склад — иначе её деятельность просто перестанет приносить прибыль, и в ней будет потерян всякий смысл. В таком случае ничего плохого не будет, если за основу взаимоотношений между отделами будет выбран вариант, когда отдел закупок подчиняется отделу логистики. Или, если компания только выходит на новый для себя рынок и неоптимальные затраты — неизбежны, а вот хороший уровень сервиса — очень важен для привлечения клиентов. Тогда разумно будет выбрать вариант, когда отдел логистики уже подчиняется отделу закупок.

Во-вторых, в компании должен появиться человек, который будет решать стратегические вопросы взаимодействия между этими отделами. Это может быть и кто-то из уже работающих руководителей, и даже главное лицо в компании, но этот человек обязательно должен будет реально заниматься этими вопросами, причем, посвящая им столько времени, сколько понадобится, а не по остаточному принципу. Если происходит выбор в пользу одного из вариантов, описанных в самом начале, то вполне очевидно этим человеком становится начальник доминирующего отдела.

В-третьих, если ни один из отделов не становится главенствующим, то нужно чётко разделить зоны ответственности каждого. Самая главная и самая общая задача отдела логистики и отдела закупок — это управление запасами. Именно в них заморожены основные фонды компании, именно они являются необходимым условием для ведения бизнеса компании, именно затраты на их поддержание и содержание являются основными в бюджете отдела логистики, именно планируя закупку мы можем повлиять

на все показатели будущего товарного остатка. Ясно, что в пополнении запасов в любом случае участвуют оба отдела — давайте детально распишем разделение полномочий между отделами на всех этапах планирования закупок.

Стратегический уровень: схема пополнения запасов.

Первым делом необходимо выработать общую схему пополнения запасов. По-настоящему различных вариантов существует всего несколько, однако уже здесь необходимо учесть многие нюансы:

1. Условия работы с поставщиками, в том числе:
 - (a) срок поставки от момента выставления заявки до прихода товара;
 - (b) корректность отработки поставщиком заявок;
 - (c) максимальные величину и срок товарного кредита у поставщиков;
 - (d) условия поставщика по отгрузкам;
 - (e) наличие страхующих поставщиков и условия работы с ними.
2. Складские, транспортные и финансовые мощности компании, в том числе:
 - (a) максимальную ёмкость склада;
 - (b) максимальную скорость обработки грузов на этапе приёма на склад;
 - (c) пропускные возможности по перевозке грузов;
 - (d) величину собственного капитала компании, с разделением на свободный и вложенный в запасы;
 - (e) возможную величину заёмного капитала и условия по его использованию.
3. Оптимизацию затрат, в том числе:
 - (a) максимальную загрузку транспортных средств;
 - (b) минимизацию в денежном эквиваленте суммарного торгового и страхового запасов;
 - (c) максимизацию уровня сервиса для клиентов по складским запасам;
 - (d) достижение равномерной загруженности склада, транспорта и использования капитала.
4. Алгоритмы работы внутри компании, в том числе:
 - (a) глубину и точность прогнозирования и планирования продаж;
 - (b) регламенты по взаимодействию между отделами.

На данном этапе оба отдела совместно вырабатывают общий каркас будущей системы поставок, договариваются об ограничениях для каждого отдела, рамки которых они не должны выходить. В случае возникновения противоречий — определяющим лицом является тот самый руководитель, который был выбран, чтобы решать стратегические вопросы взаимодействия между этими отделами. В результате должны быть чётко прописаны все спорные вопросы - не должно остаться никакой неясности относительно разных видений общих задач разными отделами.

Тактический уровень: периодичность поставок и нормы запасов, планирование закупок

После выбора общей схемы закупок, можно переходить к её настройке, а именно выбору её параметров, например, периодичности поставок по каждому поставщику и нормы страхового и текущего запасов по каждой позиции. На данном этапе определяющую роль играет отдел логистики, но уже в рамках тех ограничений, которые были наложены на него в результате предыдущего — стратегического этапа планирования: с учётом всех возможных факторов происходит расчёт параметров, уже выбранной модели поставок. Главная цель — выбор таких оптимальных параметров, при которых суммарные издержки при использовании данной модели будут минимальными.

Именно эти параметры становятся входными границами для отдела закупок при тактическом планировании закупок. Но в данном случае эти ограничения - условные, они не запрещают отклоняться от них, а только показывают границу ответственности каждого отдела. Отдел закупок может и даже должен в случае необходимости корректировать данные, полученные из отдела логистики, но в таком случае вся ответственность за результат по получившимся остаткам конкретно этой позиции тоже ложится на отдел закупок. Тоже самое происходит и в случае отсутствия корректировки отделом закупок входных данных от отдела логистики при наличии дестабилизирующего фактора, ответственность за отслеживание которого лежит на отделе закупок.

Операционный уровень

На операционном уровне у каждого отдела свои задачи, не пересекающиеся между собой, поэтому каждый должен отвечать только за свои результаты, действуя при этом в рамках ограничений, определённых на стратегическом и тактическом уровнях планирования.

4 Заключение

В каждом случае противоречивости этих видений необходимо отдельно определить зоны ответственности каждого отдела и накладываемые на них в результате ограничения.

Должен быть налажен регламент взаимодействия между отделами, чтобы информация о завершении различных этапов поставок каждым заказом проходила в обе стороны корректно и своевременно.

Выбор стратегии работы с поставщиком

Людмила Михайловна Агафонова

Сибирский Федеральный университет
Институт экономики и управления
бизнес-процессами, Красноярск
ALM400955@yandex.ru

Лариса Викторовна Хисамутдинова

Сибирский Федеральный университет
Институт экономики и управления
бизнес-процессами, Красноярск
lora.krsk@rambler.ru

Аннотация. *Отдел закупок должен стремиться к созданию партнерских отношений. Поэтому он должен проводить структурированный анализ закупаемой номенклатуры по четырем критериям: объем закупок, доля издержек при создании стоимости; воздействие на конечный результат; техническая комплексность; риск.*

Ключевые слова. *Партнерство, отдел закупок, объем закупок, доля издержек, конечный результат, техническая комплексность, риск, поставщик, партнерские отношения, ABC-анализ XYZ-анализа*

1 Введение

Обострение конкуренции и рост цен заставляют российские компании всерьез задуматься о сокращении затрат. Как показывают исследования, около 50% резервов находятся в области закупок. Остальные 50% можно найти в управлении, организации производства, логистике и других областях деятельности. То есть основной резерв — именно в оптимизации закупки. Многие холдинговые структуры занимаются централизацией закупок. Ведется борьба со злоупотреблениями, вплоть до постоянной видеозаписи переговоров с поставщиками. Все эти примеры демонстрируют стремление организовать закупки максимально эффективно. И вместе с тем руководители регулярно упускают из виду один существенный момент — собственно поставщиков.

2 Партнерские отношения

Типичная ошибка при работе с поставщиками — стремление работать со всеми одинаково. Руководители чаще всего выбирают тот или иной тип отношений с поставщиком с учетом следующих факторов:

- интуиция («мне так кажется»);
- индивидуальная предрасположенность руководителя (кому-то проще устанавливать партнерские отношения, кому-то — оппортунистические);
- расстановка рыночных сил (я слабый — под всех прогибаюсь; сильный — все должны прогибаться под меня);

- личная симпатия или антипатия к руководителю или представителю поставщика.

У всех этих факторов есть нечто общее, а именно: они не имеют никакого отношения к серьезному анализу ситуации внутри и вне предприятия. Другими словами, предприятие во многом строит отношения со своими поставщиками по наитию и ожидает от департамента закупок постоянного снижения затрат, повышения качества закупаемой продукции, сокращения сроков поставки и т. д.

Самый простой, хотя и не всегда самый эффективный путь — занять жесткую позицию на переговорах о закупке и стараться получить самые лучшие условия, невзирая ни на что. Отношения, которые строятся таким образом, называют отношениями по принципу экономической целесообразности, или оппортунистическими. Такой подход в краткосрочной перспективе может дать положительные результаты, но в долгосрочной не всегда эффективен.

Партнерство — это принципиально другой тип отношений с поставщиком. Конечно, возможны и промежуточные варианты. В базе поставщиков предприятия должны присутствовать оба типа отношений: построенные по принципу экономической целесообразности (оппортунистические) и партнерские. Причем, как правило, на несколько партнерских отношений приходится множество оппортунистических. Это связано с тем, что тот и другой тип отношений имеют свои преимущества и недостатки.

Таким образом, устанавливать со всеми поставщиками партнерские отношения экономически нецелесообразно. А работать со всеми только на оппортунистических принципах подчас недальновидно. Оба подхода хороши — вопрос только в том, когда и в отношениях с кем мы их применяем. Тип отношений должен выбираться на основе серьезного анализа. Как показывает практика, во многих российских компаниях это не совсем так.

Тип отношений с поставщиком, а следовательно и переговорную стратегию, гораздо дальновиднее выбирать сознательно, с учетом анализа целого ряда факторов как внутренней, так и внешней среды предприятия. Прежде всего необходимо проанализировать, что же мы закупаем.

Отношения, построенные по принципу экономической целесообразности, подходят для работы с нестратегическими материальными или товарными группами, где не требуется индивидуализация продукта в соответствии с требованиями клиента. В этом случае можно не опасаться того, что эти отношения с поставщиком негативно скажутся на качестве продукта. Речь здесь идет в основном о продуктах и услугах с низкими объемами закупок, хотя могут быть и исключения из правил.

Если же ведутся закупки простых продуктов с высокой степенью стандартизации, то опять-таки имеет смысл прибегать к оппортунистическим отношениям — особенно если поставщики имеют свободные мощности или проблемы со сбытом продукции. В таком случае всегда можно сменить одного поставщика или один продукт на другого поставщика/продукт.

Отдел закупок должен стремиться к созданию партнерских отношений, если речь идет о стратегических материалах или товарных группах. Эти материалы и группы относятся к основным позициям предприятия и поэтому не могут приобретаться где попало.

Если объекты снабжения поступают из отраслей, которые работают с комплексными продуктами, имеющими низкую степень стандартизации, то очень часто требуется создание партнерских отношений с поставщиками. Устанавливать партнерские отношения рекомендуется также в случаях, если снабжение получает продукты и услуги с развивающихся или монополизированных рынков, недостаток ресурсов на которых может привести к созданию «узких мест» при снабжении.

3 Алгоритм структурированного анализа

Структурированный анализ закупаемой номенклатуры проводят по четырем критериям: объем закупок, доля издержек при создании стоимости; воздействие на конечный результат; техническая комплексность; риск, связанный с получением.

Рассмотрим каждую из этих групп подробнее.

1. Объем закупок, доля издержек при создании стоимости. Чем выше объем закупок, чем большую долю в создании конечной стоимости вносит тот или иной закупаемый объект, тем большую отдачу можно получить от построения с поставщиком партнерских отношений. Для сопоставления объемов закупок по различным объектам можно использовать классический ABC-анализ. Причем проводить его стоит не только в стоимостном, но и в количественном выражении.
2. Воздействие на конечный результат. Разные закупаемые объекты оказывают различное влия-

ние на конечный продукт или результаты деятельности торгового предприятия. В торговых компаниях есть ассортимент, который, по мнению клиентов, просто должен присутствовать на полках. Любые перебои с поставками такого ассортимента могут нанести существенный ущерб.

Такая же ситуация наблюдается и в производстве. К примеру, при сборке компьютеров процессор гораздо важнее винтиков в корпусе. Вот почему у большинства на слуху имена крупных производителей процессоров, но практически никто не знает, кто производит винтики.

Чем выше воздействие закупаемого объекта на конечный результат, чем выше важность данной группы материалов или поставщика для принятия решения клиентами (особенно наиболее ценными для предприятия), тем больше оснований для выбора партнерских отношений с поставщиком.

3. Техническая комплексность. Чем проще закупаемые объекты с технической точки зрения, тем более оправданы отношения по принципу экономической целесообразности. Увеличение сложности закупаемых объектов оказывает влияние на целый ряд факторов, склоняющих весы выбора в пользу партнерства. Во-первых, уменьшается количество знаний об особенностях технологии или самого закупаемого продукта (в том числе конструкционных), следовательно, повышается зависимость от знаний поставщиков в области технологий. Во-вторых, существенно увеличиваются затраты при смене поставщика (так называемые издержки переключения).
4. Риск, связанный с получением. Стоит разделять внутренние и внешние риски. Внутренние риски, как правило, связаны с нестабильностью потребления. Оценить ее степень можно с помощью XYZ-анализа. Чем выше перепады потребления, тем большая гибкость требуется от поставщика и тем выше риск не получить требуемое количество продукции в нужное время.

При оценке внешних рисков следует обратить внимание на следующие факторы:

- степень монополизации рынка, количество возможных поставщиков;
- наличие дефицитов различного происхождения, соотношение спроса и предложения;
- политические риски;
- возможные форс-мажорные обстоятельства;
- географическое положение поставщиков и риски, связанные с географическим положением;

- другие возможные угрозы срыва поставок.

Если риски низки, то это аргумент в пользу оппортунистических отношений; если высоки, более оправданны партнерские отношения.

Для материалов, относящихся к стратегическим, стоит выбрать партнерство в отношениях с поставщиками. Для некритических материалов — оппортунистические отношения. А вот применительно к материалам, снабжение которыми вызывает проблемы, и основным материалам однозначного решения нет. Выбор делается индивидуально в каждом конкретном случае.

Определив в результате анализа тип отношений с поставщиком, уже можно приступать и к выбору адекватной переговорной стратегии. Такой подход позволяет принимать взвешенные решения в отношении с поставщиками, планировать тактические действия исходя из обоснованной стратегии работы. Конечно, он требует дополнительных затрат времени и сил закупочного подразделения. Но в то же время позволяет сокращать затраты и повышать степень адаптации предприятия к изменяющимся рыночным условиям не только в краткосрочной, но и в долгосрочной перспективе. К сожалению, он не нашел пока широкого применения.

4 Заключение

Отдел закупок должен стремиться к созданию партнерских отношений, не только, если речь идет о стратегических материалах. Рекомендуется также, если снабжение получает продукты и услуги с развивающихся или монополизированных рынков, недостаток, которых может привести к нарушению, производственного процесса. Для этого необходимо проводить структурированный анализ закупаемой номенклатуры.

Риски распространения разлива нефти

**Сергей Петрович
Амельчугов**

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Научно-исследовательский институт
проблем пожарной безопасности Красноярск
aspr-911@yandex.ru

**Олег Юрьевич
Воробьев**

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярский государственный
торгово-экономический институт
Красноярск
vorob@akadem.ru
oleg.yu.vorobyev@gmail.com

**Александр Тимофеевич
Рвачев**

МЧС России
Москва

Аннотация. Дано определение разлива нефти. Рассмотрены случайно-множественная и средне-множественная модели распространения. Определены элементарные события. Даны эвентологические определения рисков распространения нефтяных разливов.

Ключевые слова. Эвентология, безопасность, риск, угроза, нефтяной разлив, эвентологическая модель распространения разлива.

1 Безопасность: субъект, событие, вероятность, ценность

Смысл в понятие *опасности*¹ вкладывает только субъект (или множество субъектов), который определяет и характеризует опасность. Без субъекта понятие опасности лишено какого бы-то ни было смысла. Опасность — это всегда опасность для субъекта, *субъектная опасность*. Так же как безопасность — это всегда *субъектная безопасность*. Таким образом, и опасность и безопасность — это *субъектные категории*.

Уже давно было замечено и не раз указано [5], что *субъект* не существует без *событий*. Событие есть *бытие субъекта, субъектное бытие, со-бытие*, и только в событии субъект достигает своего предназначения.

В эвентологии [5] всякое событие имеет свою *вероятность*, а понятие вероятности не имеет смысла до тех пор, пока не определено событие, о вероятности которого идет речь. Таким образом, *события не бывает без вероятности, как и вероятности не бывает без события*. Второй неотъемлемой субъектной характеристикой события в эвентологии считается его ценность. Так же, как и в случае вероятности, эвентологическое понятие ценности не имеет смысла до тех пор, пока не указано событие, о ценности которого идет речь: *события не бывает без ценности, как и ценности не бывает без события*

Эвентологическая теория характеризует субъекта тем или иным *множеством событий*, которые прямо

¹ Или безопасности, как отсутствие опасности.

или непрямо связаны с данным субъектом, отражая ту или иную сторону его бытия. Каждое такое множество событий наступает в виде той или иной *ситуации*, того или иного *стечения обстоятельств*, той или иной *комбинации* наступления или ненаступления событий из этого множества, того или иного *террасного события*, создаваемого этим множеством. И каждое такое террасное событие наступает с соответствующей вероятностью. *Набор вероятностей всех террасных событий*, порождаемых данным множеством событий, называется *вероятностным распределением* данного множества событий, а *набор ценностей всех террасных событий* называется его *ценностным распределением*².

Здесь нам интересны те стороны бытия субъекта, те *множества событий* вместе с их *Э-распределениями*, которые порождают его *опасность* или его *безопасность*. Само собой разумеется, что *субъектная опасность* и *субъектная безопасность* — это *относительные категории*, определяемые относительно того *множества событий*, которое всякий раз выбирает сам субъект.

Выводам субъекта о наличии опасности или безопасности при текущем стечении обстоятельств всегда предшествует сознательная или бессознательная *оценка* субъектом *вероятности* и *ценности* причинения или непричинения вреда субъекту данным стечением обстоятельств — *оценка* субъектом *вероятности* и *ценности* данного террасного события. Таким образом, и опасность, и безопасность являются не только *субъектными* и *относительными*, но также и *вероятностными*, и *ценностными* категориями.

2 Опасность: риски и угрозы

В [6] делается резонное предложение подразделить *опасности*, которым подвергается человек, на *риски* и *угрозы*. Действительно, вред субъекту может быть причинен в результате действий:

² *Вероятностное и ценностное распределение* множества события вместе образуют *эвентологическое распределение* (Э-распределение) данного множества событий.

- самого субъекта;
- других субъектов или объектов живой³ и неживой⁴ Природы.

Существуют возможности причинения вреда субъекту в результате действий самого субъекта. Они были отмечены давно и часто им дают название — *риск*. *Риск* — это свойство бытия субъекта, порожаемое неопределенностью результатов деятельности самого субъекта.

Вместе с тем существуют возможности причинения вреда субъекту в результате действий других субъектов, а также внешних или внутренних явлений Природы, которые удобно называть *угрозой*, чтобы отличать от *риска*. *Угроза* — это свойство бытия субъекта, порожаемое неопределенностью результатов деятельности других субъектов, а также внешних и внутренних явлений Природы.

Таким образом, *присутствие или отсутствие* всяких рисков и всяких угроз определяют и представляет в той или иной степени опасность или безопасность для субъекта, иначе говоря, — ту или иную степень *субъектной опасности* или *субъектной безопасности*.

Для субъекта в той или иной степени *опасно* (представляет в той или иной степени *субъектную опасность*) все, что *может причинить субъекту вред*: собственные действия субъекта, действия других субъектов, внешние и внутренние изменения в Природе.

Для субъекта в той или иной степени *безопасно* (представляет в той или иной степени *субъектную безопасность*) все, что *может не причинить субъекту вред*: собственные действия субъекта, действия других субъектов, внешние и внутренние изменения в Природе.

Эвентологическая теория предлагает математический аппарат и методологическую основу для *выявления, определения, измерения и оценивания* множеств событий, которые порождают *субъектные риски* и *субъектные угрозы*, характеризующие *субъектную опасность* и *субъектную безопасность* — сферы бытия субъекта, изменения в которых могут причинить или не причинить вред субъекту; привести его к гибели или отворотить от нее.

3 Опасность и безопасность субъекта

Безопасность субъекта (относительно выбранного им множества событий) — террасное событие (ситуация, стечение обстоятельств), порожаемое данным множеством событий, которое

³Животные, насекомые, бактерии, вирусы и др.

⁴Землетрясения, ураганы, пожары, наводнения, аварии, катастрофы и др.

- не причиняет ущерб здоровью⁵, пище, энергии, собственности, правам, тону, репутации субъекта;
- не угрожает потерей здоровья⁶, пищи, энергии, собственности, прав, тону, репутации субъекта;
- приводит к обретению здоровья⁷, пищи, энергии, собственности, прав, тону, репутации субъекта.

Опасность субъекта (относительно выбранного им множества событий) — террасное событие (ситуация, стечение обстоятельств), порожаемое данным множеством событий, которое

- причиняет ущерб здоровью, пищи, энергии, собственности, правам, тону, репутации субъекта;
- угрожает потерей здоровья, пищи, энергии, собственности, прав, тону, репутации субъекта;
- не приводит к обретению здоровья, пищи, энергии, собственности, прав, тону, репутации субъекта.

4 Эвентологический риск субъекта

В эвентологии каждое событие, в том числе и каждое террасное событие, имеет вероятность и ценность. Множество террасных событий, порожаемых данным множеством событий, характеризуется набором соответствующих вероятностей и ценностей, которые образуют вероятностное и ценностное распределение данного множества событий. Ценностное распределение определяет ценность для субъекта того или иного террасного события, наступающего с соответствующей вероятностью, определяемой вероятностным распределением. Таким образом ценностное и вероятностное распределения данного множества событий определяют *эвентологическую случайную величину*, которая принимает значения ценности террасных событий с вероятностями этих террасных событий и является эвентологической характеристикой данного субъекта. Значения этой эвентологической случайной величины, как функции ценности на террасных событиях, обычно служат числовыми математическими моделями тех *потерь (отрицательные значения ценности)* или *приобретений (положительные значения ценности)*, которые имеет субъект при наступлении террасных событий.

Эвентологическая случайная величина, определяемая данным множеством событий и рассматриваемая как математическая модель субъектных потерь

⁵Гибель субъекта считается максимальным ущербом его здоровью.

⁶Гибель субъекта считается максимальной потерей его здоровья.

⁷Рождение субъекта считается максимальным обретением здоровья.

и субъектных приобретений, называется *эвентологическим риском* этого множества событий. Предметной интерпретацией значений эвентологического риска в зависимости от вида безопасности могут быть размеры потерь или приобретений здоровья, пищи, энергии, собственности, прав, тонуса и репутации субъекта.

5 Риски нефтяных разливов

Все события, которые определяют риски нефтяных разливов можно разделить на три части:

- *неконтролируемые* события, которые характеризуют: *текущее состояние объекта* (параметры работы технологической установки, транспорта, вода, лед, погода, рельеф), *редкие природные явления* (молнии, извержения, землетрясения);
- *слабоконтролируемые* события, которые характеризуют: *редкие антропогенные явления* (нарушения безопасности, аварии, катастрофы);
- *контролируемые* события, которые характеризуют: подготовку персонала, техническое состояние объекта, технологии, организацию и ресурсы сил и средств ликвидации разлива.

Ситуации, связанные с разливом нефти, можно разделить на пять основных стадий:

- *возникновение,*
- *обнаружение,*
- *распространение,*
- *тушение,*
- *профилактика.*

Каждую из этих стадий характеризуют *события*, которые определяют соответствующие *риски распространения разлива нефти*:

- *риск возникновения* разлива нефти определяется техническими параметрами характеризующими среду: состояние объекта, погода, вода, лед, горючие материалы, рельеф, природными (молнии, извержения, землетрясения) и антропогенными (нарушения безопасности, аварии, катастрофы) *событиями*;
- *риск обнаружения* разлива нефти определяется техническими параметрами характеризующими среду: погода, горючие материалы, рельеф) и антропогенными (характеризующими организацию и ресурсы сил и средств ликвидации разлива) *событиями*;
- *риск распространения* разлива нефти определяется событиями, характеризующими обстановку с распространением разлива: погода (ветер, влажность, температура), горючие материалы

(топография, включающая расположение естественных барьеров), рельеф;

- *риск ликвидации* разлива нефти определяется *техническими* (характеризующими разлив: топография, площадь, объем) и *антропогенными* (характеризующими организацию и ресурсы сил и средств ликвидации) *событиями*.
- *риск профилактики* разлива нефти определяется техническими (характеризующими состояние объекта: технологические параметры, погода, горючие материалы, рельеф, обустройство территории) и антропогенными (характеризующими подготовку персонала, организацию и ресурсы сил и средств) *событиями*.

6 Событие в эвентологии

Понимание *события* в эвентологии ничем не отличается от принятого в колмогоровской теории вероятностей [7, 1], где под событием понимается подмножество *пространства всеобщих элементарных исходов* Ω , которое вместе с *алгеброй событий* \mathcal{F} и *вероятностной мерой* \mathbf{P} образует фундаментальную для классической теории вероятностей конструкцию — *всеобщее вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. В соответствии с этой классической моделью *событие* $x \subseteq \Omega$ *наступает только при наступлении такого всеобщего элементарного исхода* $\omega \in \Omega$, *который принадлежит* x , *т.е. только при выполнении отношения принадлежности*: $\omega \in x$.

6.1 Эвентологическое распределение

Обычно интерес представляет не одно, а некоторое конечное множество событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий и разбивающее пространство всеобщих элементарных исходов Ω на 2^N террасных событий

$$\text{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c,$$

где $x \subseteq \Omega$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, а $X^c = \mathfrak{X} - X$, $x^c = \Omega - x$ — дополнения до соответствующих множеств. Так что имеет место террасное разбиение

$$\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \text{ter}(X).$$

Вероятности террасных событий

$$p(X) = \mathbf{P}(\text{ter}(X))$$

образуют набор

$$\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\},$$

который называется *вероятностным распределением* множества событий \mathfrak{X} .

В эвентологии считается [5], что каждое событие представляет для субъекта определенную ценность. Поэтому каждое множество событий \mathfrak{X} имеет, кроме вероятностного, еще и *ценностное распределение*

$$\{v(X), X \subseteq \mathfrak{X}\},$$

где $v(X)$ — ценность террасного события $\text{ter}(X)$.

Вероятностное распределение и *ценностное распределение* множества событий \mathfrak{X} образуют *эвентологическое распределение* (\mathfrak{E} -распределение) \mathfrak{X} .

7 Случайно-множественная и средне-множественная модель распространения

В начале 70-х годов прошлого века была предложена *случайно-множественная модель распространения* [2, 3], на основе которой впоследствии была развита *средне-множественная модель распространения* [4].

Случайно-множественная модель распространения представляет собой последовательность

$$\{K_n, n = 0, 1, \dots\} \quad (7.1)$$

случайных конечных множеств

$$K_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{(2^{\mathfrak{X}})}), \quad (7.2)$$

связанных рекуррентным соотношением⁸

$$K_{n+1} = \bigcup_{x \in K_n} S(x). \quad (7.3)$$

Эта последовательность определяется вероятностным распределением

$$\{p_0(X) = \mathbf{P}(K_0 = X), X \subseteq \mathfrak{X}\} \quad (7.4)$$

начального случайного множества K_0 , и набором *вероятностных распределений одношагового распространения*

$$\{p_1(X|x) = \mathbf{P}(S(x) = X), X \subseteq \mathfrak{X}\} \quad (7.5)$$

независимых в совокупности *случайных множеств*

$$S(x) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{(2^{\mathfrak{X}})}) \quad (7.6)$$

одношагового распространения из $x \in \mathfrak{X}$. Обычно предполагается, что каждое $S(x)$ имеет так называемое *независимо-точечное* распределение, т.е. вероятности одношагового распространения из элемента $x \in \mathfrak{X}$ только в подмножество $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ определяются по формулам:

$$p_1(X|x) = \prod_{y \in X} s(y|x) \prod_{y \in X^c} (1 - s(y|x)), \quad (7.7)$$

⁸Здесь приводится простейшее рекуррентное соотношение из предложенных в [2, 3, 4].

где $X^c = \mathfrak{X} - X$, а

$$s(y|x) = \mathbf{P}(y \in S(x)) \quad (7.8)$$

— *вероятность одношагового распространения*⁹ из x в y . Полагается, что $s(x|x) = 1$.

В рамках случайно-множественной модели распространения определяется вероятностное распределение

$$\{p_n(X|K_0) = \mathbf{P}(K_n = X|K_0), X \subseteq \mathfrak{X}\} \quad (7.9)$$

случайного множества K_n , которого распространение достигает из начального случайного множества K_0 за n шагов ($n = 1, 2, \dots$). В частности, для каждого $y \in \mathfrak{X}$ определяются вероятности n -шагового распространения в y из начального случайного множества K_0 , образующие набор:

$$\{\pi_n(y|K_0) = \mathbf{P}(y \in K_n|K_0), y \in \mathfrak{X}\}. \quad (7.10)$$

Вывести аналитические формулы, связывающие распределение на n -ом шаге (7.9) и вероятности n -шагового распространения (7.10) с исходными параметрами¹⁰, в общем случае до сих пор не представляется возможным из-за теоретических препятствий комбинаторного характера. Хотя в каждом конкретном случае *случайно-множественная модель распространения* позволяет весьма просто статистически оценивать распределения (7.9) и вероятности распространения (7.10), например, методом Монте-Карло, отсутствие аналитических формул остается ее основным недостатком, приводящим к снижению оперативности расчетов.

Этот недостаток удалось преодолеть в *средне-множественной модели распространения*, основанной на разного рода аппроксимациях¹¹ формулы

$$\pi_{n+1}(y|K_0) = 1 - \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p_n(X|K_0) \prod_{x \in X} (1 - s(y|x)), \quad (7.11)$$

которая выводится в рамках случайно-множественной модели распространения и связывает вероятности $(n+1)$ -шагового распространения из K_0 с распределением p_n случайного множества распространения K_n из K_0 . Например, если p_n в формуле (7.11) аппроксимировать независимо-точечным распределением, то аппроксимация, используемая в средне-множественной модели распространения, получается в виде рекуррентной формулы для $y \in \mathfrak{X}$

$$\pi_{n+1}(y|K_0) = 1 - \prod_{x \in \mathfrak{X}} (1 - \pi_n(x|K_0)s(y|x)), \quad (7.12)$$

⁹Т.е. вероятность “захвата” y случайным множеством $S(x)$ за один шаг.

¹⁰Исходными параметрами в случайно-множественной модели распространения служат параметры распределения (7.4) начального случайного множества K_0 и параметры (7.8) распределений (7.5) случайных множеств $S(x)$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$.

¹¹В [4] предлагается использовать три вида аппроксимации вероятностных распределений p_n в этой формуле: “независимая”, “линейная” и “лебеговая”.

которая связывает вероятности $(n+1)$ -шагового распространения π_{n+1} из K_0 в y с вероятностями n -шагового распространения π_n из K_0 в y^{12} .

Таким образом, рекуррентная формула (7.12) средне-множественной модели позволяет вычислять весь набор

$$\{\pi_{n+1}(y|K_0), y \in \mathfrak{X}\} \quad (7.13)$$

вероятностей $(n+1)$ -шагового распространения из K_0 в $y \in \mathfrak{X}$ на основе вероятностей одношагового распространения $s(y|x)$ (7.8) и вычисленного на предыдущем шаге набора

$$\{\pi_n(y|K_0), y \in \mathfrak{X}\} \quad (7.14)$$

вероятностей n -шагового распространения из K_0 в $y \in \mathfrak{X}$. Эта рекуррентная процедура открывает возможность последовательно вычислять наборы вероятностей n -шагового распространения из K_0 в $y \in \mathfrak{X}$, достаточные, чтобы также последовательно вычислять такие средне-множественные характеристики случайного множества K_n , как его *сет-медиана* и его *сет-ожидание*¹³, которые формируют прогноз динамики средне-множественного распространения в пределах требуемого числа шагов.

8 Эвентологическая модель распространения нефтяного разлива

Чтобы пояснить, в чем заключается отличие событийного подхода в описании моделей распространения нефтяного разлива от традиционного, изложим обе версии: сначала — привычную предметную интерпретацию случайно-множественной модели распространения, а затем — ее же интерпретацию на языке событий в виде эвентологической модели (Э-модели) распространения.

¹²Заметим, что при $n = 0$ вероятности 0-шагового распространения $\pi_0(x|K_0)$ из K_0 в $x \in \mathfrak{X}$ определяются исходным распределением начального случайного множества K_0 по формуле: $\pi_0(x|K_0) = \mathbf{P}(x \in K_0) = \sum_{x \in X} p_0(x)$.

¹³В силу того, что обе эти средне-множественные характеристики случайного множества K_n определяются [3] только набором вероятностей n -шагового распространения из K_0 в $y \in \mathfrak{X}$: *сет-медиана* определяется формулой

$$\text{Med}(K_n|K_0) = \{y \in \mathfrak{X} : \pi_n(y|K_0) \geq 1/2\},$$

а *сет-ожидание* $\mathcal{E}(K_n|K_0) = \mathcal{E}$ — двумя соотношениями:

$$\{y : \pi_n(y|K_0) > h_{K_n}\} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \{y : \pi_n(y|K_0) \geq h_{K_n}\},$$

$$|\mathcal{E}| - \mathbf{E}(|K_n|K_0) \rightarrow \min_{\mathcal{E}},$$

где $\mathbf{E}(|K_n|K_0) = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} |X| p_n(X|K_0) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} \pi_n(y|K_0)$ — математическое ожидание мощности $|K_n|K_0|$ случайного множества K_n , распространяемого из K_0 ; а уровень h_{K_n} определяется равенствами:

$$|\{y : \pi_n(y|K_0) > h_{K_n}\}| \leq \mathbf{E}(|K_n|K_0) \leq |\{y : \pi_n(y|K_0) \geq h_{K_n}\}|.$$

8.1 Предметная интерпретация

Основными приложениями *случайно-множественной* и *средне-множественной* модели распространения являются модели распространения разлива нефти [2, 3, 4]. Под конечным множеством \mathfrak{X} подразумевается конечное множество элементов $x \in \mathfrak{X}$, на которые с той или иной подробностью разбита некоторая [лесная] территория. Элементами могут быть территория, объекты, отдельные помещения в зданиях, части промышленных комплексов и др. При $n = 0$ случайное конечное множество K_0 — это случайно-множественная модель очага пожара, т.е. набор альтернативных значений — подмножеств $X \subseteq \mathfrak{X}$, в виде которых пожар может возникнуть в начальный момент времени $n = 0$ с вероятностным распределением $p_0(X) = \mathbf{P}(K_0 = X)$. Например, “точечный” очаг $x_0 \in \mathfrak{X}$ в этой модели имеет вырожденное распределение: $p_0(\{x_0\}) = \mathbf{P}(K_0 = \{x_0\}) = 1$, которое означает, что в начальный момент пожаром “целиком” захвачен только один элемент $x_0 \in \mathfrak{X}$. Исходные параметры $s(y|x)$ интерпретируются как вероятности одношагового распространения пожара в элемент y из “точечного” очага x . Эти исходные параметры определяют вероятностные распределения случайных множеств $S(x)$ — случайно-множественных моделей одношагового распространения пожара из каждого “точечного” очага $x \in \mathfrak{X}$. Случайные конечные множества K_{n+1} и K_n элементов, захваченных пожаром в соседние моменты времени, связаны рекуррентным соотношением (7.3). На очередном n -ом шаге возможными значениями случайного конечного множества K_n считаются подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$ элементов территории \mathfrak{X} , которые могут быть захвачены разливом нефти из очага K_0 за n шагов с вероятностным распределением $p_n(K_n|K_0) = \mathbf{P}(K_n = X|K_0)$.

8.2 Эвентологическая интерпретация

Насколько бы не казалась привычной и естественной предметная интерпретация моделей распространения, она начинает заметно проигрывать их эвентологической интерпретации, как только процесс моделирования выходит на уровень, который требует перевода описания феномена разлива нефти с обычного языка на строгий язык событий¹⁴ и математических формул.

Главным препятствием на этом пути оказывается привычка традиционного мышления отождествлять объекты с событиями, в виде которых эти объекты входят в бытие субъекта. Однако каждый объект в зависимости от стечения обстоятельств может входить в бытие субъекта в виде различных событий.

¹⁴Имеется в виду математический язык эвентологической теории, в которой событие понимается как колмогоровское событие — подмножество пространства всеобщих элементарных исходов.

Поэтому в процессе моделирования важно четко указывать на само моделируемое событие, которое происходит с объектом, а не на объект вообще.

Все сказанное следует из эвентологического принципа, который, объединяя две симметричные мысли: “Материя — это всего лишь удобный способ связывания событий воедино” [8] и “Разум — это всего лишь удобный способ связывания событий воедино” [5], для практических целей может быть сформулирован так: “Всё, что должно быть представлено, может быть представлено как множество событий”.

В рамках эвентологической интерпретации конечное множество \mathfrak{X} элементов площади начинает на каждом n -ом шаге играть, хотя и важную, но второстепенную роль множества своего рода имен для играющих главную роль элементарных [лесо]пожарных событий x_n , которые образуют на n -ом шаге множество элементарных [лесо]пожарных событий $\mathfrak{X}_n = \{x_n, x \in \mathfrak{X}\}$. Итак,

Определение (элементарное событие разлива нефти). Для конечного множества \mathfrak{X} элементов площади и произвольного $n = 0, 1, \dots$ элементарным нефтяным событием $x_n \in \mathfrak{X}_n = \{x_n, x \in \mathfrak{X}\}$ называется такое колмогоровское событие $x_n \subseteq \Omega$, которое наступает на n -ом шаге тогда и только тогда, когда разлив нефти полностью захватывает на этом шаге элемент площади $x \in \mathfrak{X}$.

Замечание 1. Заметим, что в силу этого определения $\mathfrak{X}_n \subseteq \mathcal{F}$ для $n = 0, 1, \dots$, т.е. все множества элементарных пожарных событий, образующие последовательность $\{\mathfrak{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$, содержатся в алгебре событий \mathcal{F} всеобщего вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Для любого событийного феномена эвентология предлагает в рамках всеобщего вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ два эквивалентных способа описания — две эквивалентные эвентологические модели: множество событий

$$\mathfrak{X}_n \subset \mathcal{F} \quad (I)$$

и случайное множество событий

$$K_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}_n}, 2^{(2^{\mathfrak{X}_n})}), \quad (II)$$

вторая из которых по обозначениям почти не отличается от изложенной выше предметной интерпретации случайно-множественной модели распространения.

I. Множество событий. В качестве множества колмогоровских событий множество элементарных событий разлива нефти $\mathfrak{X}_n \subset \mathcal{F}$ имеет на n -ом шаге вероятностное распределение

$$\{p_n(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}, \quad (Ia)$$

где

$$p_n(X) = \mathbf{P}(\text{ter}_n(X)), \quad (Ib)$$

— вероятность террасного события

$$\text{ter}_n(X) = \bigcap_{x \in X} x_n \bigcap_{x \in X^c} x_n^c \subset \Omega, \quad (Ic)$$

которое наступает, когда разливом на n -ом шаге полностью захвачены только элементы $x \in X$, и где $X^c = \mathfrak{X} - X$, $x_n^c = \Omega - x_n$ — дополнения до соответствующих множеств.

II. Случайное множество событий. В качестве случайного множества колмогоровских событий случайно-множество элементарных событий разлива нефти $K_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}_n}, 2^{(2^{\mathfrak{X}_n})})$ имеет на n -ом шаге вероятностное распределение

$$\{p_n(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}, \quad (IIa)$$

где

$$p_n(X) = \mathbf{P}(\{K_n = X_n\}), \quad (IIb)$$

— вероятность события

$$\begin{aligned} & \{K_n = X_n\} = \\ & = \left\{ \omega : K_n(\omega) = X_n = \{x_n, x \in X\} \right\} \subset \Omega, \end{aligned} \quad (IIc)$$

которое совпадает с террасным событием (Ic):

$$\{K_n = X_n\} = \text{ter}_n(X),$$

что влечет совпадение вероятностных распределений (Ia) и (IIa) и доказывает эквивалентность двух эвентологических моделей (I) и (II).

Итак, входные параметры случайно-множественной модели распространения включают:

- начальное вероятностное распределение p_0 (7.4) случайного множества K_0 , которое предметно интерпретируется как распределение очага разлива нефти K_0 на нулевом шаге, и в частном случае может быть “вырожденным” в виде одного “очагового” элемента: $K_0 = \{x_0\}$, где $x \in \mathfrak{X}$, или целого “очагового” подмножества элементов: $K_0 = X_0$, где $X \subseteq \mathfrak{X}$;
- вероятности одношагового распространения $s(y|x)$ (7.8), предметно интерпретируемые как вероятности 1-шагового распространения разлива нефти из “точечного” очага $x \in \mathfrak{X}$ в элемент $y \in \mathfrak{X}$.

Выходом случайно-множественной модели распространения служат:

- вероятности n -шагового распространения $\pi_n(y|K_0)$ (7.10) из K_0 в $y \in \mathfrak{X}$, которые предметно интерпретируются как вероятности захвата элемента y за n шагов разливом нефти, распространяющимся из K_0 .

I-я Э-модель распространения. Начальное вероятностное распределение p_0 в рамках I-й Э-модели определяется по схеме (Ia), (Ib), (Ic) как распределение на нулевом шаге множества элементарных событий разлива нефти

$$\mathfrak{X}_0 = \{x_0, x \in \mathfrak{X}\} \subset \mathcal{F},$$

состоящее из вероятностей террасных событий на нулевом шаге для $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$p_0(X) = \mathbf{P}(\text{ter}_0(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x_0 \bigcap_{x \in X^c} x_0^c\right).$$

Вероятности одношагового распространения $s(y|x)$ в рамках I-й Э-модели определяются как условные вероятности

$$s(y|x) = \mathbf{P}(y_{n+1}|x_n) = \frac{\mathbf{P}(y_{n+1} \cap x_n)}{\mathbf{P}(x_n)}, \quad (8.1)$$

по предположению не меняющиеся при изменении шага $n = 0, 1, \dots$, где $x_n \in \mathfrak{X}_n, y_{n+1} \in \mathfrak{X}_{n+1}$ — элементарные события нефтяного разлива.

II-я Э-модель распространения. Начальное вероятностное распределение p_0 в рамках II-й Э-модели определяется по схеме (IIa), (IIb), (IIc) как распределение на нулевом шаге случайного множества элементарных событий нефтяного разлива.

$$K_0 : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}_0}, 2^{(2^{\mathfrak{X}_0})})$$

состоящее из вероятностей его значений — подмножеств $X_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$ для $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$p_0(X) = \mathbf{P}(K_0 = X_0).$$

Вероятности одношагового распространения $s(y|x)$ в рамках II-й Э-модели определяются как условные вероятности

$$\begin{aligned} s(y|x) &= \mathbf{P}(y_{n+1} \in K_{n+1} | x_n \in K_n) = \\ &= \frac{\mathbf{P}(\{y_{n+1} \in K_{n+1}\} \cap \{x_n \in K_n\})}{\mathbf{P}(\{x_n \in K_n\})}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

по предположению не меняющиеся при изменении шага $n = 0, 1, \dots$, где $x_n \in \mathfrak{X}_n, y_{n+1} \in \mathfrak{X}_{n+1}$ — элементарные события нефтяного разлива.

9 Эвентологические определения рисков разлива нефти

9.1 Риск возникновения

Определение (элементарное событие возникновения разлива нефти). Для конечного множества \mathfrak{X} элементов территории и произвольного

$n = 0, 1, \dots$ элементарным событием возникновения нефтяного разлива $x_n^{(0)} \in \mathfrak{X}_n^{(0)} = \{x_n^{(0)}, x \in \mathfrak{X}\}$ называется такое колмогоровское событие $x_n^{(0)} \subseteq \Omega$, которое наступает на n -ом шаге тогда и только тогда, когда на этом шаге [нефтяной разлив возникает на элементе территории $x \in \mathfrak{X}$, захватывая его полностью.

Элементарный риск возникновения, или риск возникновения нефтяного разлива на элементе $x \in \mathfrak{X}$ на шаге n определяется элементарным событием разлива нефти $x_n^{(0)}$.

Риск возникновения нефтяного разлива на множестве элементов \mathfrak{X} на шаге n определяется множеством элементарных событий разлива нефти

$$\mathfrak{X}_n^{(0)} = \{x_n^{(0)}, x \in \mathfrak{X}\} \quad (9.0)$$

с вероятностным распределением $p_n^{(0)}$ и ценностным распределением $v_n^{(0)}$.

9.2 Риск обнаружения

Определение (элементарное событие обнаружения нефтяного разлива). Для конечного множества \mathfrak{X} элементов территории и произвольного $n = 0, 1, \dots$ элементарным событием обнаружения нефтяного разлива $x_n^{(1)} \in \mathfrak{X}_n^{(1)} = \{x_n^{(1)}, x \in \mathfrak{X}\}$ называется такое колмогоровское событие $x_n^{(1)} \subseteq \Omega$, которое наступает на n -ом шаге тогда и только тогда, когда на этом шаге нефтяной разлив обнаруживается полностью захватившим элемент территории $x \in \mathfrak{X}$.

Элементарный риск обнаружения, или риск обнаружения нефтяного разлива на элементе $x \in \mathfrak{X}$ и шаге n определяется событием разлива нефти

$$x_n^{(1)} \cup x_n = x_n^{(1)} \cap x_n^c + x_n^{(1)} \cap x_n + (x_n^{(1)})^c \cap x_n, \quad (9.1)$$

которое заключается¹⁵ либо в “обнаружении” несуществующего нефтяного разлива, либо в успешном обнаружении нефтяного разлива, либо в разливе нефти без обнаружения на элементе $x \in \mathfrak{X}$.

Риск обнаружения нефтяного разлива на множестве элементов \mathfrak{X} на шаге n определяется множеством элементарных событий разлива нефти

$$\mathfrak{X}_n^{(1)} \cup \mathfrak{X}_n = \{x_n^{(1)} \cup x_n, x \in \mathfrak{X}\}$$

с вероятностным распределением $p_n^{(1 \cup)}$ и ценностным распределением $v_n^{(1 \cup)}$.

9.3 Риск распространения

Определение (элементарное событие разлива нефти). Для конечного множества \mathfrak{X} элементов территории и произвольного $n = 0, 1, \dots$ элементарным

¹⁵В порядке следования слагаемых в правой части формулы (9.1).

событием разлива нефти $x_n \in \mathfrak{X}_n = \{x_n, x \in \mathfrak{X}\}$ называется такое колмогоровское событие $x_n \subseteq \Omega$, которое наступает на n -ом шаге тогда и только тогда, когда нефтяной разлив полностью захватывает на этом шаге элемент территории $x \in \mathfrak{X}$.

Элементарный риск распространения, или риск распространения нефтяного разлива на элемент $x \in \mathfrak{X}$ на шаге n определяется элементарным событием разлива нефти x_n .

Риск распространения нефтяного разлива на множестве элементов \mathfrak{X} на шаге n определяется множеством элементарных событий разлива нефти

$$\mathfrak{X}_n = \{x_n, x \in \mathfrak{X}\} \quad (9.2)$$

с вероятностным распределением p_n и ценностным распределением v_n .

9.4 Риск ликвидации

Определение (элементарное событие ликвидации разлива нефти). Для конечного множества \mathfrak{X} элементов территории и произвольного $n = 0, 1, \dots$ элементарным событием ликвидации разлива нефти $x_n^{(3)} \in \mathfrak{X}_n^{(3)} = \{x_n^{(3)}, x \in \mathfrak{X}\}$ называется такое колмогоровское событие $x_n^{(3)} \subseteq \Omega$, которое наступает на n -ом шаге тогда и только тогда, когда на этом шаге разлив нефти подвергается полному воздействию средств ликвидации на элементе площади территории $x \in \mathfrak{X}$.

Элементарный риск ликвидации, или риск ликвидации разлива нефти на элементе $x \in \mathfrak{X}$ и шаге n определяется событием нефтяного разлива

$$x_n^{(3)} \cup x_n = x_n^{(3)} \cap x_n^c + x_n^{(3)} \cap x_n + (x_n^{(3)})^c \cap x_n, \quad (9.3)$$

которое заключается¹⁶ либо "ликвидации" несуществующего разлива нефти, либо в безуспешной ликвидации разлива нефти, либо в разливе нефти без ликвидации на элементе $x \in \mathfrak{X}$.

Риск ликвидации разлива нефти на множестве элементов \mathfrak{X} на шаге n определяется множеством элементарных событий нефтяного разлива

$$\mathfrak{X}_n^{(3)}(\cup) \mathfrak{X}_n = \{x_n^{(3)} \cup x_n, x \in \mathfrak{X}\}$$

с вероятностным распределением $p_n^{(3\cup)}$ и ценностным распределением $v_n^{(3\cup)}$.

9.5 Риск профилактики

Определение (элементарное событие профилактики нефтяного разлива). Для конечного множества \mathfrak{X} элементов территории и произвольного

¹⁶В порядке следования слагаемых в правой части формулы (9.3).

$n = 0, 1, \dots$ элементарным событием профилактики нефтяного разлива $x_n^{(4)} \in \mathfrak{X}_n^{(4)} = \{x_n^{(4)}, x \in \mathfrak{X}\}$ называется такое колмогоровское событие $x_n^{(4)} \subseteq \Omega$, которое наступает на n -ом шаге тогда и только тогда, когда на этом шаге площадь подвергается полному воздействию средств профилактики на элементе $x \in \mathfrak{X}$.

Элементарный риск профилактики, или риск профилактики нефтяного разлива на элементе $x \in \mathfrak{X}$ и шаге n определяется событием разлива нефти

$$x_n^{(4)} \cup x_n = x_n^{(4)} \cap x_n^c + x_n^{(4)} \cap x_n + (x_n^{(4)})^c \cap x_n, \quad (9.4)$$

которое заключается¹⁷ либо в успешной профилактике разлива нефти, либо в безуспешной профилактике разлива нефти, либо в разливе нефти без профилактики на элементе $x \in \mathfrak{X}$.

Риск профилактики нефтяного разлива на множестве элементов \mathfrak{X} на шаге n определяется множеством элементарных событий разлива нефти

$$\mathfrak{X}_n^{(4)}(\cup) \mathfrak{X}_n = \{x_n^{(4)} \cup x_n, x \in \mathfrak{X}\}$$

с вероятностным распределением $p_n^{(4\cup)}$ и ценностным распределением $v_n^{(4\cup)}$.

Элементарные риски разлива нефти характеризуются вероятностью и ценностью соответствующих элементарных событий разлива нефти. Риски разлива нефти характеризуются вероятностным распределением множества элементов площади, для каждого из которых определен элементарный риск разлива нефти.

Список литературы

- [1] А. Н. Колмогоров. *Основные понятия теории вероятностей*, 2-е изд. Наука, М., 1974, 120с.
- [2] О. Ю. Воробьев. *Вероятностное множественное моделирование*. Наука, Новосибирск, 1978.
- [3] О. Ю. Воробьев. *Среднемерное моделирование*. Наука, Москва, 1984.
- [4] А. О. Воробьев. Прямые и обратные задачи для моделей распространения пространственных рисков. *Автореферат диссертации ... канд. физ.-мат. наук*, Красноярск, КГТУ:1-23, 1998.
- [5] О. Ю. Воробьев. *Эвентология*. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с.
- [6] Г. А. Атаманов. Основные виды безопасности антропоных систем и их иерархия. *Проблемы безопасности*, 2(10), 2010, http://rosichi.org/wp-content/uploads/2010/11/Атаманов_Таксономия-безопасности.pdf.
- [7] А. Н. Колмогоров. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*. Ergebnisse der Mathematik, Berlin, 1933.
- [8] В. А. W. Russell. *History of Western Philosophy and its Connections with Political and Social Circumstances from the Earliest Times to the Present Day*. George Allen & Unwin, London, 1946.

¹⁷В порядке следования слагаемых в правой части формулы (9.4).

Создание системы эффективного управления подготовки и оценки боеспособности индивидуумов и коллективов с учетом их физиологического, психологического состояния, социальных и эргономических (бытовых) особенностей

Регина Игоревна Ашукявичуте

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Аннотация. *Целью исследований является создание системы эффективного управления подготовки и оценки боеспособности с учетом их физиологического, психологического состояния, социальных и эргономических (бытовых) особенностей.*

Ключевые слова. *Ликвидация пожаров и ЧС.*

Проанализировав мировой опыт управления персоналом на опасных промышленных объектах, включая нефтяную и газовую промышленность к реагированию на чрезвычайные ситуации, разработана система эффективного управления подготовки и оценки боеспособности персонала в чрезвычайных ситуациях с учетом их физиологического, психологического состояния, социальных и эргономических (бытовых) особенностей.

Аварии и катастрофы на объектах угольной промышленности, особенно в шахтах ежегодно уносят десятки жизней и требуют не только экстренных мер по их ликвидации, но, главное, знаний и умений каждого, решительных и осмысленных действий руководящего состава всех уровней в сложившихся чрезвычайных ситуациях.

Целью является:

- обеспечить безопасность персонала на объектах;
- свести к минимуму человеческие потери на объектах;
- улучшить экономическое положение компании;
- обучить персонал самоспасению.

Специальное обучение для персонала может проводиться в естественной среде функционирования опасного промышленного объекта с целью обучения персонала специфическим процедурам и/или работе с оборудованием в чрезвычайных ситуациях, например, местным эвакуационным оборудованием.

Главная задача персонала без определенных обязанностей реагирования на чрезвычайные ситуации связана с их собственной личной безопасностью, эвакуацией и выживанием. В частности, методы эвакуации,

поднятие тревоги, сбор в соответствии с инструкцией, подготовка к эвакуации с объекта и, в случае необходимости, использование методов и оборудования самоспасения.

К сотрудникам, которые не часто работают на опасных промышленных объектах и поэтому не участвуют в регулярных тренировках, руководитель объекта должен принять решение, если необходимо, о проведении повторных курсов по основам безопасности на опасных промышленных объектах и подготовке к реагированию на чрезвычайную ситуацию. Медицинская справка от компании и/или результаты медицинского обследования должны быть представлены до начала обучения. Медицинская справка от компании должна быть непременно заполнена до поездок на опасные промышленные объекты. Персонал с определенными обязанностями реагирования на чрезвычайные ситуации должен пройти обучение и оценку определенных обязанностей по реагированию на чрезвычайные ситуации.

Руководитель объекта должен определить главные функции и обязанности каждого отдельного рабочего, необходимые в чрезвычайных ситуациях.

Для оценки ожидаемого уровня компетенции работника должны применяться экзаменационные листы, как помощь в оценке компетенции во время обучения и упражнений. Однако не все обязанности чрезвычайного реагирования могут быть полностью оценены во время обучения. Руководитель объекта, поэтому должен обеспечить оценку тех уровней компетентности, которые могут быть проверены только относительно опасных промышленных объектах, и в этом случае может использоваться экзаменационный лист или иной альтернативный метод.

Практика на опасном промышленном объекте проводится в соответствии с расписанием изложенном в системе управления по реагированию на чрезвычайные ситуации.

Общая отраслевая практика требует разработки эффективного управления реагирования на чрезвычайные ситуации и требует от руководителя объекта, после консультаций с лицами, которые, вероятно, будут

задействованы в чрезвычайных ситуациях, подготовить и, по мере необходимости корректировать систему управления реагирования на чрезвычайные ситуации. Эта система должна проверяться на практике так часто, как это возможно.

После обучения и оценки компетентности персонала в выполнении своих ролей в чрезвычайных ситуациях, руководителю объекта по возможности следует проводить регулярные практические занятия для поддержания уровня компетентности в этих ролях. Этот процесс может проходить через курсы начальной подготовки с последующей учебной программой, с периодичностью в сочетании с практикой на опасных промышленных объектах.

Разработанная система позволит:

1. оперативно реагировать и контролировать чрезвычайные ситуации;
2. персоналу "не впадать в паническое состояние" и адекватно действовать в сложившейся обстановке;
3. приведет к снижению материальных потерь;
4. приведет к снижению человеческих потерь на объектах;
5. улучшит экономическое положение предприятий.

Множества двудольных множеств событий и их применение

Баранова Ирина Владимировна

Сибирский Федеральный Университет
Институт математики
Красноярск
irinabar@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается понятие множества двудольных множеств событий, состоящее из множеств событий, первая доля которых определяется случайными величинами, а вторая — случайными множествами. Приводится вид эвентологического распределения множества двудольных множеств. Находятся основные характеристики данного множества. Рассматриваются практические задачи применения данного множества.

Ключевые слова. Двудольное множество событий, двудольное множество случайных элементов, эвентологическое распределение, множество двудольных множеств событий, сет-операции по Минковскому.

1 Введение

Данная работа посвящена изучению множества двудольных множеств событий. Довольно часто на практике, особенно в прикладных областях, встречаются сложные системы, поведение которых характеризуется разнотипными данными: числовыми и множественными. К числу таких областей человеческой деятельности можно отнести здравоохранение, технику, экономику, финансы, страхование, психологию, социологию, экологию, биологию, филологию, лингвистику, педагогику и другие.

Основные трудности при проведении анализа таких систем заключаются в сложной структуре зависимости между элементами системы, большом числе элементов и их разнотипности. Поэтому для устранения этих трудностей был предложен метод двудольных множеств случайных событий [3, 4, 2]. Согласно данному методу каждому элементу системы было предложено поставить в соответствие двудольное множество случайных событий, которое представляет собой объединение двух множеств событий, первая доля которого определяется случайными величинами, а вторая — случайными множествами.

В данной работе рассматривается эвентологическое распределение множества двудольных множеств событий. Особое внимание уделяется применению данного множества.

2 Двудольное множество случайных элементов и двудольное множество случайных событий

В ситуации, когда поведение каждого элемента сложной системы характеризуется данными, одна часть которых — числовая, а другая — множественная, объект, порождающий данную статистику, может быть представим как объединение двух долей: случайных величин и случайных множеств событий.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, где \mathcal{F} — алгебра событий, случайные события $x, y, \dots \in \mathcal{F}$ — элементы алгебры \mathcal{F} , на которой определена вероятность \mathbf{P} . Множество избранных случайных событий $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$.

Определение 1. Случайное множество событий под \mathfrak{X} определяется как измеримое отображение

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}),$$

где $2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств множества \mathfrak{X} .

В методе было предложено случайную величину и случайное конечное множество событий рассматривать как реализацию случайного элемента, и объект, порождающий статистику, — рассматривать как двудольное множество случайных элементов.

Определение 2. Двудольным множеством случайных элементов называется множество $\{\xi, \mathbf{K}\}$, представимое в следующем виде:

$$\{\xi, \mathbf{K}\} = \xi \cup \mathbf{K} = \{\xi_a, a \in A, K_\beta, \beta \in B\}, \quad (1)$$

здесь первая доля — это случайные величины $\xi = \{\xi_a, a \in A\}$, вторая — случайные множества событий $\mathbf{K} = \{K_\beta, \beta \in B\}$, A — множество индексов случайных величин, B — множество индексов случайных множеств событий.

События, которые порождаются двудольным множеством случайных элементов, будем называть множеством случайных событий.

Определение 3. Двудольное множество случайных событий представляет собой объединение двух множеств — множества событий, которое определяется случайными величинами, и множества со-

блтий, которое определяется случайными множествами событий:

$$\{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\} = \{\mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta, a \in A, \beta \in B\}. \quad (2)$$

Полной характеристикой двудольного множества случайных событий служит его эвентологическое распределение. В работе [2] были найдены все формы эвентологического распределения двудольного множества случайных событий. Приведем ниже вид для одного из них.

Распределение вероятностей событий двудольного множества $\{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\}$:

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{a \in A} \left\{ \bigcap_{y \neq r} \{\xi = y\}^c \right\} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B\right), \quad (3)$$

$$x_\beta \in \mathfrak{X}, \beta \in B,$$

$$\mathbf{r} = \{r_a, r_a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbf{X} = \{X_\beta, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta\}.$$

На практике работать с такими распределения достаточно сложно. Поэтому в [3] было предложено использовать для их оценивания сет-операции по Минковскому.

3 Сет-операции по Минковскому над двудольными множествами случайных событий

В работе [3] было введено понятие произвольной операции по Минковскому над двумя двудольными множествами событий и ее вероятность.

Пусть имеются два двудольных множества $s^1 = \{\mathcal{Y}_a^1, \mathfrak{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B\}$ и $s^2 = \{\mathcal{Y}_a^2, \mathfrak{X}_\beta^2, a \in A, \beta \in B\}$.

Определение 4. Произвольной операцией по Минковскому над двумя двудольными множествами событий s^1 и s^2 называется теоретико-множественная операция (сет-операция), которая представляется как множество событий, полученных с помощью операций по Минковскому над соответствующими событиями из каждой доли:

$$s1(\mathcal{O})s2 = \left\{ \mathcal{Y}_a^1(\mathcal{O})\mathcal{Y}_a^2, \mathfrak{X}_\beta^1(\mathcal{O})\mathfrak{X}_\beta^2, a \in A, \beta \in B \right\} = \left\{ \mathcal{Y}_a^1(r_a)\mathcal{O}\mathcal{Y}_a^2(r_a), X_\beta^1\mathcal{O}X_\beta^2, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, r_a \in \mathcal{R}_a, a \in A, \beta \in B \right\}. \quad (4)$$

Здесь $\mathcal{Y}_a^1, \mathcal{Y}_a^2 \subseteq \mathcal{Y}_a$, $\mathfrak{X}_\beta^1, \mathfrak{X}_\beta^2 \subseteq \mathfrak{X}_\beta$. Вероятность произвольной операции определяется как

$$\mathbf{P}(s^1(\mathcal{O})s^2) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^1(r_a)\mathcal{O}\mathcal{Y}_a^2(r_a)) + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^1\mathcal{O}X_\beta^2). \quad (5)$$

Примером такой операции является сет-операция симметрической разности по Минковскому двух двудольных множеств событий.

Сет-операция симметрической разности по Минковскому двух двудольных множеств s^1 и s^2 имеет следующий вид:

$$s1(\Delta)s2 = \left\{ \mathcal{Y}_a^1(r_a)\Delta\mathcal{Y}_a^2(r_a), X_\beta^1\Delta X_\beta^2, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, r_a \in \mathcal{R}_a, a \in A, \beta \in B \right\}. \quad (6)$$

Вероятность симметрической разности равна

$$\mathbf{P}(s^1(\Delta)s^2) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^1(r_a)\Delta\mathcal{Y}_a^2(r_a)) + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^1\Delta X_\beta^2). \quad (7)$$

В [2] было доказано, что вероятность сет-операции симметрической разности по Минковскому двудольных множеств событий является псевдометрикой между ними. Поэтому было предложено использовать ее для измерения расстояния между двудольными множествами событий.

4 Понятие событие-терраски двудольного множества событий

Обозначим двудольное множество случайных событий, представленное в формуле (2), следующим образом:

$$Z = \{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\} = \{\mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta, a \in A, \beta \in B\}.$$

Пусть задано двудольное множество случайных событий s , являющееся подмножеством двудольного множества событий Z (т.е. $s \subseteq Z$):

$$s = \{\mathcal{Y}_{s_A}, \mathfrak{X}_{s_B}, s_A \subseteq A, s_B \subseteq B\}.$$

Определение 5. Событие-терраска двудольного множества случайных событий s представляет собой набор непересекающиеся событий, где каждое событие является подмножеством соответствующего множества событий \mathcal{Y}_a или \mathfrak{X}_β :

$$\begin{aligned} \text{ter}(s) &= \text{ter}\{\mathcal{Y}_{s_A}, \mathfrak{X}_{s_B}\} = \\ &= \bigcap_{a \in s_A} \text{ter}(\mathcal{Y}_a) \bigcap_{\beta \in s_B} \text{ter}(\mathfrak{X}_\beta) = \\ &= \bigcap_{a \in s_A} \mathcal{Y}_a(r_a) \bigcap_{\beta \in s_B} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_\beta} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X_\beta^c} x_\beta^c \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $s_A \subseteq A$, $s_B \subseteq B$, $r_a \in \mathcal{R}_a$, $X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta$. Здесь множество \mathcal{R}_a представляет собой множество возможных значений случайной величины ξ_a :

$$\mathcal{R}_a = \{r_{a_1}, \dots, r_{a_{N_a}}\} \subset \mathbb{R}, a \in A.$$

5 Множество двудольных множеств событий

В работе [8] было предложено понятие множества двудольных множеств событий. Введем более строгое определение для данного понятия.

Определение 5. *Множество двудольных множеств случайных событий представляет собой набор множеств событий, каждое из которых состоит из двух долей, причем их первая доля определяется случайными величинами, а вторая — случайными множествами:*

$$S = \{s^1, \dots, s^n\}. \quad (9)$$

Возможны следующие разновидности структуры данного множества:

1. Случай однотипных двудольных множеств событий (все множества порождаются одним и тем же двудольным множеством случайных элементов, они описываются одним и тем же двудольным множеством Z и, следовательно, их терраски-события одинаковы. А различаются они для каждого множества s^i только вероятностями их наступления):

$$S = \left\{ s^1 = \{ \mathcal{Y}_a^1, \mathfrak{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B \}, \dots, \right. \\ \left. s^n = \{ \mathcal{Y}_a^n, \mathfrak{X}_\beta^n, a \in A, \beta \in B \} \right\}.$$

Этот случай является простейшим. Именно эта ситуация была рассмотрена в работах [2] и [8].

2. Случай, когда двудольные множества событий s^i являются подмножествами одного и того же двудольного множества событий Z :

$$S = \left\{ s^1 = \left\{ \mathcal{Y}_{s_A^1}, \mathfrak{X}_{s_B^1}, s_A^1 \subseteq A, s_B^1 \subseteq B \right\}, \dots, \right. \\ \left. s^n = \left\{ \mathcal{Y}_{s_A^n}, \mathfrak{X}_{s_B^n}, s_A^n \subseteq A, s_B^n \subseteq B \right\} \right\}.$$

3. Случай, когда двудольные множества событий s^i являются подмножествами различных двудольных множеств событий $Z^i = \{ \mathcal{Y}^i, \mathfrak{X}^i \} = \{ \mathcal{Y}_a^i, \mathfrak{X}_\beta^i, a \in A^i, \beta \in B^i \}$:

$$S = \left\{ s^1 = \left\{ \mathcal{Y}_{k_A^1}, \mathfrak{X}_{k_B^1}, k_A^1 \subseteq A^1, k_B^1 \subseteq B^1 \right\}, \dots, \right. \\ \left. s^n = \left\{ \mathcal{Y}_{k_A^n}, \mathfrak{X}_{k_B^n}, k_A^n \subseteq A^n, k_B^n \subseteq B^n \right\} \right\}.$$

Данный случай является самым общим и самым сложным по своей структуре.

Приведем для каждого случая практические примеры и набор возможных задач, приводящих к описываемым случаям.

6 Применение множеств двудольных множеств событий

6.1 Множество однотипных двудольных множеств событий

Как уже было сказано выше, наиболее простым (и чаще всего встречающимся) является случай однотипных двудольных множеств событий. Любая задача системного или факторного анализа приводит нас к изучению такого множества.

Пусть имеется сложная система, которая состоит из n элементов. Каждый элемент характеризуется показателями, одни из которых являются числовыми, а другие — множественными. Согласно методу двудольных множеств событий, поведение каждого элемента системы можно охарактеризовать двудольным множеством событий $\{ \mathcal{Y}, \mathfrak{X} \}$. Далее анализ поведения элементов системы сводится к анализу эвентологических распределений соответствующих им двудольных множеств событий. Таким образом, сложной системе ставится в соответствие множество

$$S = \left\{ s^1 = \{ \mathcal{Y}_a^1, \mathfrak{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B \}, \dots, \right. \\ \left. s^n = \{ \mathcal{Y}_a^n, \mathfrak{X}_\beta^n, a \in A, \beta \in B \} \right\}.$$

Примерами таких систем являются банковская система (состояние каждого банка оценивается числовыми и множественными показателями), система здравоохранения территориальных единиц региона, система кредитных продуктов и т.д.

Приведем практический пример множества однотипных двудольных множеств событий.

Представление банковской системы

Банковская система представляет собой множество банков и состоит из n элементов. Финансовое положение и репутация каждого банка характеризуется множеством показателей, одни из которых являются числовыми, а другие — множественными. Например, к числовым показателям могут быть отнесены: резервы в Центробанке, уставный капитал, эмиссионный доход, прибыльность по различным операциям, объем кредитов, предоставленных коммерческим предприятиям и организациям, частным лицам и т.д., ко множественным — обменная валюта банка, ассортимент банковских услуг, множество акционеров (участников), владеющих акциями банка. Очевидно, что банковская система является примером сложной системы, а банки — ее элементы. В работе [2] рассматривалось 39 показателей финансового положения банка.

Финансовое состояние каждого банка можно представить с помощью двудольного множества событий: первая доля которого определяется случайными величинами (числовыми показателями), вторая — случайными множествами событий (множественными показателями):

$$s^i = \{\mathcal{Y}_a^i, \mathfrak{X}_\beta^i, a \in A, \beta \in B\}, i = 1, \dots, n.$$

Всей банковской системе можно поставить в соответствие множество двудольных множеств событий

$$S = \left\{ s^1 = \{\mathcal{Y}_a^1, \mathfrak{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B\}, \dots, s^n = \{\mathcal{Y}_a^n, \mathfrak{X}_\beta^n, a \in A, \beta \in B\} \right\}.$$

Таким образом, множество всех показателей имеет вид

$$Z = \{\mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta\} = \{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \dots, \mathcal{Y}_{36}, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3\}, \quad (10)$$

где \mathcal{Y}_1 — величина денежных резервов в Центробанке (в тыс. рублей), \mathcal{Y}_2 — размер уставного капитала (в тыс. рублей), \mathcal{Y}_3 — эмиссионный доход, и т.д. А \mathfrak{X}_1 — обменная валюта банка, \mathfrak{X}_2 — ассортимент банковских услуг, \mathfrak{X}_3 — множество акционеров банка.

Поскольку все двудольные множества s^i порождаются одним и тем же двудольным множеством случайных элементов Z , значит:

$$|\mathcal{Y}_a| = |\mathcal{Y}_a^1| = |\mathcal{Y}_a^2| = \dots = |\mathcal{Y}_a^n|, \\ |\mathfrak{X}_\beta| = |\mathfrak{X}_\beta^1| = |\mathfrak{X}_\beta^2| = \dots = |\mathfrak{X}_\beta^n|.$$

Вернемся к рассмотрению множества однотипных двудольных множеств событий.

Полной характеристикой множества двудольных множеств случайных событий служит его эвентологическое распределение. Для этого необходимо задать распределение вероятностей событий множества двудольных множеств.

Пусть задано распределение вероятностей событий двудольного множества s :

$$p(s) = p(\mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta) = p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{a \in A} \{\mathcal{Y}_a(r_a)\} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B\right), \quad (11)$$

$$x_\beta \in \mathfrak{X}, \beta \in B,$$

$$\mathbf{r} = \{r_a, r_a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbf{X} = \{X_\beta, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta\}.$$

Тогда распределение вероятностей событий множества двудольных множеств событий $S = \{s^1, \dots, s^n\}$ $p(S^t), S^t \subseteq S$ имеет вид:

$$p(S^t) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{s^i \in S^t} s^i\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{s^i \in S^t} \left\{ \bigcap_{a \in A} \mathcal{Y}_a^i(r_a) \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c \right\}\right), S^t \subseteq S. \quad (12)$$

В работах [3, 2] были решены несколько задач системного анализа — определение экстремального элемента системы (наилучшего или наихудшего), классификация и ранжирование элементов системы. Все эти задачи предполагали сравнение только пар двудольных множеств, что и выполнялось с помощью представленного в формуле (7) расстояния между эвентологическими распределениями двудольных множеств событий (как вероятности сет-операции симметрической разности по Минковскому).

Кроме того, к аналогичному виду множества двудольных множеств событий приводят задачи кластерного анализа, визуализации (построение карт визуализации), банковского (страхового) скоринга и некоторые другие.

В работе [8] было предложено применить метод двудольных множеств событий для проведения факторного анализа сложных систем. Здесь требовалось определить степень влияния факторов на различие между элементами и найти внутрисистемное различие (т.е. здесь необходимо сравнивать одновременно все элементы системы).

Очевидно, что для практических задач достаточно сложно оценить вероятности распределения $p(S^t), S^t \subseteq S$. Поэтому в [8] были введены понятия произвольной сет-операции по Минковскому над множеством двудольных множеств событий и ее вероятности.

Определение 6. Произвольную сет-операцию по Минковскому над множеством двудольных множеств событий можно определить как множество событий, полученных с помощью операций по Минковскому над соответствующими событиями из каждой доли:

$$\begin{aligned} (\mathcal{O})_s &= \left\{ (\mathcal{O})_{s \in S} \{\mathcal{Y}_a\}, (\mathcal{O})_{s \in S} \{\mathfrak{X}_\beta\}, a \in A, \right. \\ &\left. \beta \in B \right\} = \left\{ \mathcal{O}_{s \in S} \{\mathcal{Y}_a(r_a)\}, \mathcal{O}_{s \in S} \{X_\beta\}, r_a \in \mathcal{R}_a, \right. \\ &\left. a \in A, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, \beta \in B \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вероятность произвольной сет-операции по Минков-

скому над множеством двудольных множеств событий определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left(\bigcirc_{s \in S} \right) s \right) &= \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P} \left(\bigcirc_{s \in S} \{ \mathcal{Y}_a(r_a) \} \right) + \\ &\frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P} \left(\bigcirc_{s \in S} \{ X_\beta \} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Приведем определение и вероятность для сет-операции симметрической разности по Минковскому над множеством двудольных множеств.

Определение 7. *Сет-операция симметрической разности по Минковскому над множеством двудольных множеств событий определяется как множество событий, полученных с помощью операций по Минковскому над соответствующими событиями из каждой доли:*

$$\begin{aligned} \left(\Delta_{s \in S} \right) s &= \left\{ \left(\Delta_{s \in S} \right) \{ \mathcal{Y}_a \}, \left(\Delta_{s \in S} \right) \{ \mathfrak{X}_\beta \} \right\} = \\ &\left\{ \Delta_{s \in S} \{ \mathcal{Y}_a(r_a) \}, \Delta_{s \in S} \{ X_\beta \}, r_a \in \mathcal{R}_a, a \in A, \right. \\ &\left. X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, \beta \in B \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Определение 8. *Под оператором общей симметрической разности $\Delta_{s \in S}$ над множеством событий S понимается среднее событие по множеству, вероятность которого определяется следующим образом:*

$$\mathbf{P} \left(\Delta_{s \in S} s \right) = \frac{1}{|S|} \sum_{s, t \in S} P(s \Delta t). \quad (16)$$

Вероятность общей симметрической разности по Минковскому над множеством двудольных множеств событий выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left(\Delta_{s \in S} \right) s \right) &= \\ &\frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P} \left(\Delta_{r_a \in \mathcal{R}_a} \{ \mathcal{Y}_a(r_a) \} \right) + \\ &+ \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P} \left(\Delta_{s \in S} \{ X_\beta \} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

6.2 Множество подмножеств двудольных множеств событий

Теперь рассмотрим второй случай, когда двудольные множества событий s^i являются подмножествами одного и того же двудольного множества событий Z :

$$\begin{aligned} S &= \left\{ s^1 = \left\{ \mathcal{Y}_{s_A^1}, \mathfrak{X}_{s_B^1}, s_A^1 \subseteq A, s_B^1 \subseteq B \right\}, \dots, \right. \\ &\left. s^n = \left\{ \mathcal{Y}_{s_A^n}, \mathfrak{X}_{s_B^n}, s_A^n \subseteq A, s_B^n \subseteq B \right\} \right\}. \end{aligned}$$

К изучению множеств такого вида могут привести задачи регрессионного или ковариационного анализа. Например, когда требуется найти ковариацию или корреляцию между двудольными множествами событий. В качестве практического примера можно привести задачу изучения взаимосвязи между состоянием здоровья населения и антропогенным загрязнением воздуха и почвы.

Задача исследования зависимости между антропогенным загрязнением воздуха-почвы и заболеваемостью населения

В работе [1] решалась задача, которая заключалась в выявлении зависимости между антропогенным загрязнением атмосферы и почвы, коэффициентом опасности выбрасываемых в атмосферу веществ, жесткостью погоды и заболеваемостью населения Красноярского края.

Здесь двудольное множество Z состоит из трех числовых и трех множественных показателей

$$\begin{aligned} Z = \{ \mathcal{Y}, \mathfrak{X} \} &= \{ \mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta, a \in A, \beta \in B \} = \\ &\{ \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3 \}, \end{aligned}$$

где

\mathcal{Y}_1 — коэффициент опасности (числовой показатель);

\mathcal{Y}_2 — коэффициент жесткости погоды по Осокину за летний период (числовой показатель);

\mathcal{Y}_3 — коэффициент жесткости погоды по Осокину за зимний период (числовой показатель);

\mathfrak{X}_1 — множество выбросов вредных веществ в атмосферу (множественный показатель);

\mathfrak{X}_2 — химический состав почвы (множественный показатель);

\mathfrak{X}_3 — множество заболеваний (множественный показатель).

Рассматривались двудольные множества

$$s = \{ \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \}, \quad (18)$$

$$t = \{ \mathfrak{X}_3 \}. \quad (19)$$

Они являются подмножествами двудольного множества Z ($s, t \subseteq Z$).

Однако для исследования интересны лишь часть террасок показателей, поэтому в качестве исследуемого множества в работе использовалось не все множество, а множество подмножеств двудольных множеств событий — наиболее “плохие” терраски (с наибольшими значениями выбросов и наибольшей опасностью) и наиболее “хорошие” (с наименьшими значениями).

К аналогичному виду множества двудольных множеств событий приводят задачи поиска ассоциатив-

ных правил (отыскания закономерностей между множествами событий), прогнозирования поведения системы и задачи принятия решений.

Распределение вероятностей событий множества двудольных множеств событий $S = \{s^1, \dots, s^n\}$ $p(S^t)$, $S^t \subseteq S$ для данного случая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p(S^t) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{s^i \in S^t} s^i\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{s^i \in S^t} \left\{ \bigcap_{a \in s_A^i} \text{ter}(\mathcal{Y}_a) \bigcap_{\beta \in s_B^i} \text{ter}(\mathfrak{X}_\beta) \right\}\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{a \in s_A^i} \mathcal{Y}_a(r_a) \bigcap_{\beta \in s_B^i} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_\beta} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X_\beta^c} x_\beta^c \right)\right), \\ & s_A^i \subseteq A, s_B^i \subseteq B, S^t \subseteq S. \end{aligned} \quad (20)$$

В работе [5] было дано определение ковариации для двух событий-террасок и решена задача ее нахождения. Таким образом, был рассмотрен случай, когда множество состоит всего из двух событий-террасок двудольных множеств. Приведем это определение.

Определение 9. Ковариацией событий-террасок двудольных множеств случайных событий s и t называется

$$\begin{aligned} \text{Kov}_{\text{ter}(s), \text{ter}(t)} &= \mathbf{P}(\text{ter}(s) \cap \text{ter}(t)) - \\ & \mathbf{P}(\text{ter}(s)) \mathbf{P}(\text{ter}(t)). \end{aligned}$$

Можно распространить данное понятие и на множество событий-террасок двудольных множеств.

Определение 10. Ковариацией множества $S^t \subseteq S$, где

$$\begin{aligned} S &= \left\{ s^1 = \left\{ \mathcal{Y}_{s_A^1}, \mathfrak{X}_{s_B^1}, s_A^1 \subseteq A, s_B^1 \subseteq B \right\}, \dots, \right. \\ & \left. s^n = \left\{ \mathcal{Y}_{s_A^n}, \mathfrak{X}_{s_B^n}, s_A^n \subseteq A, s_B^n \subseteq B \right\} \right\}. \end{aligned}$$

называется

$$\text{Kov}_{S^t} = p(S^t) - \prod_{s^i \in S^t} p(s^i), \quad (21)$$

где $p(s^i)$ — распределение вероятностей событий двудольного множества s^i , а распределение множества двудольных множеств $p(S^t)$ находится по формуле (20).

Распределения $p(s^i)$ имеют вид, представленный выше:

$$\begin{aligned} p(s^i) &= p(\mathcal{Y}_a^i, \mathfrak{X}_\beta^i) = p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \\ & \mathbf{P}\left(\bigcap_{a \in A} \{\mathcal{Y}_a(r_a)\} \right. \\ & \left. \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B\right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$x_\beta \in \mathfrak{X}, \beta \in B,$$

$$\mathbf{r} = \{r_a, r_a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbf{X} = \{X_\beta, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta\}.$$

В работе [7] изучались условные вероятности двудольных множеств событий и, в частности, их применение для решения задачи статистической оценки функции теоретической эвентологической регрессии [6]. В рамках этой задачи регрессия определялась для двух событий-террасок двудольных множеств, что позволяет говорить о том, что был изучен частный случай ситуации множества двудольных множеств событий, являющихся подмножествами одного и того же множества.

Определение 11. Условная вероятность для двудольных множеств событий $s, t \subseteq Z$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} P(\text{ter}(t)|\text{ter}(s)) &= P_{|\text{ter}(s)}(\text{ter}(t)) = \\ &= \frac{P(\text{ter}(t) \cap \text{ter}(s))}{p(\text{ter}(s))}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $p(\text{ter}(s)) = \sum_{\text{ter}(s) \subseteq Z} P(\text{ter}(s))$

Определение 12. Эвентологическая регрессия одного двудольного множества событий $s \subseteq Z$ на другое двудольное множество событий $t \subseteq Z$, связывающая события-терраски $\text{ter}(s)$, $s \subseteq Z$ с событиями-террасками $\text{ter}(t)$, $t \subseteq Z$ имеет вид

$$\text{ter}(t) = \varphi(\text{ter}(s)), \quad s \subseteq Z.$$

Значения функции теоретической эвентологической регрессии на уровне α для $s \subseteq Z$ можно статистически оценить с помощью условного α -квантиля случайного множества t по следующей формуле:

$$Q_\alpha(t|\text{ter}(s)) = \{\text{ter}(t) \subseteq Z : P(\text{ter}(t)|\text{ter}(s)) \geq \alpha\}.$$

Условные вероятности, определяющие какие элементы $\text{ter}(t) \subseteq Z$ принадлежат значению функции Э-регрессии на $s \subseteq Z$, определяются формулами (1).

6.3 Множество подмножеств различных двудольных множеств событий

Теперь рассмотрим третий случай, когда двудольные множества событий s^i являются подмножествами различных двудольных множеств событий $Z^i = \{\mathcal{Y}^i, \mathfrak{X}^i\} = \{\mathcal{Y}_a^i, \mathfrak{X}_\beta^i, a \in A^i, \beta \in B^i\}$:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ s^1 = \left\{ \mathcal{Y}_{k_A^1}, \mathfrak{X}_{k_B^1}, k_A^1 \subseteq A^1, k_B^1 \subseteq B^1 \right\}, \dots, \right. \\ & \left. s^n = \left\{ \mathcal{Y}_{k_A^n}, \mathfrak{X}_{k_B^n}, k_A^n \subseteq A^n, k_B^n \subseteq B^n \right\} \right\}, \end{aligned}$$

здесь под A^j понимается множество индексов для числовой доли двудольного множества $s^j \in S$, под B^j понимается множество индексов для множественной доли этого же двудольного множества. Обозначение k_A^j принято для индекса, который пробегает соответствующее множество индексов A^j . Аналогичным образом, обозначение k_B^j — для индекса, который пробегает соответствующее множество индексов B^j . Таким образом, множество событий $\mathcal{Y}_{k_A^1} \subseteq \mathcal{Y}^i$, а $\mathfrak{X}_{k_B^1} \subseteq \mathfrak{X}_\beta^i$.

К изучению множеств такого вида могут привести задачи регрессионного, ковариационного анализа, поиска ассоциативных правил (отыскания закономерностей между множествами событий), прогнозирования поведения системы и принятия решений. Как мы видим, этот перечень задач аналогичен ситуации с вторым видом распределения множества двудольных множеств событий. Однако отличием является то, что во втором случае все множества являются подмножествами одного и того же множества Z , в то время как для данного случая происходит работа не с одним, а с целым набором разных областей Z^i . Большинство задач регрессионного и ковариационного анализа относятся именно к данному виду множества двудольных множеств.

Распределение вероятностей событий множества двудольных множеств событий $S = \{s^1, \dots, s^n\}$ $p(S^t)$, $S^t \subseteq S$ для данного случая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 p(S^t) &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{s^i \in S^t} s^i \right) = \\
 &= \mathbf{P} \left(\text{ter}(\mathcal{Y}_{k_A^1}) \cap \text{ter}(\mathcal{Y}_{k_A^2}) \dots \cap \text{ter}(\mathcal{Y}_{k_A^t}) \right. \\
 &\left. \text{ter}(\mathfrak{X}_{k_B^1}) \cap \text{ter}(\mathfrak{X}_{k_B^2}) \dots \cap \text{ter}(\mathfrak{X}_{k_B^t}) \right) = \\
 &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{k_A^1 \in A^1} \mathcal{Y}_{k_A^1} \dots \bigcap_{k_A^t \in A^t} \mathcal{Y}_{k_A^t} \right. \\
 &\left. \bigcap_{k_B^1 \in B^1} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_{k_B^1}^c} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X_{k_B^1}^c} x_\beta^c \right) \dots \right. \\
 &\left. \bigcap_{k_B^t \in B^t} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_{k_B^t}^c} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X_{k_B^t}^c} x_\beta^c \right) \right), \\
 &\mathcal{Y}_{k_A^1} \subseteq \mathcal{Y}^i, \mathfrak{X}_{k_B^1} \subseteq \mathfrak{X}_\beta^i, S^t \subseteq S.
 \end{aligned} \tag{24}$$

В данной формуле для простоты записи для подмножества S^t указано подмножество $\{s^1, \dots, s^t\}$ со множествами индексов для числовой доли A^1, \dots, A^t и множествами индексов для множественной доли B^1, \dots, B^t , а также с соответствующими им индексами k_A^1, \dots, k_A^t и k_B^1, \dots, k_B^t . На самом деле речь идет не о первых t двудольных множествах (с первого по t -ый включительно), а о произвольном наборе из t двудольных множеств (т.е. о любом подмножестве $S^t \subseteq S$, с мощностью равной t (т.е. $|S^t| = t$)).

Приведем еще раз список прикладных задач, приводящих к работе со множеством двудольных множеств событий.

6.4 Основные задачи применения множества двудольных множеств событий

К числу задач, при решении которых используется рассмотренное в работе понятие множества двудольных множеств событий относятся задачи:

- определение наилучшего или наихудшего элемента системы,
- классификация элементов или групп,
- ранжирование элементов системы,
- факторный анализ,
- кластерный анализ,
- построение карт визуализации данных,
- поиск ассоциативных правил (отыскание закономерностей между множествами событий),
- ковариационный анализ разнотипных данных (выявление связи между разнотипными данными),
- регрессионный анализ разнотипных данных (построение функции зависимости между данными),
- прогнозирование поведения системы,
- принятие решений при нечетких данных,
- банковский (страховой) скоринг,
- определение информативности признаков (с помощью энтропии системы).

7 Выводы

В работе рассмотрено понятие множества двудольных множеств событий, состоящее из множеств событий, первая доля которых определяется случайными величинами, а вторая — случайными множествами. Изучены три вида структуры данного множества. Рассмотрены практические примеры двудольных множеств. Показан вид эвентологического распределения множества двудольных множеств для всех его разновидностей. Приведены понятия сет-операции по Минковскому над множеством двудольных множеств событий и ее вероятности, а также — понятия ковариации двух событий-террасок двудольных множеств случайных событий, ковариации множества двудольных множеств событий и регрессии двух двудольных множеств событий. Продемонстрированы основные задачи применения множества двудольных множеств событий.

Список литературы

- [1] И.В. Баранова и Ю.А. Коновалова.
- [2] О. Ю. Воробьев и И. В. Баранова. *Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем*. Ин-т естеств. и гуманитар. наук, Красноярск, 2007.
- [3] И.В. Баранова. Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе социально-экономических систем. *Вестник Красноярского государственного университета: физико-математические науки*, 1:142–152, 2006.
- [4] И.В. Баранова. Применение метода двудольных множеств событий в факторном анализе сложных систем. *Вестник Красноярского государственного университета: физико-математические науки*, 9:124–131, 2006.
- [5] И.В. Баранова. Ковариация и регрессия двудольных множеств событий. In *Труды VIII Международной конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*, pages 62–67. СФУ, Красноярск, 2009.
- [6] И.В. Баранова. Метод двудольных множеств событий в факторном анализе разнотипных данных. In *Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: материалы международной научной конференции*, volume т.1, pages 19–23. ХНТУ, Херсон, 2009.
- [7] И.В. Баранова. Условное распределение двудольного множества событий. In *Труды IX международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции*, pages 51–59. СФУ, Красноярск, 2010.
- [8] I.V. Baranova. Bipartite set of random events method application in factorial analysis of complex systems. In *Proceedings of the Second International Conference*.

Эвентологический подход к методу ассоциативных правил в интеллектуальном анализе данных

Баранова Ирина Владимировна

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярск
irinabar@yandex.ru

Комарова Ольга Александровна

СФУ
Институт Математики
Красноярск
oinca@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются основные цели и задачи интеллектуального анализа данных, а также области его применения. Описывается алгоритм поиска ассоциативных правил. Предлагается интерпретация метода ассоциативных правил на случайно-множественном языке, позволяющая расширить его возможности для решения практических задач. Рассматривается понятие нечеткой импликации и строится его обобщение для множеств событий.

Ключевые слова. Интеллектуальный анализ данных, Data Mining, событие, множество событий, вероятность, ассоциативные правила, нечеткая импликация, операции Фреше

1 Введение

Интеллектуальный анализ данных (Data Mining) — мультидисциплинарная область, возникшая и развивающаяся на базе прикладной статистики, искусственного интеллекта, теории баз данных и др. Оригинальное англоязычное название Data Mining было предложено Григорием Пиатецким-Шапиро в 1989 [1]. Название происходит из двух понятий: поиска ценной информации в большой базе данных (Data) и добычи горной руды (Mining). Термин переводится как “добыча” или “раскопка” данных.

Определение 13. *Интеллектуальный анализ данных* — это процесс обнаружения в данных ранее неизвестных, нетривиальных, практически полезных и доступных интерпретации знаний, необходимых для принятия решений в различных сферах человеческой деятельности.

Таким образом, Data Mining представляет собой технологию, предназначенную для поиска в больших объемах данных неочевидных, объективных и полученных на практике закономерностей.

К методам интеллектуального анализа данных относятся всевозможные методы классификации, моделирования и прогнозирования, основанные на применении деревьев решений, искусственных нейронных сетей, генетических алгоритмов, эволюционного программирования, ассоциативной памяти, нечеткой логики. Также методами Data Mining могут считаться статистические методы: дескриптивный анализ,

корреляционный и регрессионный анализ, факторный анализ, дисперсионный анализ, компонентный анализ, дискриминантный анализ, анализ временных рядов.

В интеллектуальном анализе данных существуют следующие стадии:

1. выявление закономерностей (свободный поиск),
2. прогностическое моделирование,
3. анализ исключений.

На первой стадии — стадии выявления закономерностей осуществляется исследование набора данных с целью поиска скрытых закономерностей. Свободный поиск представлен такими действиями: выявление закономерностей условной логики, выявление закономерностей ассоциативной логики, выявление трендов и колебаний.

Прогностическое моделирование использует результаты работы первой стадии. К действиям данной стадии относятся предсказание неизвестных значений и прогнозирование развития процессов.

Третья стадия представляет собой анализ исключений или аномалий, выявленных в найденных закономерностях. Действия этой стадии сводятся к выявлению отклонений. Для этого необходимо определить норму, которая рассчитывается на стадии свободного поиска.

В дополнение к этим стадиям иногда вводят еще одну стадию — валидацию, следующую за стадией свободного поиска. Целью валидации является проверка найденных закономерностей.

2 Основные задачи и применение интеллектуального анализа данных

1. Классификация (Classification)

Краткое описание. Классификация представляет собой наиболее простую и распространенную задачу интеллектуального анализа данных. В результате решения задачи классификации обнаруживаются признаки, которые характеризуют группы объектов исследуемого набора

данных — классы. По этим признакам новый объект можно отнести к тому или иному классу. Методы решения задачи. Для решения задачи классификации могут использоваться следующие методы: ближайшего соседа (Nearest Neighbor), k -ближайшего соседа (k -Nearest Neighbor), байесовские сети (Bayesian Networks), индукция деревьев решений, нейронные сети (neural networks).

2. Кластеризация (Clustering)

Краткое описание. Кластеризация является логическим продолжением идеи классификации. Это задача более сложная, чем предыдущая. Особенность кластеризации заключается в том, что классы объектов изначально не predetermined. Результатом кластеризации является разбиение объектов на группы.

Пример метода решения задачи кластеризации: обучение “без учителя” особого вида нейронных сетей — самоорганизующихся карт Кохонена.

3. Ассоциация (Associations)

Краткое описание. В ходе решения задачи поиска ассоциативных правил отыскиваются закономерности между связанными событиями в наборе данных. Отличие ассоциации от двух предыдущих задач заключается в том, что поиск закономерностей осуществляется не на основе свойств анализируемого объекта, а между несколькими событиями, которые происходят одновременно. Наиболее известным алгоритмом решения задачи поиска ассоциативных правил является алгоритм Apriori.

4. Прогнозирование (Forecasting)

Краткое описание. В результате решения задачи прогнозирования на основе особенностей исторических данных (предыстории) оцениваются пропущенные или же будущие значения целевых численных показателей.

Для решения таких задач широко применяются методы математической статистики, нейронные сети и др.

5. Оценивание (Estimation)

Задача оценивания сводится к предсказанию непрерывных значений признака.

6. Визуализация (Visualization, Graph Mining)

В результате визуализации создается графический образ анализируемых данных.

Для решения задачи визуализации используются графические методы, показывающие наличие закономерностей в данных. Примеры методов визуализации — представление данных в 2-D и 3-D измерениях.

7. Подведение итогов (Summarization) Цель данной задачи — описание конкретных групп объектов из анализируемого набора данных.

Сфера применения Data Mining ничем не ограничена, он применим в любых сферах человеческой деятельности, в которых существуют статистические данные:

1. Розничная торговля
2. Банковское дело
3. Телекоммуникации
4. Страхование
5. Медицина
6. Молекулярная генетика и геновая инженерия
7. Прикладная химия

3 Основы ассоциативных правил в интеллектуальном анализе данных

Как было сказано выше, в ходе решения задачи поиска ассоциативных правил отыскиваются закономерности между связанными событиями в наборе данных. Рассмотрим алгоритм работы метода ассоциативных правил в интеллектуальном анализе данных.

Приведем основные понятия, связанные с данным методом.

Определение 14. *Транзакция* — это множество событий, которые произошли одновременно.

Определение 15. *Транзакционная (операционная) база данных* представляет собой двумерную таблицу, состоящую из номера транзакции (TID) и перечня событий, происходящих во время этой транзакции.

Определение 16. *Поддержка* — количество или процент транзакций, содержащих определенный набор данных.

Приведем обозначения, используемые в алгоритме:

L_k — множество k -элементных наборов, чья поддержка не меньше заданной пользователем.

S_k — множество потенциально частых k -элементных наборов.

Алгоритм поиска ассоциативных правил имеет следующий вид:

Шаг 1. Присвоить $k = 1$ и выполнить отбор всех 1-элементных наборов, у которых поддержка больше минимально заданной пользователем $Supp_{min}$.

Шаг 2. $k = k + 1$.

Шаг 3. Если не удастся создавать k -элементные наборы, то завершить алгоритм, иначе выполнить следующий шаг.

Шаг 4. Создать множество k -элементных наборов кандидатов из частых наборов. Для этого необходимо объединить в k -элементные кандидаты ($k-1$)-элементные частые наборы. Каждый кандидат будет

формироваться путем добавления к $(k-1)$ - элементному частому набору - p элемента из другого $(k-1)$ -элементного частого набора - q . Причем добавляется последний элемент набора q , который по порядку выше, чем последний элемент набора p .

При этом все $k-2$ элемента обоих наборов одинаковы. Шаг 5. Для каждой транзакции T из множества D выбрать кандидатов S_t из множества S_k , присутствующих в транзакции T . Для каждого набора из построенного множества S_k удалить набор, если хотя бы одно из его $(k-1)$ подмножеств не является часто встречающимся т.е. отсутствует во множестве L_{k-1} .

Шаг 6. Для каждого кандидата из S_k увеличить значение поддержки на единицу.

Шаг 7. Выбрать только кандидатов L_k из множества S_k , у которых значение поддержки больше заданной пользователем Suppmin . Вернуться к шагу 2.

Результатом работы алгоритма является объединение всех множеств L_k для всех k .

Рассмотрим поиск ассоциативных правил по описанному методу на простом примере.

Пусть имеется следующая транзакционная база данных покупок продуктов:

1. Хлеб, молоко, печенье;
2. Хлеб, молоко, печенье;
3. Молоко, сметана;
4. Молоко, сметана;
5. Молоко, сметана;
6. Молоко, хлеб, сметана, печенье;
7. Молоко, хлеб, сметана, печенье;
8. Колбаса, сметана;
9. Колбаса, сметана;
10. Колбаса, сметана;
11. Конфеты;
12. Конфеты;
13. Конфеты;
14. Колбаса, молоко;
15. Колбаса, молоко;
16. Хлеб, колбаса, молоко;
17. Хлеб, колбаса, молоко.

Необходимо найти закономерности между покупками в наборе данных.

Обозначим приведенные выше товары следующими переменными.

- $a = \{\text{Хлеб}\},$
 $b = \{\text{Молоко}\},$
 $c = \{\text{Печенье}\},$
 $d = \{\text{Сметана}\},$
 $e = \{\text{Колбаса}\},$
 $f = \{\text{Конфеты}\}.$

Уровень поддержки для данной задачи $\text{Suppmin} = 5$. Согласно алгоритму, формируем множество 1-элементных кандидатов:

- $a = 6$
 $b = 11$
 $c = 4$
 $d = 8$

- $e = 7$
 $f = 3$

Далее формируем множество 2-элементных кандидатов, с учетом уровня поддержки:

- $bd = 5$
 $be = 4$
 $de = 2$

Алгоритм завершается, т.к. создать трех-элементные наборы не удается.

Лишь одно множество bd подходит под требование. Таким образом, получаем одно ассоциативное правило: "при покупке молока покупатель скорее всего купит сметану".

4 Эвентологический метод ассоциативных правил

Теперь сформулируем метод ассоциативных правил на языке эвентологии [2]. Приведем несколько основных определений из эвентологии.

Определение 17. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω — пространство элементарных событий, \mathcal{F} — алгебра событий и \mathbf{P} — вероятность, определенная на элементах алгебры \mathcal{F} — случайных событиях $x, y, \dots \in \mathcal{F}$.

Определение 18. Конечное множество избранных событий $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий, называется *множеством случайных событий*.

Определение 19. *Случайное множество событий* под \mathfrak{X} определяется как измеримое отображение

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}),$$

где $2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств множества \mathfrak{X} .

Полной характеристикой множества случайных событий \mathfrak{X} служит его эвентологическое распределение. Приведем ниже вид для одной из форм эвентологического распределения — распределения вероятностей пересечений событий множества:

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}(\text{ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right), X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Определение 20. *Сет-среднее случайного множества* представляет собой множество элементов \mathfrak{X} следующего вида: $\epsilon K = \{x : px \geq h\}$, для которого его мера $\mu(\epsilon K)$ наиболее близка к числу $\lambda = E\mu(K)$ — средней мере случайного множества K .

Средняя мера случайного множества K — математическое ожидание случайной величины — вычисляется по теореме Роббинса [2].

Алгоритм будет иметь следующий вид:

1. Пусть задано $\mathfrak{X} = \{a, b, \dots\}$ — множество случайных событий; для каждого подмножества заданы вероятности распределения $p(x), x \in \mathfrak{X}$
2. Вычисляем индивидуальную вероятность моноплетов.
3. Находим сет-среднее по формуле из определения.
4. Отбрасываем моноплеты, у которых индивидуальная вероятность меньше меры вычисленного сет-среднего.
5. Вычисляем вероятности дуплетов.
6. Отбрасываем дуплеты, у которых индивидуальная вероятность меньше меры вычисленного сет-среднего.
7. И так далее повторяем пункты 2-4 по всем слоям $C_{\mathfrak{X}}^m = \{x \subseteq \mathfrak{X} : |x| = m\}, m = 3, \dots, n.$

В ходе исследования данного алгоритма выяснилось, что использовать сет-среднее не корректно. Было предложено использовать в алгоритме вместо сет-среднего понятие нечеткой импликации.

4.1 Применение нечеткой импликации для эвентологического метода ассоциативных правил

Для модификации метода была изучена статья Д.В.Семенов и А.В.Ищенко “Эвентологический взгляд на нечеткую импликацию” [1].

В статье были приведены определения треугольной нормы и треугольной конормы. На основе этих определений было введено понятие нечеткой импликации S-типа. В булевой логике импликация представляется в виде:

$$I_B(a, b) = a \rightarrow b = \bar{a} \vee b, \quad (1)$$

\bar{a} — булево отрицание a , \vee — дизъюнкция, $a, b \in [0, 1]$.

$I_B(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 1$ и $b = 0$.

Нечеткая импликация S-типа была введена как обобщение классической импликации:

$$I_S(a, b) = S(n(a), b),$$

$n(a)$ — отрицание a , $a, b \in [0, 1]$. Нечеткая импликация вводится с помощью отрицания и треугольной конормы (t-конормы или s-нормы), которая выступает в роли дизъюнкции.

Приведем определения треугольной нормы и треугольной конормы.

Определение 21. *Треугольная норма (t норма) — это бинарная операция $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. $T(1, a) = a$ (существование нейтрального элемента 1),

2. $\forall a, b \in [0, 1]$ если $a \leq b$, то $T(a, c) \leq T(b, c)$ (монотонность),
3. $T(a, b) = T(b, a)$ (коммутативность),
4. $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$ (ассоциативность),
5. $T(0, a) = 0$ (граничное условие).

Определение 22. *Треугольная норма (t-конорма или s-норма) — это бинарная операция $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. $S(0, a) = a$ (существование нейтрального элемента 0),
2. $\forall a, b \in [0, 1]$ если $a \leq b$, то $S(a, c) \leq S(b, c)$ (монотонность),
3. $S(a, b) = S(b, a)$ (коммутативность),
4. $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$ (ассоциативность),
5. $S(1, a) = 1$ (граничное условие).

В статье был представлен эвентологический взгляд на операции над нечеткими множествами. Было показано, что с точки зрения эвентологии для теории нечетких событий достаточно того, что t и s нормы удовлетворяли неравенствам Фреше.

В работе [1] была предложена нечеткая импликация для ситуации двух событий, которая была сконструирована следующим образом.

Как уже было сказано выше, нечеткая импликация S-типа была введена как обобщение классической импликации:

$$I_S(a, b) = S(n(a), b).$$

Пусть даны два события $x, y \in \mathfrak{X}$ и $\mathbf{P}(x) = a, \mathbf{P}(y) = b$. В качестве t-конормы было предложено использовать функцию $S_F^\varphi(a, b)$, а в качестве отрицания $n(a)$ вероятность дополнения события $\mathbf{P}(x^c) = 1 - P(x)$. Импликация Фреше была определена как функция вида:

$$I_F(a, b) = S_F^\varphi(1 - a, b) = \begin{cases} (1 - \varphi)S_p(1 - a, b) + \varphi S_M(1 - a, b), & \varphi \in [0, 1], \\ (1 + \varphi)S_p(1 - a, b) - \varphi S_L(1 - a, b), & \varphi \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Параметр φ в функции $S_F^\varphi(a, b)$ имел смысл корреляции Фреше событий x^c и y : $\varphi = Kor_{x^c y} = -Kor_{xy}$.

Здесь в качестве функции использовалась обобщенная операция Фреше $S_F^\varphi(a, b)$:

$$S_F^\varphi(a, b) = \begin{cases} S_M(a, b), & \varphi = -1, \\ S_p(a, b), & \varphi = 0, \\ S_L(a, b), & \varphi = 1, \end{cases}$$

где $S_M(a, b) = \max\{a, b\}$ — левая граница Фреше для объединения двух событий, $S_L(a, b) = \min\{1, a + b\}$ —

правая граница Фреше для объединения двух событий, $S_p(a, b) = a + b - ab$ — вероятность объединения событий.

В данной работе мы рассматриваем более сложную ситуацию, в которой необходимо задавать импликацию двух множеств событий. Будем строить по аналогии с нечеткой импликацией для двух событий, но использовать при построении в качестве t-нормы функцию Фреше для множеств $\tilde{S}_F^\varphi(A, B)$.

Пусть даны два события $X, Y \subseteq \mathfrak{X}$. Соответственно заданы вероятности

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x_\beta \in X} x \bigcap_{x_\beta \in X^c} x^c\right),$$

$$p(Y) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x_\beta \in Y} x \bigcap_{x_\beta \in Y^c} x^c\right).$$

В качестве t-нормы будем использовать функцию $\tilde{S}_F^\varphi(A, B)$, а в качестве отрицания $n(a)$ вероятность дополнения события $p(X^c)$. Введем нечеткую множественную импликацию S-типа как обобщение нечеткой импликации:

$$I_{\tilde{S}}(p(X^c), p(Y)) = \tilde{S}(n(p(X)), p(Y)).$$

Определим вид обобщенной операции Фреше для множеств событий.

Определение 23. Арной ковариацией множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$, называется величина

$$Kov_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x).$$

Она представляет собой разность между вероятностями пересечения всего множества событий X и независимого пересечения событий множества X .

Определение 24. Арной Фреше-корреляцией множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ называется величина:

$$Kor_x = \begin{cases} \frac{Kov_x}{F_x^+}, Kov_X \geq 0 \\ \frac{Kov_x}{F_x^-}, Kov_X \leq 0 \end{cases}$$

где

$$F_X^+ = \min_{x \in X} P(x) - \prod_{x \in X} P(x)$$

-правая граница Фреше,

$$F_X^- = \min\left\{\prod_{x \in X} P(x), \prod_{x \in X} P(x) + \sum_{x \in X} P(x^c) - 1\right\}$$

-левая граница Фреше для арной ковариации

Поскольку для произвольного $X \subseteq \mathfrak{X}$

$$-F_X^- \leq Kov_X \leq F_X^+, \quad (2)$$

то значения арной Фреше-корреляции произвольного подмножества событий всегда лежат в интервале $[-1, 1]$:

$$-1 \leq Kor_X \leq 1,$$

Перепишем неравенство (1) в более подробном виде:

$$\begin{aligned} & -\min\left\{\prod_{x \in X} P(x), \prod_{x \in X} P(x) + \sum_{x \in X} P(x^c) - 1\right\} \\ & \leq Kov_X \leq \min_{x \in X} P(x) - \prod_{x \in X} P(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуя данное неравенство, распишем ковариацию как разность двух вероятностей (по определению) и отнимая пересечение индивидуальных вероятностей, получим следующее неравенство:

$$\max\left\{0, 1 - \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x^c)\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \leq \min_{x \in X} \mathbf{P}(x). \quad (4)$$

В работе [?] было получено неравенство Фреше для вероятностей объединения множества событий

$$\max_{x \in X} P(x) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) \leq \min\left\{1, \sum_{x \in X} P(x)\right\}. \quad (5)$$

Мы рассматриваем ситуацию объединения двух множеств $X \subseteq \mathfrak{X}$ и $Y \subseteq \mathfrak{X}$. Перепишем предыдущее неравенство для множества Z , где $Z = X \cup Y$.

$$\max_{x \in Z} \mathbf{P}(x) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in Z} x\right) \leq \min\left\{1, \sum_{x \in Z} P(x)\right\}. \quad (6)$$

Тогда можно расписать данное неравенство для двух множеств X и Y , составляющих Z :

$$\begin{aligned} & \max\left\{\max_{x \in X} \mathbf{P}(x), \max_{x \in Y} \mathbf{P}(x)\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) + \\ & \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in Y} x\right) - \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X \cap Y} x\right) \leq \\ & \min\left\{1, \sum_{x \in X} P(x) + \sum_{x \in Y} P(x)\right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда множественная импликация Фреше может быть определена как функция следующего вида:

$$\begin{aligned} I_{\tilde{S}}(p(X), p(Y)) &= \tilde{S}_F^\varphi(p(X^c), p(Y)) = \\ &= \begin{cases} (1 - \varphi)S_p(p(X), p(Y)) + \varphi S_M(p(X), p(Y)), \\ \varphi \in [0, 1], \\ (1 + \varphi)S_p(p(X^c), p(Y)) - \varphi S_L(p(X^c), p(Y)), \\ \varphi \in [-1, 0]. \end{cases} \end{aligned}$$

В качестве обобщенной множественной операции Фреше $\tilde{S}_F^\varphi(p(X), p(Y))$ будем использовать:

$$\tilde{S}_F^\varphi(p(X), p(Y)) = \begin{cases} \tilde{S}_M(p(X), p(Y)), & \varphi = -1, \\ \tilde{S}_p(p(X), p(Y)), & \varphi = 0, \\ \tilde{S}_L(p(X), p(Y)), & \varphi = 1, \end{cases}$$

где

$$\tilde{S}_M(p(X), p(Y)) = \max \left\{ \max_{x \in X} \mathbf{P}(x), \max_{x \in Y} \mathbf{P}(x) \right\}$$

— левая граница Фреше для объединения множеств событий,

$$\tilde{S}_L(p(X), p(Y)) = \min \left\{ 1, \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x) + \sum_{x \in Y} \mathbf{P}(x) \right\}$$

— правая граница Фреше для объединения множеств событий,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_p(p(X), p(Y)) = & \mathbf{P} \left(\bigcup_{x \in X} x \right) + \mathbf{P} \left(\bigcup_{x \in Y} x \right) - \\ & - \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in X \cap Y} x \right) \end{aligned} \quad (8)$$

— вероятность объединения множеств.

Параметр φ в функции $\tilde{S}_F^\varphi(p(X), p(Y))$ имеет смысл значения арной корреляции Фреше множества $X^c \cup Y$: $\varphi = \text{Kor}_{X^c \cup Y}$ (из определения 12).

5 Заключение

В работе рассмотрены основные цели и задачи интеллектуального анализа данных, а также области его применения. Изучены метод ассоциативных правил и понятие нечеткой импликации двух событий. Предложена эвентологическая интерпретация метода ассоциативных правил. Работа классического метода ассоциативных правил и его эвентологического аналога проиллюстрирована на простейшем практическом примере — поиске закономерностей среди покупок продуктов. Преимуществом предложенного эвентологического метода ассоциативных правил является нахождение не только парных, но и множественных правил. Предложено новое понятие нечеткой множественной импликации.

Список литературы

- [1] Д. В. Семенова и А.И. Ищенко. *Эвентологический взгляд на нечеткую импликацию*. НИИППБ, Красноярск, 2011.

Оперативное прогнозирование количества пожаров на региональном уровне

Алексей Николаевич

Батуро

Центр НИОКР Сибирского института
пожарной безопасности – филиала СПб УГПС
МЧС России
Красноярск

Георгий Алексеевич

Доррер

Сибирский государственный технологический
университет
Красноярск
g_a_dorrer@mail.ru

Витольд Станиславович

Коморовский

Центр НИОКР Сибирского института
пожарной безопасности – филиала СПб
УГПС МЧС России
Красноярск
komorovski.w@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы оперативного прогнозирования количества техногенных пожаров на региональном уровне. Основным методом прогноза является использование автокорреляционных функций. Также рассмотрены пороговой фильтрации данных для повышения качества прогнозов.

Ключевые слова. Прогнозирование, техногенные пожары, автокорреляция, преобразование Фурье, пороговая фильтрация

1 Введение

Необходимость составления прогноза пожаров на период 1-2 месяца обусловлена решением задач планирования обеспечения подразделений ГПС МЧС России, решения кадровых вопросов, определение режимов несения службы. Особенно актуальным это является в труднодоступных районах Крайнего Севера и обширных по площади регионах Сибири, где своевременное обеспечение подразделений всем необходимым может быть затруднено как протяженностью путей сообщения, так и погодными условиями. Кроме того, оперативный прогноз необходим для организации и проведения работ профилактики и предотвращению пожаров.

Целью данной работы является разработка методики оценочного оперативного прогнозирования количества техногенных пожаров на примере регионов Сибири и Дальнего Востока.

Работа проводилась в рамках проекта по созданию универсальной методики прогнозирования количества техногенных пожаров в различных регионах России. Актуальность работы определяется тем, что существующая в подразделениях МЧС России практика использования показателя «Аналогичный период прошлого года» как основы построения прогнозов и отчетности не в полной мере использует потенциал ретроспективных данных и требует совершенствования.

В настоящей работе прогнозирование основано на использовании автокорреляционных функций для прогнозирования временных рядов. Этот математический аппарат широко используется в экономике, демографии, метеорологии [[1], [2], [3]]. Однако для решения задач обеспечения техноферной безопасности данный метод используется сравнительно редко [[4]], а в русскоязычной литературе за последние 10 лет работы

подобной направленности, по сведениям автора, не встречаются вообще.

2 Автокорреляционная модель процесса возникновения пожаров

Рассмотрим данные о количестве пожаров в Красноярском крае по месяцам за период с января 2006 года по июнь 2011 [[5]]. На рисунке 1 приведен график изменения количества пожаров за 66 месяцев.

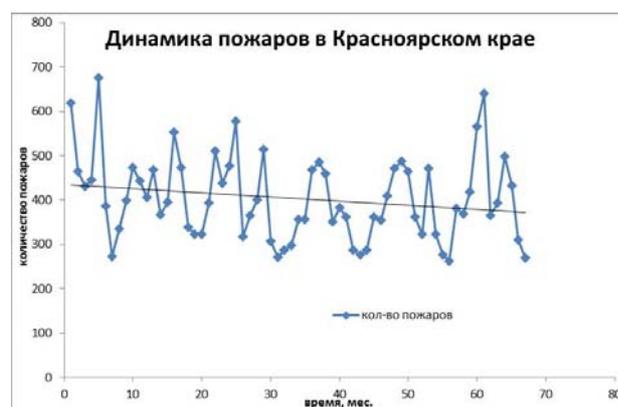


Рис. 1: Динамика пожаров в Красноярском крае

Как можно заметить из рисунка 1, зависимость количества пожаров от времени представляет собой периодическую функцию с линейным убывающим трендом (линия тренда добавлена на рисунке). Для составления прогноза воспользуемся методами прогнозирования временных рядов.

Предположим, что возникновение техногенных пожаров представляет собой стационарный процесс $y(t)$. Найдем автокорреляционную функцию этого процесса.

Основными статистическими характеристиками временного ряда являются математическое ожидание:

$$\bar{y}(t) = M[y(t)],$$

дисперсия:

$$\sigma^2(t) = D[y(t)],$$

и автокорреляционная функция временного ряда:

$$\rho(t, s) = \frac{M[(y(t) - \bar{y}(t)) * (y(\tau) - \bar{y}(\tau))]}{\sigma(t) * \sigma(s)},$$

где $\sigma(t)$, $\sigma(\tau)$ – средние квадратические отклонения [[6], [7]]. В приведенных формулах и далее черта над переменной означает осреднение по времени.

Оценками автокорреляционной функции являются выборочные коэффициенты автокорреляции:

$$r(t, t-L) = \frac{(y(t) * y(t-L)) - (\overline{y(t)}) * (\overline{y(t-L)})}{s(t) * s(t-L)},$$

где

$$s(t) = \sqrt{(y(t) * y(t)) - (\overline{y(t)}) * (\overline{y(t)})},$$

$$s(t-L) = \sqrt{(y(t-L) * y(t-L)) - (\overline{y(t-L)}) * (\overline{y(t-L)})},$$

$$\overline{y(t) * y(t-L)} = \left(\frac{\sum_{i=1+L}^N y(i)y(i-L)}{N-L} \right), \quad \overline{y(t) * y(t)} = \left(\frac{\sum_{i=1+L}^N y(i)y(i)}{N} \right)$$

$$\overline{y(t)} = \left(\frac{\sum_{i=1+L}^N y(i)}{N-L} \right), \quad \overline{y(t-L)} = \left(\frac{\sum_{i=1+L}^N y(i-L)}{N-L} \right).$$

Здесь N – длина ряда, величина лага L .

Коррелограмма количества возникших пожаров в Красноярском крае представлена на рисунке 2. Пунктирными линиями показан интервал доверительной трубки при доверительной вероятности 0,95. Величина лага была выбрана от $L = 1$ до $L = 15$, что было несколько больше, чем визуально определяемый период колебания количества пожаров.



Рис. 2: Коррелограмма

Статистический критерий Дарбина – Уотсона для приведенных данных составляет $DW=0,059$, при $DW_{up} =$

$1,634$ $DW_{low} = 1,574$. Следовательно, можно предположить наличие положительной автокорреляции, по крайней мере, первого порядка. Проверка значимости коэффициентов автокорреляции по критерию Стьюдента на уровне значимости 0,05 показывает, что все коэффициенты значимо отличаются от нуля. Как мы видим из рисунка 2, максимальные коэффициенты автокорреляции приходятся на $L = 1$ и $L = 12$, что говорит о наличии выраженной тенденции (тренда) и выраженной периодичности колебаний количества пожаров, с периодом в 12 месяцев. Это хорошо согласуется с априорной информацией. Модель процесса будем искать в виде:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) + \varepsilon(t), \quad (1)$$

где n – максимальный учитываемый лаг, $\varepsilon(t)$ – ошибка модели в момент времени t . Параметры модели a_i могут быть выражены через выборочные коэффициенты автокорреляции $r(i)$ в системе уравнений Юла – Уокера:

$$\begin{cases} r(1) = a_1 + a_2 r(1) + \dots + a_n r(n-1), \\ r(2) = a_1 r(1) + a_2 + \dots + a_n r(n-2), \\ \vdots \\ r(n) = a_1 r(n-1) + a_2 r(n-2) + \dots + a_n, \end{cases}$$

где n – максимальный лаг. Представим решение данной системы в матричной форме:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r(1) & \dots & r(n-1) \\ r(1) & 1 & \dots & r(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(n-1) & r(n-2) & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(n) \end{pmatrix}$$

Для удобства анализа временного ряда сначала проведем его центрирование, вычтя из значений $y(t)$ трендовую составляющую:

$$z(t) = y(t) - y_{tr}(t) \quad (2)$$

где $y_{tr}(t)$ – линейный тренд процесса:

$$y_{tr}(t) = a \cdot t + b,$$

Коэффициенты линейной модели тренда, найденные по методу наименьших квадратов, равны $a = -0,9528$, $b = 435,93$. Величина коэффициента a говорит о снижении количества пожаров в среднем на 1 пожар/мес. Далее, для центрированного процесса пересчитаем коэффициенты автокорреляции и решим систему уравнений Юла – Уокера. Подставим найденные

значения в модель (1), при $n = 12$. Таким образом, получим прогнозирующую модель в виде:

$$z(t) = 0,533 \cdot z(t-1) - 0,015 \cdot z(t-2) - 0,098 \cdot z(t-3) + 0,042 \cdot z(t-4) - 0,213 \cdot z(t-5) - 0,363 \cdot z(t-6) - 0,187 \cdot z(t-7) + 0,032 \cdot z(t-8) - 0,127 \cdot z(t-9) - 0,084 \cdot z(t-10) + 0,298 \cdot z(t-11) + 0,579 \cdot z(t-12)$$

Подставив значения центрированной функции, получаем вектор модельных данных, без учета трендовой компоненты. Проведя преобразование, обратное (2), получим модель количества пожаров. Оценим ее погрешность:

$$\varepsilon = t_{\alpha, n-1} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z(t) - y(t))^2}{n \cdot (n-1)}}$$

где $t_{\alpha, n-1}$ – критерий Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,05$, n – объем выборки.

Для данного примера получим, $\varepsilon = 114$. Проверим метод с помощью ретро-прогнозирования на 1 месяц вперед, т.е. на июль (67-й месяц в нашей постановке задачи):

$$z(67) = 291 \mp 114 \text{ пожаров.}$$

Фактически, на июль 2011 года в Красноярском крае было зарегистрировано 269 пожаров, ошибка прогноза составила 22 пожара, в сторону завышения, или 8,2 % от фактического числа пожаров.

Средняя ошибка прогноза составляет 51 пожар по абсолютной величине, или около 13% от среднего количества пожаров за рассматриваемый период. На рисунке 3 приведен график исходных данных и модели с прогнозом на один месяц.

Таким образом, мы получили удовлетворительное совпадение фактических и модельных данных. Построим аналогичные модели для других регионов. Основные результаты моделирования приведены в таблице 1.

Наихудшие результаты мы имеем для Красноярского края, что, по-видимому, связано с наибольшей географической неоднородностью территории данного региона.

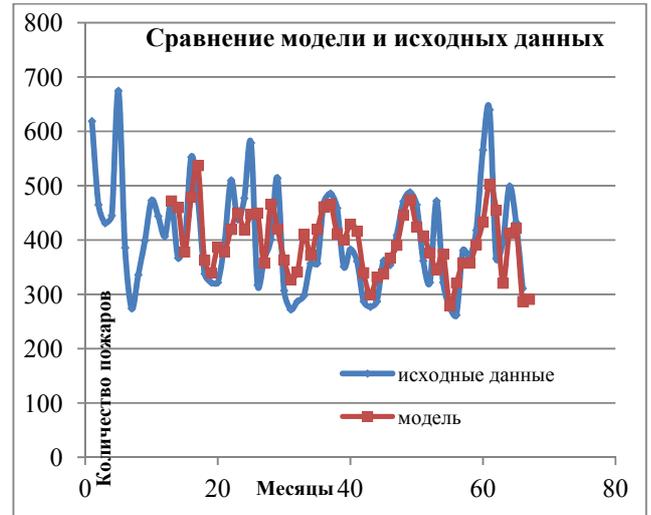


Рис. 3: Сравнение исходных данных и модели

Таблица 1: Характеристики автокорреляционных моделей для разных регионов.

Регион	Математическое ожидание	Полушири на доверительного интервала	Средняя ошибка	Доля ошибок от среднего, %
Красноярский край	406	114	51	13
Забайкальский край	177	49	19	10
Новосибирская область	337	77	30	9
Иркутская область	360	84	32	9

3 Исследование спектра процесса возникновения пожаров

Поскольку процесс возникновения пожаров можно рассматривать как некоторый сигнал дискретного времени, для построения прогнозирующих моделей имеет смысл изучить спектр этого сигнала. Для получения спектра будем использовать преобразование Фурье:

$$Y(i\omega) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$$

где ω – частота сигнала.

Вновь обратимся к данным по Красноярскому краю, сократив временной ряд до $N=64$ значений (это связано с реализацией алгоритма быстрого преобразования Фурье в системе Mathcad). На рисунке 4 приведен спектр возникновения пожаров в Красноярском крае.

Как мы видим из рисунка 4, существенные амплитуды имеются во всех частотных областях спектра, хотя больший вклад вносят области средних и низких частот. Применим пороговый фильтр:

$$G_j = Y_j \Phi(|Y_j| - p)$$

где p – величина порога, выбираемая из условия:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^N (y_j(t) - g_j(t))^2 \rightarrow \min,$$

где $g_j(t)$ – сигнал после фильтрации, полученный обратным преобразованием Фурье над G . На рисунке 4 приведена величина выбранного порога $p = 85$.

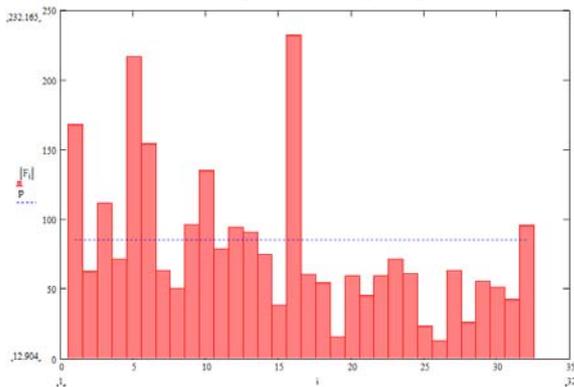


Рис. 4: Спектр временного ряда количества пожаров в Красноярском крае.

На рисунке 5 приведены исходная модель и модель и после фильтрации. Построим автокорреляционную модель полученного после фильтрации сигнала, по методике, описанной выше. Результаты прогнозирования для различных регионов приведены в таблице 2.

Как следует из таблицы 2, мы имеем незначительное улучшение прогнозных характеристик модели по двум регионам, по Новосибирской области характеристики практически не изменились, по Забайкальском краю наблюдается незначительное ухудшение характеристик. Таким образом, на данном этапе исследования, нельзя дать однозначный ответ на вопрос о необходимости применения спектров Фурье и пороговой фильтрации в задачах прогнозирования пожаров. Однако полученные результаты, на наш взгляд, свидетельствуют о перспективности дальнейшего изучения этого вопроса, в том числе привлечение оконного преобразования Фурье и вейвлет-преобразования.

Таблица 2: Характеристики автокорреляционных моделей для разных регионов после фильтрации

Регион	Математическое ожидание	Полуширина доверительного интервала	Средняя ошибка	Доля ошибок от среднего, %
Красноярский край	418	100	44	11
Забайкальский край	179	57	24	13
Новосибирская область	338	63	31	9
Иркутская область	364	73	30	8

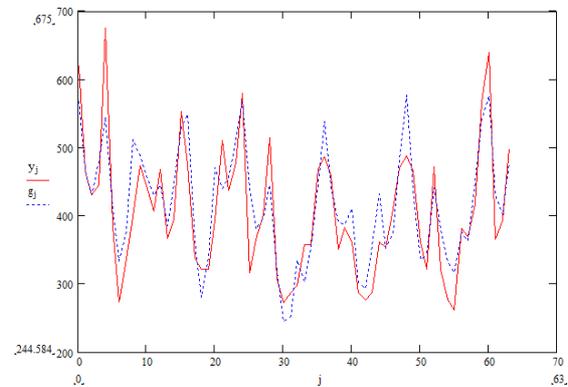


Рис. 5: Исходные данные и модель после пороговой фильтрации.

4 Основные результаты и выводы

В настоящее время существует практика прогнозирования количества пожаров, основанная на использовании данных за аналогичный период прошлого года. На наш взгляд, подобный подход нуждается, по крайней мере, в уточнении. Для уточнения прогнозов использовался хорошо известный в экономике и эконометрике метод автокорреляции.

Полученные автокорреляционные модели позволяют прогнозировать количество пожаров на месяц вперед с точностью порядка 87 – 92% от среднего количества пожаров за весь исследуемый период. Исследования проводились по 4 регионам: Красноярский край, Забайкальский край, Новосибирская область, Иркутская область.

Дополнительно, для повышения качества прогнозирующих моделей, был исследован Фурье-

спектр процесса возникновения пожаров и применена пороговая фильтрация. Однако на данном этапе существенных улучшений добиться не удалось.

Предложенный подход к прогнозированию количества техногенных пожаров в масштабе региона позволяет добиться удовлетворительного качества прогноза на период в 1 месяц. Перспективой данной работы является изучение спектров количества пожаров, полученных путем оконного преобразования Фурье и вейвлет – преобразования.

Литература

- [1] Ширнаева, С.Ю. Краткосрочное прогнозирование факторов макроэкономической стабилизации экономики России / Ширнаева С.Ю. // *Вестник Оренбургского государственного университета*. – 2011. – № 120. – С. 133-137.
- [2] Личко, К.П. Прогноз урожайности зерновых культур как основа прогнозирования объемов сельскохозяйственного производства / Личко К.П., Шумская Е.В. // *Проблемы прогнозирования*. - 2007. - № 3. - С. 60-67.
- [3] Шугунов, Л.Ж. Разложение, анализ и прогноз временных рядов метеопараметров / Шугунов Л.Ж., Куповых Г.В. // *Известия Таганрогского государственного радиотехнического университета*. - 2005. - Т. 55. № 11. - С. 15-21.
- [4] R.Shumway, D.S.Stoffer. Time Series Analysis and its Applications.— Springer, 2000. – P. 549.
- [5] Статистика пожаров [Электронный ресурс] / Статистика Пожаров, 2011 – Режим доступа: <http://statp.ru/index.php>.
- [6] Арутюнян, С.А. Системы цифровой обработки сигналов: Сборник заданий по выполнению расчетно-графических и контрольных работ для студентов специальности 230105 Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем очной, очной сокращенной, заочной форм обучения/ С.А. Арутюнян. – Красноярск: СибГТУ, 2010, - 53с.
- [7] Доррер, Г.А. Теория информационных процессов и систем: Учебное пособие для студентов специальности 230201.65 - «Информационные системы и технологии» / Г.А. Доррер. – Красноярск: СибГТУ, 2009. – 202 с.

Методы математической статистики для исследования результатов деятельности страховых компаний России

**Яна Игоревна
Бурцева**

Самарский государственный экономический
университет
Самара
janabur@mail.ru

**Екатерина Владимировна
Родионова**

Самарский государственный экономический
университет
Самара
krodionova2008@rambler.ru

**Светлана Юрьевна
Ширнаева**

Самарский государственный экономический
университет
Самара
shirnaeva_sy@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассмотрены методы теории вероятностей и математической статистики для исследования результатов деятельности страховых компаний. Разработана система статистических показателей, характеризующих деятельность страховых компаний, проведен корреляционный анализ отобранных показателей, построены регрессионные модели взаимосвязи между показателями, проведена рейтинговая оценка крупнейших российских страховых компаний при помощи многомерных непараметрических методов.

Ключевые слова. Математическая статистика, теория вероятностей, страховые компании, статистические показатели, закономерности, закон распределения, рейтинг, метод «Паттерн», метод относительных разностей, метод суммы мест.

1 Введение

Страхование, в том числе и российское, является специфическим видом хозяйственной деятельности, направленной на защиту отдельных хозяйств от определенных неблагоприятных случаев, если страхование несет имущественный характер, или создающей обеспечение единовременной или постоянной выдачей денег (страховых денежных премий) при страховании жизни. [1]

Характерной чертой примеров страховых ситуаций является то, что финансовый эквивалент возмещения риска потерь для клиента страховой компании заведомо значим, тогда как для самой компании отдельные возмещения сравнительно малозначимы. При этом, с большой степенью достоверности, можно считать, что убытки от отдельных полисов можно считать независимыми случайными.

В настоящее время происходит интенсивный процесс взаимопроникновения идей и методов управления риском финансовой и актуарной математики. Вывод один: необходимо привлекать для возникающих постоянно проблем оценки и прогнозирования риска, а значит и управления риском, тонкие математические и статистические методы.

Цель данной работы - применить методы математической статистики и теории вероятностей для

исследования результатов деятельности страховых компаний.

2 Основные задачи исследования

1. Изучить сведения о прямом возмещении убытков по обязательному страхованию гражданской ответственности владельцев транспортных средств.
2. Разработать систему статистических показателей, характеризующих деятельность страховых компаний, сформировать информационный массив исследования.
3. Проверить гипотезы о законах распределения отобранных показателей.
4. Построить регрессионные модели парной зависимости показателей.
5. С помощью метода «Паттерн» составить рейтинг страховых компаний России.
6. Сгруппировать страховые компании России по результатам деятельности в 2010 году.

3 Страхование как экономическое явление

Объектом прделанного исследования являются страховые компании. Прежде чем приступить к рассмотрению основных аспектов работы, следует ознакомиться с сущностью страхования как экономического и математического явления.

Теоретически страхование определяется как уничтожение случая путем распределения риска. Случаем называется всякое явление, причина которого неизвестна и влияние которого на нас непреодолимо.

Сущность страхования сводится к уничтожению влияния неблагоприятного случая распределения ущерба, понесенного отдельным хозяйством, на возможно большую массу хозяйств, которая называется страховым полем [2].

Страховые компании участвуют: в формировании, распределении, использовании страховых фондов, инвестировании части свободных резервных фондов на финансовом рынке. Оборот средств, связанных с обеспечением страховой защиты имеет определенную вероятность, так как в его основе лежит вероятность наступления страхового случая. Поэтому формирование

страхового фонда компании имеет вероятностный характер. В основе его формирования лежит страховой тариф (тарифная ставка), то есть цена страховой услуги.

Особое внимание уделяется отдельной отрасли деятельности страховых компаний - прямому возмещению убытков. Этот особый вид возмещения означает, что потерпевший, владелец транспортного средства, вправе предъявить требование о возмещении ущерба страховой компании, с которой у потерпевшего заключен договор обязательного страхования гражданской ответственности [3].

Если потерпевший реализовал свое право на прямое возмещение ущерба при ДТП, а позже выяснится, что в аварии причинен вред здоровью или жизни, о котором он не знал на момент предъявления требования ПВУ, он может обратиться за возмещением вреда в страховую компанию, с которой заключил договор обязательно страхования виновным.

4 Описание данных

В настоящем исследовании используются данные о деятельности 123 российских страховых компаний за 2010 г. [4] по следующим показателям:

X_1 - количество предъявленных потерпевшими требований о возмещении вреда, причиненного их имуществу, единица;

X_2 - сумма заявленных убытков по требованиям потерпевших о возмещении вреда, причиненного имуществу, тыс. руб.;

X_3 - количество мотивированных отказов потерпевшим по их требованиям о возмещении вреда, причиненного имуществу, единица;

X_4 - количество оплаченных требований потерпевших о возмещении вреда, причиненного их имуществу, единица;

X_5 - сумма выплат потерпевшим по требованиям о возмещении вреда, причиненного имуществу, тыс. руб.;

X_6 - количество требований, направленных в соответствии с Соглашением о прямом возмещении убытков страховщикам, застраховавшим гражданскую ответственность лиц, причинивших вред, единица;

X_7 - количество требований, по которым поступили денежные средства в соответствии с Соглашением о прямом возмещении убытков от страховщиков, застраховавших гражданскую ответственность лиц, причинивших вред, единица;

X_8 - сумма поступивших денежных средств в соответствии с Соглашением о прямом возмещении убытков от страховщиков, застраховавших гражданскую ответственность лиц, причинивших вред, тыс. руб.

5 Методы исследования

Методологическую основу исследования образуют следующие статистические методы:

1. Выборочный метод.
2. Метод группировки.
3. Робастные методы оценивания.
4. Корреляционный анализ.
5. Регрессионный анализ.
6. Многомерные непараметрические методы (метод «Паттерн»).

Для практической реализации указанных методов в работе использовались программные приложения STATISTICA 8.0 и MS Excel.

6 Результаты исследования

Первым этапом исследования стало выяснение вопроса о качестве собранной статистической информации.

Таблица 1: Описательная статистика показателей деятельности российских страховых компаний

	Среднее \bar{X}	Среднее квадратическое отклонение σ	Коэффициент вариации v , %
X_1	2482,5	778,5	28,9
X_2	52485,8	4592,2	8,8
X_3	274,8	79,6	28,9
X_4	1952,2	673,8	34,5
X_5	40536,2	1819,4	4,5
X_6	1858,1	636,8	34,3
X_7	1730,7	529,7	30,6
X_8	37432,8	1855,6	4,9

Из информационного массива были исключены данные страховых компаний, по которым имелись нулевые значения. Затем была осуществлена проверка показателей на наличие аномальных наблюдений с помощью критерия Граббса [10].

В результате из 123 российских страховых компаний в исследовании остались 102 компании. Описательная статистика по исследуемым статистическим показателям представлена в Табл.1. Коэффициенты вариации по большинству показателей меньше 33%, что говорит об их однородности.

Далее в работе была осуществлена проверка соответствия эмпирических распределений нормальному закону (в качестве критерия соответствия рассматривался критерий χ^2). Проверка показала, что большинство показателей деятельности страховых компаний

подчиняется нормальному закону распределения на 5% - ном уровне значимости.

Для того, чтобы выяснить вопрос о существовании закономерной связи между изучаемыми явлениями был применен корреляционный анализ [5]. Полученная матрица парных коэффициентов корреляции представлена в Табл.2.

Таблица 2: Матрица парных коэффициентов корреляции между показателями деятельности страховых компаний

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈
X ₁	1,00							
X ₂	0,92	1,00						
X ₃	0,96	0,80	1,00					
X ₄	0,99	0,91	0,96	1,00				
X ₅	0,99	0,93	0,95	0,89	1,00			
X ₆	0,99	0,91	0,96	0,81	0,99	1,00		
X ₇	0,99	0,91	0,96	0,86	0,99	0,98	1,00	
X ₈	0,99	0,92	0,94	0,79	0,99	0,91	0,96	1,00

Из Табл.2 следует, что между рассматриваемыми видами выплат наблюдается тесная взаимосвязь. Все парные коэффициенты корреляции статистически значимы по критерию Стьюдента на 5%-ном уровне значимости.

Результаты корреляционного анализа послужили основой для построения моделей парной линейной регрессии по рассматриваемым показателям. Некоторые их построенных моделей представлены в Табл.3

Возможность четкой интерпретации коэффициента регрессии сделала линейное уравнение регрессии достаточно распространенным в экономических исследованиях.

Таблица 3: Результаты регрессионного анализа

Модель	Коэффициент детерминации R ²
$X_3=0,08X_1+64,7$	0,927
$X_5=16,2X_1-263,8$	0,988
$X_5=187X_3-6775,4$	0,903
$X_8=20,7X_7+1704,6$	0,995

Так, если в уравнении $X_5 = 16,2X_1 - 263,8$ количество предъявленных потерпевшими требований о возмещении вреда, причиненного их имуществу увеличится на 1 единицу, то сумма выплат потерпевшим по требованиям о возмещении вреда, причиненного имуществу увеличится на 16, 2 тыс. руб. (X_5 - сумма

выплат потерпевшим по требованиям о возмещении вреда, причиненного имуществу, тыс. руб., X_1 - количество предъявленных потерпевшими требований о возмещении вреда, причиненного их имуществу, единица). Для данного уравнения коэффициент детерминации R² показывает, что вариация значений признака X_5 на 98,8% объясняется вариацией значений признака X_1 , а на остальные 1,2% неучтенными факторами.

Далее в работе исследование прямых возмещений убытков по обязательному страхованию гражданской ответственности владельцев транспортных средств осуществлялось при помощи многомерных непараметрических методов, использующих относительные оценки, а именно с помощью метода относительных разностей и метода «Паттерн».

На основе этих двух методов были вычислены рейтинги страховых компаний (частные и общий). Выявлено, что значения, вычисленные двумя разными способами, совпадают.

Произведенные вычисления позволили осуществить группировку страховых компаний по результатам работы. Можно выделить пять групп компаний с равными интервалами:

Результаты расчетов:

- 1 группа (высокий уровень конкурентоспособности): Росгосстрах
- 2 группа (уровень выше среднего): Ресо-гарантия
- 3 группа (средний уровень): нет страховых компаний
- 4 группа (низкий уровень): Военная страховая компания, Ингострах, Росно, Спасские ворота.
- 5 группа (неконкурентоспособные страховые компании): Оставшиеся страховые компании

Исходя из результатов рейтинга, можно сделать вывод о том, что страховой рынок в России (в секторе автомобильного страхования) достаточно монополизирован и разделен между двумя конкурирующими компаниями: Росгосстрах и Ресо-гарантия. Кроме них есть группа небольших страховых организаций, показатели которых достаточно высоки по сравнению с общим уровнем: Военная страховая компания, Ингострах, Росно и Спасские ворота.

Несомненным лидером в автостраховании является Росгосстрах, это можно объяснить тем, что в отличие от небольших компаний "Росгосстрах" - общенациональная и системообразующая компания - имеет многолетний практический опыт работы в масштабах огромного государства.

Представленный рейтинг иллюстрирует нам не только то, какие компании являются ведущими, но также раскрывает некоторые проблемы развития данной отрасли.

Страхованием в России занимается малое количество настоящих конкурентоспособных компаний. Одной из главных причин медленного развития страхования имущества юридических лиц является отсутствие правового регулирования. Страховой рынок сегодня является довольно нестабильным и плохо развитым, к тому же широко известны случаи страхового мошенничества как со стороны страховщика, так и страхователя.

Литература

- [1] *Финансы: Учебник для вузов/ Под ред. проф. Л. А. Дробозиной.* М.: ЮНИТИ, 2001. 527 с.
- [2] Российское страхование <http://russia-strax.ru/actual-strax.php>
- [3] С.К.Казанцев. Основы страхования – Екатеринбург: 1998
- [4] Статистический портал StatSoft – <http://www.statsoft.ru>
- [5] О.А. Репин. Математика для экономистов. Теория вероятности и математическая статистика: учеб. Пособие/ О.А. Репин, Е.И. Суханова, Л.К. Ширяева. – 3-е изд., испр. И доп. – Самара: Изд-во Самар. Гос. Экон. Акад., 2005. – 236 с.
- [6] РИА-Аналитика: рейтинг страховых компаний http://www.vsk.ru/about/press_center/about_us/?id=2377
- [7] И.И. Елисеева. *Эконометрика: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой.* –М.: Финансы и статистика, 2004. – 344 с
- [8] Н. В. Макарова, В.Я. Трофимец. Статистика в Excel: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
- [9] А.И. Орлов. *Прикладная статистика.* М.: Издательство «Экзамен», 2004. – 672 с.
- [10] А.М. Дубров, В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин. Многомерные статистические методы: Учебник. – М.: – Финансы и статистика, 2003, – 352 с.

Рекурсия в вычислительных задачах линейной алгебры

Валентина Владимировна Быкова

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярск
bykvalen@mail.ru

Аннотация. Приведен анализ сложности рекурсивного алгоритма Штрассена быстрого умножения матриц и схемы исключения Гаусса. Показана полиномиальная разрешимость основных задач линейной алгебры и их полиномиальная сводимость к задаче умножения матриц.

Ключевые слова. Рекурсивные алгоритмы, быстрые вычисления, матричная алгебра.

1 Введение

На сегодняшний день основным современным инструментом анализа рекурсивных алгоритмов является метод рекуррентных соотношений. Идея этого метода состоит в построении и решении рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет функция сложности $t(n)$ анализируемого алгоритма. Однако здесь часто возникают серьезные трудности, связанные с отсутствием общих правил решения рекуррентных соотношений. Поэтому всякий математический результат, дающий какой-либо общий подход решения проблемы анализа рекурсивных алгоритмов, интересен как теоретически, так и практически. К подобным результатам можно отнести теорему 1, доказанную Дж. Бентли, Д. Хакена и Дж. Сакса для рекурсии, организованной по принципу «разделяй и властвуй» (когда размерность задачи n уменьшается в k раз) [1].

Теорема 1. Пусть дано рекуррентное соотношение

$$t(n) = \begin{cases} c, & \text{если } n = 1, \\ at(n/k) + bn^\tau, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

где $a > 0$, $k > 1$ – целые константы, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $\tau \geq 0$ – вещественные константы. Тогда при $n = k^m$, $m \in \mathbf{Z}^+$ решением данного соотношения является функция

$$t(k^m) = \begin{cases} a^m c + bk^{m\tau} m, & \text{если } a = k^\tau, \\ a^m c + bk^{m\tau} \frac{(a/k^\tau)^m - 1}{(a/k^\tau) - 1}, & \text{если } a \neq k^\tau. \end{cases}$$

Следствие 2. В предположениях теоремы 1 при больших значениях n и любых $b > 0$ и $c \geq 0$ справедливы асимптотические оценки

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^\tau \log_k n), & \text{если } a = k^\tau, \\ \Theta(n^\tau), & \text{если } a < k^\tau, \\ O(n^{\log_k a}), & \text{если } a > k^\tau. \end{cases}$$

Если $b = 0$ и $c > 0$, то всегда

$$t(n) = \Theta(n^{\log_k a}).$$

Этот широко известный результат дополняет теорема 3, доказанная в работе [2] для рекурсии, организованной по принципу «уменьшай и властвуй» (когда размерность задачи n уменьшается на некоторую константу k).

Теорема 3. Пусть дано рекуррентное соотношение

$$t(n) = \begin{cases} c, & \text{если } 0 \leq n \leq k-1, \\ at(n-k) + bn^\tau, & \text{если } n \geq k, \end{cases}$$

где $a > 0$, $k \geq 1$ – целые константы, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $\tau \geq 0$ – вещественные константы. Тогда при $n = km$, $m \in \mathbf{Z}^+$ и $n \rightarrow \infty$ верны оценки

$$\begin{aligned} t(n) &= \Omega(n), \quad t(n) = O(n^{\tau+1}), \quad a = 1, b > 0, \\ t(n) &= \Omega(a^{n/k}), \quad t(n) = O(n^\tau a^{n/k}), \quad a > 1, b > 0, \\ t(n) &= \Theta(1), \quad a = 1, b = 0, \\ t(n) &= \Theta(a^{n/k}), \quad a > 1, b = 0. \end{aligned}$$

В теоремах 1, 3 и следствии 2 константа a трактуется как число подзадач, порождаемых рекурсивной ветвью алгоритма, а степенная функция bn^τ определяет трудоемкость рекурсивного перехода. Здесь и далее применяются следующие асимптотические обозначения:

- $u(n) = \Omega[w(n)]$ – функция $u(n)$ не меньше функции $w(n)$ по порядку роста;
- $u(n) = O[w(n)]$ – функция $u(n)$ не больше функции $w(n)$ по порядку роста;
- $u(n) = \Theta[w(n)]$ – функция $u(n)$ асимптотически пропорциональна $w(n)$.

Теоремы 1 и 3 предоставляют разработчикам алгоритмов и программ достаточно мощное средство асимптотической оценки сложности рекурсивных алгоритмов, построенных определенным образом. Их применение не требует особых математических знаний и потому они могут быть использованы в широкой алгоритмической практике. Далее демонстрируется применение данных теорем при анализе рекурсивных алгоритмов решения основных задач линейной алгебры.

2 Быстрое умножение квадратных матриц по принципу «разделяй и властвуй»

Рассмотрим задачу умножения двух квадратных матриц $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ порядка n . Допустим, что элементы этих матриц берутся из множества действительных

чисел. Данная задача полиномиально разрешима. Классический алгоритм умножения матриц $A \times B = C$, формирующий элементы результирующей матрицы $C = \{c_{ij}\}$ по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

имеет вид трех вложенных друг в друга циклов. Его временная сложность $t(n)$ равна

$$t(n) = \Theta(n^3).$$

Вероятно это не лучший алгоритм. Но какова оценка снизу, т.е. какова сложность самой задачи умножения двух квадратных матриц?

Попробуем получить некоторую тривиальную оценку. В самом деле, результирующая матрица $C = \{c_{ij}\}$ имеет n^2 элементов. Для вычисления любого элемента этой матрицы нужна хотя бы одна операция однопроцессорной машины – два элемента за одну операцию вычислить нельзя. Значит, для функции сложности алгоритмов $t(n)$ умножения квадратных матриц верна оценка

$$t(n) = \Omega(n^2).$$

Это и есть тривиальная оценка сложности рассматриваемой задачи. До сих пор неизвестно, является ли данная оценка достижимой. Однако она позволяет надеяться, что для задачи перемножения матриц существуют полиномиальные разрешающие алгоритмы, сложностью ниже $\Theta(n^3)$. Действительно, в 1969 г. немецкому ученому Ф. Штрассену удалось улучшить оценку классического алгоритма. Его рекурсивный алгоритм имеет сложность $O(n^{2,81})$. С тех пор асимптотическая оценка сложности задачи умножения матриц многократно улучшалась. Наилучшая известная на сегодняшний день оценка сложности умножения двух квадратных матриц составляет приблизительно $O(n^{2,376})$ [3]. Поиск оптимального по времени алгоритма продолжается, так что вопрос о сложности данной задачи пока остается открытым. С методологической точки зрения важно, что ускорение вычислений в алгоритме Штрассена и во всех других алгоритмах быстрого умножения матриц достигается за счет организации рекурсии по принципу «разделяй и властвуй». Рассмотрим действие этого принципа на алгоритме Штрассена.

Пусть порядок умножаемых матриц n – степень числа 2. Здесь n характеризует размерность решаемой задачи. Алгоритм Штрассена работает следующим образом. Вначале выполняется разделение исходной задачи на подзадачи путем разбиения каждой матрицы A и B на четыре блока размера $(n/2) \times (n/2)$. В результате равенство $A \times B = C$ приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Далее C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} вычисляются рекурсивно с помощью 7 операций умножения и 18 операций сложения (вычитания) уменьшенных вдвое матриц по формулам [4, 5]:

$$M_1 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22}),$$

$$M_2 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22}),$$

$$M_3 = (A_{11} - A_{21}) \times (B_{11} + B_{12}),$$

$$M_4 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22},$$

$$M_5 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22}),$$

$$M_6 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11}),$$

$$M_7 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11},$$

$$C_{11} = M_1 + M_2 - M_4 + M_6,$$

$$C_{12} = M_4 + M_5,$$

$$C_{21} = M_6 + M_7,$$

$$C_{22} = M_2 - M_3 + M_5 - M_7.$$

Подстановка данных формул в (1) приводит к тождеству. Если на текущем вызове алгоритма получаются блоки размера 2×2 , то результат вычисляется непосредственным применением этих формул (но действия уже выполняются не над матрицами, а над элементами полученных матриц). Это условие остановки рекурсии. Очевидно, что время работы $t(n)$ такого алгоритма определяется рекуррентным соотношением

$$t(n) = \begin{cases} 25, & \text{если } n = 2, \\ 7t(n/2) + 18(n/2)^2, & \text{если } n > 2. \end{cases} \quad (2)$$

Соотношение (2) свидетельствует о том, что объединение решений 7 подзадач в решение исходной задачи требует выполнения $18(n/2)^2$ операций сложения (вычитания) элементов матриц размера $(n/2) \times (n/2)$. Соотношение (2) можно доопределить так:

$$t(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 7t(n/2) + 18(n/2)^2, & \text{если } n \geq 2. \end{cases}$$

Применение к данному соотношению теоремы 1 и следствия 2 дает оценку

$$t(n) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2,81}), \quad (3)$$

поскольку здесь $a = 7$, $k = 2$, $\tau = 2$ и $a > k^\tau$ ($7 > 2^2$).

Если n не является степенью числа 2, то каждую исходную матрицу можно вложить в матрицу, порядок которой равен наименьшей степени числа 2, большей n .

Это увеличивает порядок исходных матриц A и B не более чем вдвое, а значит и значение $t(n)$ не более чем в 7 раз. Асимптотическая оценка (3) при этом остается прежней. Следует подчеркнуть, что выигрыш алгоритма Штрассена по сравнению с классическим алгоритмом заметен только при умножении матриц большого размера (примерно 45×45). Так, по теореме 1

$$t(n) = 7^{\log_2 n} + \frac{9}{2} 2^{2 \log_2 n} \frac{(7/4)^{\log_2 n} - 1}{3/4} = 7n^{\log_2 7} - 6n^2,$$

что дает при главной степени в $t(n)$ константу 7. Именно эта константа при малых значениях n делает алгоритм Штрассена менее эффективным по сравнению с классическим алгоритмом. Алгоритм Штрассена, как и все другие алгоритмы быстрого умножения матриц, представляют не только чисто теоретический интерес. Они находят широкое практическое применение в компьютерной графике, теории распознавания образов, теории электрических цепей и т.п. В приложениях приходится работать с матрицами весьма больших размеров, например, размер типичного изображения составляет 1024×1024 точки экрана. Поэтому даже небольшой выигрыш при выполнении одной операции умножения матриц дает большую экономию за счет многократного применения этой операции.

3 Реализация схемы исключения Гаусса путем аддитивного уменьшения размерности задачи

Вычисление определителя числовой матрицы – одна из основных задач линейной алгебры. Кратко изложим сведения из линейной алгебры, необходимые для понимания метода Гаусса [6, 7]. Пусть $A = \{a_{ij}\}$ – произвольная квадратная матрица порядка n с действительными элементами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу A называют

- верхней треугольной матрицей, если $a_{ij} = 0$ при $1 \leq j < i \leq n$;
- нижней треугольной матрицей, если $a_{ij} = 0$ при $1 \leq i < j \leq n$;
- диагональной матрицей, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$;
- единичной матрицей, если $a_{ii} = 1$ при $1 \leq i \leq n$ и $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$;
- нормированной матрицей, если у нее на главной диагонали стоят 1, а вне главной диагонали – произвольные элементы;

– матрицей перестановки, если она состоит из нулей и единиц, причем в каждой строке и каждом столбце располагается ровно одна единица. Определитель матрицы A – однозначно сопоставляемое этой матрице действительное число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}. \quad (4)$$

В случае $\det A \neq 0$ матрицу A считают невырожденной. В формуле (4) каждое слагаемое представляет собой произведение n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы и снабженных знаком. Суммирование выполняется по всем перестановкам $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ чисел $1, 2, \dots, n$. Слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ четная, и знак минус, если эта перестановка нечетная. Как известно, перестановка полагается четной, если число инверсий в ней четно, и нечетной в противном случае. Таким образом, сумма (4) содержит в общем случае $n!$ слагаемых, из которых $n!/2$ положительных и $n!/2$ отрицательных. При $n = 1$ всегда $\det A = a_{11}$.

Непосредственное применение формулы (4) приводит к итерационному алгоритму. Количество итераций такого алгоритма составляет $n!$. Для вычисления каждого слагаемого из (4) с учетом знака достаточно n операций умножения и столько же операций сравнения. Поэтому для функции временной сложности итерационного алгоритма, вычисляющего определитель порядка n , верна оценка

$$t(n) = \Theta(n \cdot n!), \quad (5)$$

что свидетельствует о гиперэкспоненциальной сложности данного алгоритма. Следует отметить, что если матрица A является невырожденной треугольной (верхней, нижней, диагональной), то сумма (4) содержит только одно ненулевое слагаемое и

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Это наиболее благоприятный частный случай и $t(n) = \Theta(n)$. Несколько менее затратный алгоритм вычисления определителя, чем итерационный алгоритм с оценкой (5), дают известные рекуррентные формулы, понижающие порядок определителя:

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Формулу (6) принято называть разложением определителя по элементам i -ой строки, а формулу (7) – разложением определителя по элементам j -го столбца. Напомним, что в (6) и (7) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ есть алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , задаваемое через минор M_{ij} – определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из $\det A$ вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца. Любая из рекуррентных формул (6) или (7) позволяет свести задачу размерности n (вычисления определителя n -го порядка) к идентичным подзадачам размерности $n-1$. Значит, здесь рекурсивному алгоритму будет свойственно аддитивное уменьшение размерности задачи на $k=1$, с числом подзадач $a=n$. Кроме того, для объединения решений подзадач в искомый результат требуется выполнить $3n$ арифметических операций (типа сложения и умножения). Условием останова рекурсии является достижение порядка определителя $n=1$. Таким образом, для рекурсивного алгоритма, реализующего (6) или (7), функция временной сложности $t(n)$ должна удовлетворять следующему линейному рекуррентному соотношению с переменными коэффициентами:

$$t(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ nt(n-1) + 3n, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Это соотношение можно переписать в эквивалентном виде

$$t(n+1) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ (n+1)t(n) + 3(n+1), & \text{если } n \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Найдем решение данного соотношения двумя способами. Так, подстановка его само в себя дает:

$$t(0) = 1,$$

$$t(1) = 1 \cdot t(0) + 1 \cdot 3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1,$$

$$t(2) = 2 \cdot t(1) + 2 \cdot 3 = 2 \cdot 1 + 3(2 \cdot 1 + 2),$$

$$t(3) = 3 \cdot t(2) + 3 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3(3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3),$$

$$t(n) = n! + 3 \left(n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} \right) =$$

$$= n! \left(1 + 3 \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) \right). \quad (9)$$

Исходя из известного предела

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = e,$$

имеем

$$t(n) = \Theta[n!(1 + 3e)] = \Theta(n!). \quad (10)$$

Эта оценка несколько лучше, чем (5), но по-прежнему дает гиперэкспоненциальный характер сложности алгоритма.

К решению (9), а значит и к оценке (10), можно прийти также с помощью экспоненциальной производящей функции

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(n)}{n!} z^n. \quad (11)$$

Действительно, умножение левой и правой части (8) на выражение

$$\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$$

и суммирование по всем $n = 0, 1, \dots$ приводит к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(n+1)}{(n+1)!} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)t(n)}{(n+1)!} z^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} z^{n+1}.$$

С учетом (11) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(n+1)}{(n+1)!} z^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t(m)}{m!} z^m = E(z) - t(0) = E(z) - 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)t(n)}{(n+1)!} z^{n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(n)}{n!} z^n = zE(z),$$

$$3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} z^{n+1} = 3z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Таким образом, исходное соотношение принимает вид уравнения относительно $E(z)$:

$$E(z) = \frac{1}{(1-z)} + \frac{3z}{(1-z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Подстановка в это уравнение экспоненциальной производящей функции (11), разложения

$$\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n$$

и применение формулы умножения рядов дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(n)}{n!} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n + 3z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n + 3z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right). \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при z^n в левой и правой частях равенства приводит к (9). *Возникает вопрос, является ли задача нахождения определителя полиномиально разрешимой? Ответ положительный.* Такой алгоритм, например, порождает схема исключения Гаусса. Согласно этой схеме исходная матрица подвергается эквивалентным преобразованиям. Их цель, не изменяя значения определителя, привести матрицу к виду, когда все элементы первого столбца кроме первого равны нулю. В этом случае формула (7) упрощается $\det A = a_{11} A_{11}$ и ее рекурсивное применение приводит к алгоритму, в котором рекурсия организована аддитивным уменьшением размерности задачи на $k = 1$ с числом подзадач $a = 1$. Эквивалентные преобразования основаны на свойствах определителей.

Рекурсивный алгоритм, реализующий схему исключения Гаусса, работает так. Вначале выполняется подходящая перестановка столбцов матрицы, чтобы $a_{11} \neq 0$. Этот элемент объявляется опорным. Если опорного элемента нет ($a_{1j} = 0$ для всех $1 \leq j \leq n$), то $\det A = 0$ и результат найден. Иначе все элементы первой строки делятся на опорный элемент, и из каждой строки вычитается первая строка. В результате порядок определителя понижается на единицу, а элементы преобразованной матрицы находятся по формуле

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1} a_{1j}}{a_{11}} \quad (i, j = 2, 3, \dots, n).$$

Таким образом, вычисления выполняются согласно рекуррентному соотношению

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^s a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix},$$

где $s = 1$, если при выборе опорного элемента столбцы менялись местами, иначе $s = 0$. Трудоемкость понижения порядка определителя составляет порядка n^2 условных единиц времени. Поэтому время работы рекурсивного алгоритма, реализующего схему исключения Гаусса, описывается рекуррентным соотношением

$$t(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ t(n-1) + n^2, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Отсюда по теореме 3 ($a = 1, k = 1, \tau = 2, b = 1, c = 1$) справедлива оценка

$$t(n) = \Theta(n^3), \tag{12}$$

свидетельствующая о полиномиальной сложности алгоритма.

Итерационная реализация схемы исключения Гаусса сводится к выполнению последовательности n преобразований по уменьшению порядка определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{s_1} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{s_2} a_{11} a_{22}^{(1)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix} = \dots$$

$$= (-1)^{s_n} a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

В результате матрица A преобразуется в нормированную верхнюю треугольную матрицу, определитель которой равен 1. Если при выборе опорных элементов не было перестановок столбцов, то

$$\det A = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}.$$

Иначе знак определителя согласуется с числом s_n осуществленных перестановок за все n итераций алгоритма. Выполнение n преобразований исходной матрицы, трудоемкость каждого из которых составляет порядка $\Theta(n^2)$, дает оценку (12). Следовательно, рекурсивная и итерационная реализации схемы исключения Гаусса сопоставимы по временной сложности. В вычислительной математике разработаны всевозможные модификации схемы исключения Гаусса,

связанные с различными стратегиями выбора опорного элемента. Основное назначение модификаций – обеспечение численной устойчивости этой схемы [8, 9]. Для большинства известных модификаций трудоемкость нахождения опорного элемента не более чем $\Theta(n^2)$, а поэтому их вычислительная сложность не отличается от сложности классической схемы исключения Гаусса.

4 Полиномиальная разрешимость и сводимость основных задач линейной алгебры

Из полиномиальности времени работы схемы исключения Гаусса вытекает полиномиальная разрешимость следующих основных задач линейной алгебры: нахождение ранга матрицы; обращение невырожденной матрицы; решение неоднородной системы линейных уравнений; определение треугольного разложения невырожденной квадратной матрицы. Обоснуем справедливость этих высказываний краткими рассуждениями. Рангом матрицы называют максимальный порядок отличного от нуля минора этой матрицы. Ясно, что ранг невырожденной квадратной матрицы совпадает с ее порядком. В общем случае ранг квадратной матрицы A равен числу ненулевых диагональных элементов верхней треугольной матрицы U , полученной в результате применения к A схемы Гаусса. Если матрица A прямоугольная размером $n \times m$, то схема Гаусса приводит не к треугольной, а трапециевидной матрице. В этой ситуации ранг матрицы также определяется путем подсчета ненулевых диагональных элементов матрицы U . Напомним, что транспонирование матрицы не изменяет значения ее ранга и определителя. Поэтому без потери общности всегда можно полагать, что $m \geq n$. Матрица A^{-1} является обратной к квадратной матрице A , если ее умножение как слева, так и справа на A дает единичную матрицу E :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E.$$

Обратная матрица существует только для невырожденных матриц. Процедура ее вычисления классически определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{A^+}{\det A}, \quad (13)$$

где $A^+ = \{A_{ji}\}$ – присоединенная матрица, элементы которой получаются замещением элементов A^T (транспонированной матрицы A) их алгебраическими дополнениями. Непосредственное применение (13) приводит к полиномиальному алгоритму сложности $\Theta(n^5)$, так как для нахождения каждого из n^2 элементов матрицы A^+ с помощью схемы Гаусса необходимо $\Theta(n^3)$ условных единиц времени. Однако найти матрицу A^{-1} можно гораздо более быстрым путем, применив модифицированную схему исключения Гаусса к прямоугольной матрице (A, E) размера

$n \times 2n$. Модификация заключается в том, что все преобразования применяются не только к строкам и столбцам матрицы A , но и синхронно к строкам и столбцам единичной матрицы. Кроме того, вначале матрица A преобразуется в нормированную верхнюю треугольную матрицу U (прямой ход схемы Гаусса), а затем матрица U в единичную матрицу E (обратный ход схемы Гаусса). В итоге формируется матрица A^{-1} , расположенная в последних n столбцах результирующей прямоугольной матрицы. Очевидно, что для выполнения прямого и обратного ходов схемы Гаусса над матрицей размера $n \times 2n$ достаточно $\Theta(n^3)$ единиц времени: изменение размеров матрицы и двукратное преобразование элементов матрицы способны изменить лишь константу пропорциональности при главной степени в $t(n) = \Theta(n^3)$. Таким образом, вычислить обратную матрицу асимптотически не сложнее, чем найти определитель матрицы.

Всякая неоднородная система из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

представима в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

или с учетом обозначений $A = \{a_{ij}\}$, $X = \{x_j\}$, $B = \{b_i\}$

$$A \times X = B.$$

Если матрица A невырожденная, то для нее существует обратная матрица A^{-1} и решением матричного уравнения является вектор-столбец $X = A^{-1} \times B$. Следовательно, задача нахождения решения неоднородной системы линейных уравнений сводится к вычислению обратной матрицы A^{-1} и выполнению операции умножения двух матриц, одна из которых квадратная, а другая размера $n \times 1$. Все эти действия можно выполнить за время $\Theta(n^3)$. В вычислительной математике показано, что такой подход характеризуется неустойчивостью получаемого решения (накоплением ошибок округления). Этим же недостатком обладает и известное в линейной алгебре правило Крамера [9]. Поэтому на практике схема исключения Гаусса для решения систем линейных уравнений применяется несколько иначе. Подобно преобразованиям, используемым при обращении

матрицы, соответствующие действия выполняются над строками и столбцами расширенной матрицы (A, B) размера $n \times (n + 1)$. В результате (A, B) приводится к матрице (U, Y) , где U – нормированная верхняя треугольная матрица, а Y – преобразованный столбец свободных членов B . Эти действия составляют прямой ход схемы Гаусса. Далее обратным ходом, начиная с последнего уравнения, решается система

$$U \times X = Y.$$

Выполнение прямого и обратного хода схемы Гаусса дает ту же вычислительную сложность алгоритма, т.е. $\Theta(n^3)$.

Решение многих задач линейной алгебры базируется на разложении квадратной невырожденной матрицы в произведение двух треугольных матриц – нижней L и верхней нормированной U – и матрицы перестановки P , т.е. $A = L \times U \times P$. Это разложение называют треугольным или LUP -разложением. Доказано, что это разложение является единственным [9]. Переход к треугольным матрицам упрощает нахождение решений рассмотренных выше задач линейной алгебры. Так, определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, а обратная матрица невырожденной треугольной матрицы есть также треугольная матрица. Существуют два наиболее популярных алгоритма определения треугольного разложения квадратной невырожденной матрицы. Оба базируются на схеме исключения Гаусса и являются рекурсивными. В первом алгоритме [5] рекурсия организована путем аддитивного уменьшения размерности задачи на $k = 1$ с числом подзадач $a = 1$ (подобно тому, как это выполняется при вычислении определителя). Сложность такого алгоритма равна $t(n) = \Theta(n^3)$. Вторым алгоритм асимптотически быстрее первого, поскольку в нем рекурсия устроена по принципу «разделяй и властвуй», когда задача размерности n делится на $a = 2$ подзадач размерности $k = n / 2$ [10]. Он аналогичен алгоритму Штрассена как по способу организации рекурсии, так и по оценке сложности. Для него справедлива оценка (3). Это означает, что найти LUP -разложение квадратной матрицы порядка n можно столь же быстро, как и умножение матриц. То же самое можно сказать и про вычисление определителя матрицы, обращение матрицы и нахождение решения неоднородной системы линейных уравнений. Действительно, если

$$A = L \times U \times P,$$

тогда

$$\det A = \det L \times \det U \times \det P.$$

Значение $\det L$ можно отыскать за время $\Theta(n)$, умножив все диагональные элементы треугольной матрицы L . Для

нормированной верхней треугольной матрицы $\det U$ определитель всегда равен 1. Поскольку P – матрица перестановки, то $\det P = \pm 1$ в зависимости от того, четную или нечетную перестановку задает P . Для выяснения четности или нечетности перестановки требуется не более $n - 1$ сравнений. Поэтому сложность вычисления определителя асимптотически равна сложности поиска LUP -разложения. Пусть n – степень числа 2 и известно разложение невырожденной матрицы $A = L \times U \times P$. Тогда матрицы L, U также невырожденные матрицы и

$$A^{-1} = P^{-1} \times U^{-1} \times L^{-1}, \quad (14)$$

так как матрица, обратная произведению, равна переставленному произведению матриц, обратных к исходным. Разобьем треугольные матрицы L и U на блоки размера $(n/2) \times (n/2)$:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix},$$

где $L_{11}, L_{22}, U_{11}, U_{22}$ есть также треугольные матрицы. Для такого представления треугольных матриц согласно формуле Фробениуса [8] верны выражения

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & 0 \\ -L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1} & L_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1} \times U_{12} \times U_{22}^{-1} \\ 0 & U_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

каждое из которых позволяет свести обращение треугольной невырожденной матрицы порядка n к двум обращениям и двум умножениям матриц порядка $n / 2$. Тогда для функции временной сложности рекурсивного алгоритма нахождения L^{-1} или U^{-1} справедливо рекуррентное соотношение

$$t(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 2t(n/2) + bn^\tau, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Здесь bn^τ – трудоемкость операции умножения матриц порядка n . Отсюда следствие 2 теоремы 1 дает оценку

$$t(n) = \Theta(n^\tau),$$

так как $a = 2, k = 2, 2 \leq \tau \leq 3$ и $a < k^\tau$. Следовательно, обращение треугольных матриц сопоставимо по сложности с умножением матриц. Если матрицы умножать с помощью алгоритма Штрассена, то $\tau = \log_2 7$. Матрицу P^{-1} можно вычислить за $\Theta(n)$ условных единиц времени, то в целом сложность обращения матрицы A по формуле (14) характеризуется оценкой

$$t(n) = O(n^\tau) = O(n^{\log_2 7}).$$

И, наконец, знание LUP -разложения матрицы A позволяет свести решение системы уравнений

$$A \times X = B \quad (15)$$

к двум системам с треугольными матрицами, которые решаются весьма просто. Для этого матричное уравнение (15) записывается в виде:

$$L \times U \times P \times X = B.$$

Вначале решается система уравнений

$$L \times Y = B$$

относительно Y , а затем – система

$$U \times P \times X = Y$$

относительно X . Поскольку матрицы L и U – треугольные, то для решения указанных систем достаточно $\Theta(n^2)$ условных единиц времени. Заметим, что матрица $U \times P$ получается из U некоторой перестановкой столбцов. Последовательное построение LUP -разложения и решение систем уравнений с треугольными матрицами дает общую оценку сложности решения системы уравнений (15):

$$t(n) = O(n^{\log_2 7}).$$

В данной работе не исследовались условия существования и устойчивости решений рассматриваемых задач линейной алгебры. Здесь было важно с помощью теорем 1 и 3 показать полиномиальную разрешимость этих задач и тот факт, что их можно решать столь же быстро, как и умножение матриц. Ведь если будет достигнуто уменьшение показателя степени в асимптотической оценке сложности умножения матриц, то можно будет и другие задачи линейной алгебры решать за меньшее время.

Литература

- [1] Bentley, J.L. A general method for solving divide-and-conquer recurrences / J.L. Bentley, D. Haken and J.B. Saxe // SIGACT News. – 1980. – № 12(3). – P. 36–44.
- [2] Быкова, В.В. Математические методы анализа рекурсивных алгоритмов // Журнал СВУ. Математика и физика. – 2008. – № 1(3). – С. 236–246.
- [3] Левитин, А.В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. – 576 с.
- [4] Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 960 с.
- [5] Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 1999. – 960 с.
- [6] Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х т. Т. 1. – М.: Мир, 1991. – 360 с.
- [7] Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х т. Т. 2. – М.: Мир, 1991. – 342 с.
- [8] Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином. Лаб. знаний, 2006. – 636 с.
- [9] Вычислительная математика: учеб. пособие / Н.И. Данилина [и др.]. – М.: Высш. шк., 1985. – 472 с.
- [10] Ахо, А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

Алгоритм разложения графа на атомы кликовыми минимальными сепараторами

Быкова Валентина Владимировна

Институт математики
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск
bykvalen@mail.ru

Болховец Владислав Олегович

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярск
baa1_666@mail.ru

Аннотация. Представлены алгоритм и программа разложения графа на атомы кликовыми минимальными сепараторами. Эти средства предназначены для решения NP-трудных графовых задач, базирующихся на отношении смежности вершин графа.

Ключевые слова. Сепараторы, алгоритмы на графах, декомпозиция графа.

Идея разложения графа кликовыми сепараторами была предложена Р. Тарьяном [3] как средство реализации подхода «разделяй и властвуй» для решения NP-трудных задач. Процесс такого разложения заключается в многократном поиске в графе $G = (V, E)$ кликового минимального сепаратора S , выделении компонент связности $G(V \setminus S)$ и копировании S в эти компоненты. Полученные в результате части были названы атомами графа G . Было установлено, что атомы не разрушают клики исходного графа, не порождают новых клик и сохраняют бесхордовые циклы длины не более 3. Поэтому атомарное представление графа нашло применение в решении многих классических графовых задач: нахождение наибольшей клики, вычисление хроматического числа, определение наибольшего независимого множества вершин графа, поиск наименьшего пополнения графа до хордального, распознавание класса совершенных графов и др. Известно [4, 1], что разложение графа на атомы уникально, если его осуществлять кликовыми минимальными сепараторами.

Множество вершин S связного графа $G = (V, E)$ называется сепаратором этого графа, если граф $G(V \setminus S)$ несвязен. Если при этом S – клика в G , то такой сепаратор считается кликовым сепаратором графа G . Уточним теперь, в каком смысле сепаратор графа минимальный. Рассмотрим в связном графе $G = (V, E)$ сепаратор $S \subset V$ и две несмежные вершины $a, b \in V \setminus S$.

Сепаратор S образует (a, b) -сепаратор, если вершины a и b принадлежат разным компонентам связности графа $G(V \setminus S)$ и минимальный (a, b) -сепаратор, если S – (a, b) -сепаратор и в нем отсутствует собственное подмножество, являющееся (a, b) -сепаратором заданного графа G .

Рассмотрим простой пример. Пусть задан связный неориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и множеством ребер $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. Подмножество $S = \{2, 4\} \subset V$

есть сепаратор графа G , так как $G(V \setminus S) = (\{1, 3\}, \emptyset)$ несвязен. Заметим, что множество S индуцирует в G полный подграф, следовательно, S – клика. Минимальность для S также выполняется. Значит, S – минимальный кликовый сепаратор графа G .

Разложение графа кликовыми минимальными сепараторами сводится к решению следующей последовательности задач:

- найти для заданного графа $G = (V, E)$ минимальный элиминирующий порядок L ;
- на основе L построить минимальную триангуляцию $H = (V, E')$ графа $G = (V, E)$, $E \subseteq E'$;
- найти максимальные клики триангуляции H ;
- построить дерево клик триангуляции H ;
- найти минимальные кликовые сепараторы графа G ;
- разложить граф G на атомы с помощью найденных кликовых минимальных сепараторов.

Дадим пояснения к указанным задачам. Поиск минимального элиминирующего порядка для графа G осуществляется с помощью алгоритма MCS (*Maximum Cardinality Search*) и сводится к нахождению на каждом шаге алгоритма вершины максимального веса и помещению данной вершины в начало списка L , пересчету весов для всех вершин, смежных с ней и удалению ее из графа [5].

На сегодняшний день единственным эффективным методом нахождения кликовых минимальных сепараторов графа является извлечение их из минимальной триангуляции графа. Граф G считается хордальным, если ни один из его индуцированных подграфов не является простым циклом длины $l \geq 4$. Любой граф можно превратить в хордальный, добавив в него некоторое множество ребер. Триангуляцией графа $G = (V, E)$ называется хордальный граф $H = (V, E')$, для которого граф G выступает в качестве остова подграфа $(E \subseteq E')$. Триангуляция $H = (V, E')$ минимальная, если она не содержит в себе в качестве собственного подграфа другую триангуляцию графа G . В нашем случае процесс нахождения множества $E' \setminus E$ дополнительных ребер реализуется на основе минимального элиминирующего порядка L так:

- вначале в роли текущего графа берется исходный граф G ;

- затем для каждой следующей вершины v из L находится множество смежных с ней вершин в текущем графе;
- все несмежные между собой найденные вершины соединяются ребрами (достраиваются до клики), далее все эти дополнительные ребра добавляются в текущий граф;
- вершина v удаляется из текущего графа;
- процесс повторяется до тех пор, пока не будут обработаны все вершины из L .

Число максимальных клик хордального графа H всегда не более $n-1$ и потому они находятся путем систематического просмотра всех вершин этого графа и анализа их окрестностей. Для построения дерева клик триангуляции H используются надлежащие свойства хордальных графов:

- для любого связного хордального графа всегда существует дерево клик. Это такое дерево, в котором множество узлов – множество $\{C_i | i \in I\}$ всех максимальных клик графа. Узлы C_i и C_j соединены ребром, если $C_i \cap C_j \neq \emptyset$;
- дерево клик хордального графа образует остовное дерево наибольшего веса графа пересечений всех максимальных клик, где вес ребра – мощность множества, образующего пересечение надлежащих максимальных клик.

Используя эти свойства и полученные на предыдущем шаге максимальные клики для H , дерево клик создается с помощью алгоритма Краскала – алгоритма поиска остовного дерева максимального веса.

Нахождение кликовых минимальных сепараторов осуществляется на основе следующих важных свойств хордальных графов:

- любое ребро дерева клик хордального графа H , связывающее узлы C_i и C_j , есть минимальный сепаратор $S = C_i \cap C_j$ этого графа;
- граф является хордальным тогда и только тогда, когда его любой минимальный сепаратор – клика;
- если H – минимальная триангуляция для G , то всякий минимальный сепаратор графа H есть минимальный сепаратор графа G .

Зная эти свойства, остается только выбрать из минимальных сепараторов триангуляции H те минимальные сепараторы, которые образуют в G клики.

Процесс разложения графа сводится к многократному его разделению на части одним из найденных кликовых минимальных сепараторов S , с выделением компонент связности графа $G(V \setminus S)$ и копированием S в эти компоненты. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в полученных частях не окажется кликовых минимальных сепараторов. Программа реализована на

языке C++ в среде Visual Studio 2008 Express Edition. Программа может быть использована для решения различных графовых задач, основанных на отношении смежности вершин графа.

Следует отметить два основных недостатка разложения графа на атомы. Во-первых, не все графы имеют кликовые минимальные сепараторы. Например, их нет в полном графе. Во-вторых, области связности полученных атомов пересекаются. Поэтому возможно перекрытие подзадач, и эффект от применения принципа «разделяй и властвуй» при решении задач на графах может быть незначительным. Однако на практике эти недостатки не всегда проявляются, так как графы, возникающие в реальных приложениях, часто имеют древовидную ширину, ограниченную сверху малой по значению целой положительной константой k [2]. Для таких графов размеры клик, сепараторов, а значит и перекрытий подзадач, ограничены сверху константой k .

Литература

- [1] В.В. Быкова. О разложении гиперграфа кликовыми минимальными сепараторами // Журнал СФУ. Математика и физика. – 2012. – № 1(5). – С. 36–45.
- [2] В.В. Быкова. Вычислительные аспекты древовидной ширины графа // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 3(13). – С. 65–79.
- [3] R.E. Tarjan. Decomposition by clique separators // Discrete Mathematics. – 1985. – 55. – P. 221–232.
- [4] H.G. Leimer. Optimal decomposition by clique separators // Discrete Mathematics. – 1993. – 113. – P. 99–123.
- [5] A. Berry, J.P. Bordat, P. Heggernes, G. Simonet, Y. Villanger, A wide range algorithm for minimal triangulation from an arbitrary ordering. – J. Algorithms. – 2006. – № 1(58). – P. 33–66.

Программные средства формирования V&S дерева декомпозиции

Быкова Валентина Владимировна

Институт математики
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск
bykvalen@mail.ru

Свинцов Юрий Александрович

Институт математики
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск
ysvintcov@lcbit.ru

Аннотация. Представлен комплекс программ V&STree, предназначенный для преобразования дерева декомпозиции графа в бинарное сепараторное дерево. Данный комплекс может быть использован для решения NP-трудных графовых задач методом динамического программирования на основе дерева декомпозиции.

Ключевые слова. Дерево декомпозиции, динамическое программирование.

1 Обозначения и определения

Введем необходимые обозначения и определения, используя работы [1, 2, 4]. Пусть задан неориентированный связный граф $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер. Обозначим через $G(A)$ подграф графа $G = (V, E)$, индуцированный множеством $A \subseteq V$. Говорят, что множество вершин $S \subseteq V$ разделяет несмежные вершины a и b графа $G = (V, E)$, если в графе $G(V \setminus S)$ вершины a и b принадлежат различным компонентам связности. Множество S при этом называется сепаратором или (a, b) -сепаратором. Сепаратор минимальный, если он не включает другой сепаратор в качестве собственного подмножества.

Дерево декомпозиции связного графа $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 1$ и $m = |E| \geq 1$, – пара (M_G, T_G) , задающая разбиение множества вершин и множества ребер этого графа, где $M_G = \{X_i | i \in I_G\}$ – семейство подмножеств множества V , называемых «мешками», а $T_G = (I_G, W)$ – дерево, узлам которого сопоставлены эти «мешки». Данное разбиение обязано отвечать трем требованиям:

- $\bigcup_{i \in I_G} X_i = V$;
- для всякого ребра графа G обязательно имеется «мешок», содержащий обе вершины этого ребра;
- для любой вершины v графа G множество узлов $\{i \in I_G | v \in X_i\}$, «мешки» которых содержат эту вершину, индуцирует связный подграф, являющийся поддеревом дерева T_G .

Вершины дерева T_G принято называть узлами, чтобы избежать путаницы с вершинами графа. Ширина дерева декомпозиции (M_G, T_G) равна наибольшей вместимости его «мешка», уменьшенной на единицу:

$$\max_{i \in I_G} \{|X_i| - 1\}$$

Древовидная ширина (*treewidth*) графа – числовой параметр графа G , который определяется как наименьшая ширина всех допустимых его деревьев декомпозиции и обозначается через $tw(G)$. Дерево

декомпозиции (M_G, T_G) ширины $tw(G)$ называется оптимальным деревом декомпозиции графа G . Дерево декомпозиции без кратных и вложенных «мешков» считается фундаментальным. Такое дерево всегда содержит $O(n)$ узлов.

Комплекс программ V&STree выполняет преобразование заданного дерева декомпозиции (M_G, T_G) связного графа $G = (V, E)$, где $M_G = \{X_i | i \in I_G\}$, $T_G = (I_G, W)$, имеющее ширину k и $|I_G| = O(n)$ узлов, в бинарное сепараторное дерево (V&S-дерево) той же ширины. Корневое дерево декомпозиции (M_G, T_G) графа $G = (V, E)$ называется V&S-деревом, если в нем каждый узел имеет не более двух прямых потомков и относится к одному из четырех типов узлов [3]:

- узел-лист – узел, у которого нет потомков;
- узел-сепаратор – узел s с одним прямым потомком j . Если i – родитель узла s , то $X_s = X_i \cap X_j \neq \emptyset$, $X_s \subseteq X_i$, $X_s \subseteq X_j$. Всегда X_s – сепаратор графа $G = (V, E)$;
- узел-расширение – узел i с одним прямым потомком s . В данном случае $X_s \subseteq X_i$;
- узел-соединение – узел i с двумя прямыми потомками l и j . Здесь $X_l \cup X_j \subseteq X_i$.

Такое V&S-дерево всегда может быть построено за время $O(n)$, при этом число его узлов составит $O(n)$. Применение V&S-дерева в методе динамического программирования для графа G с $tw(G) \leq k$ позволяет удерживать размер всякой таблицы динамического программирования в пределах оценки $O(k \cdot q^k)$, где q – число состояний вершины графа к возможному решению. Кроме того, для вычисления таблиц динамического программирования по V&S-дереву возможно привлечение аппарата реляционной алгебры и свойств ациклических баз данных. Это способствует алгоритмической конкретизации динамического программирования по дереву декомпозиции на графах ограниченной древовидной ширины.

2 Описание программных модулей

Комплекс программ V&STree – совокупность связанных между собой программных модулей. Данный комплекс реализует следующую последовательность действий.

Этап 1 (программный модуль Vvod). Ввод множества «мешков» $M_G = \{X_i | i \in I_G\}$ дерева декомпозиции (M_G, T_G) с указанием для каждого «мешка» узлов-потомков.

Проверка трех свойств, которым должно отвечать любое дерево декомпозиции.

Этап 2 (программный модуль Fund). Удаление из исходного дерева декомпозиции (M_G, T_G) кратных и вложенных «мешков», то есть преобразование его в фундаментальное дерево декомпозиции.

Этап 3 (программный модуль Separator). Нахождение сепараторов по следующему правилу. Пусть $w = \{i, j\}$ – произвольное ребро дерева T_G , а A и B – множества узлов двух компонент связности графа $T_G - w$, полученного удалением из дерева T_G ребра w . Тогда пересечение «мешков» $S = X_i \cap X_j$ образует (a, b) -сепаратор графа G при условии, что

$$\begin{aligned} a \in X_A &= (\cup_{I \in A} X_I) \setminus S \neq \emptyset, \\ b \in X_B &= (\cup_{I \in B} X_I) \setminus S \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Этап 4 (программный модуль Binar). Преобразование фундаментального дерева декомпозиции (M_G, T_G) в бинарное дерево: всякий внутренний узел $i \in I_G$ дерева T_G с $d \geq 3$ прямыми потомками «клонировается» в узлы i_1, \dots, i_{d-1} ; каждому созданному «клону» приписывается «мешок» X_{i_s} .

Этап 5 (программный модуль Td). Дополнение бинарного дерева, полученного на этапе 4, сепараторами, найденными на этапе 3. Это осуществляется так. Для любых двух узлов $i, j \in I_G$, смежных в T_G и имеющих «мешки» X_i и X_j соответственно, добавить промежуточный узел s и сопоставить ему множество вершин $X_s = X_i \cap X_j \neq \emptyset$ в качестве «мешка».

Построенное таким образом дерево декомпозиции – V&S-дерево графа $G = (V, E)$. Если исходное дерево декомпозиции имело ширину k , то построенное V&S-дерево будет той же ширины.

4 Используемые технические средства

Для работы с комплексом программ V&STree необходимо иметь персональный компьютер типа IBM PC Pentium IV с операционной системой Windows XP/Vista и оперативной памятью от 512 Мб. Среда разработки: Visual C++ 9.0 Express Edition.

Программы, входящие в состав V&STree, работают с динамическими массивами, поэтому размер исходного дерева декомпозиции графа ограничен только объемом оперативной памяти используемого компьютера.

Литература

- [1] В.В. Быкова. Вычислительные аспекты древовидной ширины графа // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 3(13). – С. 65–79.
- [2] В.В. Быкова. Программирование задач на графах ограниченной древовидной ширины // Программные продукты и системы. – 2011. – № 4(96). – С. 101–106.
- [3] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
- [4] H.L. Bodlaender. Treewidth: Algorithmic techniques and results // Proc. 22nd MFCS, Springer-Verlag, LNCS 1295. – 1997. – P. 19–36.

Метод главных компонент и линейные многообразия на практике: применение к Российской банковской системе

Ксения Юрьевна Веретнова
Институт математики
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск
veretnova141189@mail.ru

Людмила Ивановна Покидышева
Институт математики
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск
pok50@rambler.ru

Аннотация. В настоящей работе приведено приложение нелинейного моделирования данных, использующее в качестве основы линейные многообразия, которые построены с использованием метода упругих карт. Этот подход является обобщением самоорганизующихся карт Кохонена. На примере показано преимущество использования нелинейных объектов для аппроксимации данных по сравнению с линейными.

Ключевые слова. Упругие карты, главные многообразия, метод главных компонент, визуализация данных.

1 Введение

Метод главных компонент (МГК) был введен Карлом Пирсоном более ста лет назад, и с тех пор он стал одним из наиболее часто используемых математических инструментов во многих областях науки (в каждой области, где приближение конечного множества точек не требуется).

В настоящей статье предложен пример применения метода упругих карт как разновидности МГК для анализа данных в области российской экономики. Одна из наиболее распространенных проблем, возникающих в такой задаче: как аппроксимировать конечный набор данных $X \in R^m$, где m относительно велико, объектом меньшей размерности из R^m .

Существует множество рейтинговых агентств мирового и российского уровня, которые проводят мониторинг кредитных организаций, используя разные методы и подходы. В данной работе предложена альтернатива существующим методам составления рейтингов. Проводится исследование по созданию «объективного» рейтинга банков, действующих на территории Российской Федерации, не зависящего от выбора показателей банков. С применением нелинейного моделирования, использующего метод главных компонент и главные многообразия, был составлен рейтинг российских банков.

Известно, что объекты каким-то образом располагаются в пространстве своих показателей, которыми они характеризуются. Один из подходов составления рейтинга – это создание некоей прямой шкалы рейтинга, на которую проецируются объекты в пространстве показателей (Рис. 1). Этот подход не является «естественным».

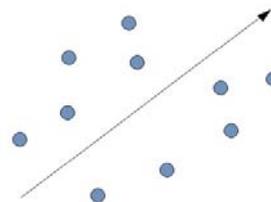


Рис. 1: Первый подход к созданию рейтинга объектов: создание в пространстве показателей некоей прямой шкалы рейтинга

А. Н. Горбанем и А. Ю. Зинovieвым [1] была предложена идея другого подхода к составлению рейтингов, которая применяется в тех случаях, когда линейная аппроксимация данных не является удовлетворительной. Если объекты располагаются в пространстве вдоль некоторой кривой, то более естественный способ расположить объекты в рейтинге – аппроксимировать облако объектов в пространстве показателей некоторой гладкой кривой и проецировать объекты на нее, а не на придуманную шкалу (Рис. 2). Эта линия – натуральная шкала рейтинга. Она будет учитывать нелинейные структуры облака данных. Такую линию мы будем называть главным многообразием [1].

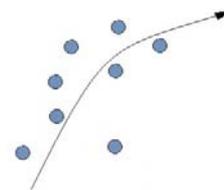


Рис. 2: «Естественный» подход к созданию рейтинга объектов: объекты упорядочены в пространстве вдоль некоторой кривой.

Данный подход позволяет не изобретать формул для определения позиции объекта в рейтинге и отказаться от выбора показателей. Данная кривая появляется как аппроксимация облака точек. Место объекта в рейтинге определяется координатой на этой «натуральной» кривой.

Цель работы: проверить действительно ли большой набор данных может быть аппроксимирован линейным многообразием меньшей размерности. В рамках работы составим рейтинг банков, используя метод упругих карт.

2 Метод главных компонент

Метод главных компонент - это один из способов понижения размерности данных, состоящий в переходе к новому ортогональному базису, оси которого ориентированы по направлениям максимальной дисперсии набора входных данных. Вдоль первой оси нового базиса дисперсия максимальна, вторая ось максимизирует дисперсию при условии ортогональности первой оси, и т.д., последняя ось имеет минимальную дисперсию из всех возможных. Так же метод главных компонент применяется для визуализации данных с помощью перехода к двумерному пространству[2].

После того как два вектора главных компонент будут найдены, точки пространства показателей (банки) можно спроецировать на плоскость, образованную векторами главных компонент.

Векторы главных компонент для задач о наилучшей аппроксимации и о поиске ортогональных проекций с наибольшим рассеянием — это ортонормированный набор $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ собственных векторов эмпирической ковариационной матрицы S , расположенных в порядке убывания собственных значений λ : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Эти векторы служат оценкой для собственных векторов ковариационной матрицы данных.

Для применения метода главных компонент данные должны быть записаны в виде матрицы. Отдельная строка такой матрицы – это конкретный объект исследования; вектор, с координатами-показателями.

Зачастую объекты исследования имеют сильно различающиеся значения показателей по тому или иному показателю. Для того чтобы уравновесить эти значения, данные необходимо нормировать по столбцам. Так же метод главных компонент предполагает, что вектора данных являются центрированными.

Таким образом, вектор-столбец P_j -го показателя следует нормировать по следующей формуле:

$$P_j = \left(\frac{P_j^1 - \bar{P}_j}{\sigma(P_j)}, \dots, \frac{P_j^n - \bar{P}_j}{\sigma(P_j)} \right), \quad j = \overline{1, m}$$

где, матрица данных имеет размерность $(n \times m)$, \bar{P}_j – выборочное среднее для j -го показателя P_j ,

$\bar{P}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_j^i$, $\sigma(P_j)$ – среднеквадратическое отклонение

для j -го показателя P_j , $\sigma(P_j) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_j^i - \bar{P}_j)^2}$.

Вектора главных компонент для показателей были найдены как собственные вектора эмпирической ковариационной матрицы. Благодаря нормировке ковариационная матрица стала корреляционной. Вектора и собственные значения матрицы были найдены с помощью метода вращений Якоби.

3 Метод упругих карт

Упругая карта служит для нелинейного сокращения размерности данных. В многомерном пространстве данных располагается поверхность, которая приближает имеющиеся точки данных и при этом является, по возможности, не слишком изогнутой. Данные проецируются на эту поверхность и потом могут отображаться на ней, как на карте. Ее можно представлять себе как упругую пластину, погруженную в пространство данных и прикрепленную к точкам данных пружинками. Служит обобщением метода главных компонент (в котором вместо упругой пластины используется абсолютно жесткая плоскость)[3].

По построению, упругая карта представляет собой систему упругих пружин, вложенную в многомерное пространство данных. Эта система аппроксимирует облако данных. Метод был разработан проф., д.ф.-м.н. А. Н. Горбанем, к.т.н. А. Зиновьевым и к.т.н. А. Питенко в 1996—2001 гг.

Рассмотрим двумерную прямоугольную сетку узлов, в которой p узлов по горизонтали и q узлов по вертикали. Узлы сетки нумеруются с помощью двух индексов y^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$.

Определение 1. Упругой сеткой будем называть множество узлов таких что:

- 1) Узлы сетки близки к точкам данных;
- 2) Сетка должна быть упруга по отношению к изгибу. Это свойство до некоторой степени обеспечит гладкость результирующего многообразия;
- 3) Сетка должна быть равномерна, то есть упруга по отношению к растяжению.

Меняя параметры упругости и растяжения можно получать сетку с различными свойствами.

На первом шаге множество данных разбивается на таксоны.

Определение 2. Таксон K_{ij} узла y^{ij} – это множество точек $x \in X$, таких что:

$$K_{ij} = \{x \in X \mid \|y^{ij} - x\|^2 \rightarrow \min\},$$

где X – множество точек данных, $\|\cdot\|$ – Евклидова норма.

То есть таксон узла y^{ij} – это множество точек данных, которые располагаются в пространстве ближе всего к узлу y^{ij} .

Каждый узел, кроме граничных, имеет четырех соседей (т.к. сетка прямоугольная), с которыми он соединяется ребром. Чем больше средняя длина ребра, тем сильнее сетка растянута. Таким образом, мы должны минимизировать эту величину. Степень изогнутости определяется с помощью точечной оценки величины второй производной.

Таким образом, мы получаем функционал степени качества сетки, который необходимо минимизировать:

$$D = \frac{D_1}{|X|} + \lambda \frac{D_2}{pq} + \mu \frac{D_3}{pq} \rightarrow \min,$$

$|X|$ – число точек данных, λ , μ – коэффициенты упругости, отвечающие за растяжение и изогнутость сетки,

$D_1 = \sum_{ij} \sum_{x_k \in K_{ij}} \|x_k - y^{ij}\|^2$ – мера близости узлов к данным,

$D_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-1} \|y^{ij} - y^{i,j+1}\|^2 + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^q \|y^{ij} - y^{i+1,j}\|^2$ – мера растянутости сетки,

$D_3 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=2}^{q-1} \|2y^{ij} - y^{i,j-1} - y^{i,j+1}\|^2 + \sum_{i=2}^{p-1} \sum_{j=1}^q \|2y^{ij} - y^{i-1,j} - y^{i+1,j}\|^2$ – мера кривизны сетки.

Так как метрика является евклидовой, то функционал D является квадратичным по отношению к узлам y^{ij} . Следовательно, для его минимизации будет приемлем следующий алгоритм:

Шаг 1. Узлы сетки, так или иначе, располагаются в пространстве.

Шаг 2. При заданных положениях узлов данные разбиваются на таксоны.

Шаг 3. При заданном разбиении множества точек данных на таксоны производится минимизация функционала D из условия $\frac{\partial D}{\partial y^{ij}} = 0$.

Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока величина функционала D не станет мала (в пределах заданной точности).

Так как в нашей работе требуется построить кривую, следовательно, $q = 1$ при любых значениях p . Поэтому функционалы D_1, D_2, D_3 и определение для K_{ij} запишем в виде:

$$K_{ij} = \{x \in X \mid \|y^{ij} - x\|^2 \rightarrow \min\} = \{x \in X \mid \|y^i - x\|^2 \rightarrow \min\} = K_i,$$

$$D_1 = \sum_{ij} \sum_{x_k \in K_{ij}} \|x_k - y^{ij}\|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{x_k \in K_i} \|x_k - y^i\|^2,$$

$$D_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-1} \|y^{ij} - y^{i,j+1}\|^2 + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^q \|y^{ij} - y^{i+1,j}\|^2,$$

$$D_3 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=2}^{q-1} \|2y^{ij} - y^{i,j-1} - y^{i,j+1}\|^2 + \sum_{i=2}^{p-1} \sum_{j=1}^q \|2y^{ij} - y^{i-1,j} - y^{i+1,j}\|^2.$$

Непосредственное дифференцирование по фиксированному i -му узлу дает:

$$\frac{\partial D_1}{\partial y^i} = -2 \sum_{x_k \in K_i} (x_k - y^i) = 2 \sum_{x_k \in K_i} y^i - 2 \sum_{x_k \in K_i} x_k = 2y^i n_i - 2 \sum_{x_k \in K_i} x_k, \text{ где } n_i - \text{ количество точек таксона для узла } y^i, i = \overline{1, p}.$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial y^i} = 2y^i - 2y^{i+1}, \text{ где } i = \overline{1, p-1}.$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial y^i} = 4y^i - 2y^{i-1} - 2y^{i+1}, \text{ где } i = \overline{2, p-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial y^i} = y^{i-1} \frac{\mu}{p} (\delta(i, 1) - 1) + y^i \left(\frac{n_i}{|X|} + \frac{\lambda}{p} + \frac{2\mu}{p} \right) + y^{i+1} (\delta(p, i) - 1) \left(\frac{\mu + \lambda}{p} \right) - \frac{\sum_{x_k \in K_i} x_k}{|X|} = 0 \quad - \text{ условие}$$

минимизации, $\delta(i, j)$ – символ Кронекера. Множители содержащие $\delta(i, j)$ введены для того, чтобы при расчетах не выйти за размеры сетки.

Переносим слагаемое $\frac{\sum_{x_k \in K_i} x_k}{|X|}$ в правую часть, мы получим систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Матрица системы на протяжении работы алгоритма меняться не будет. Будет меняться лишь правая часть, которая зависит от разбиения точек данных на таксоны.

4 Данные

В настоящей работе были исследованы первые 100 банков, действующих на территории Российской Федерации, из рейтинга, опубликованного на сайте [4] (Табл. 1).

Данные были взяты из отчетности, опубликованной на сайте Центрального Банка РФ [5] от 1 сентября 2011 года. Каждый банк представлен 74 значениями показателей. Показатели включают в себя кредиты, выданные как физическим лицам, так и различным коммерческим организациям, на различные периоды, депозиты коммерческих, некоммерческих организаций, физических лиц, основные средства и т.п.

Таким образом, мы можем представить множество исследуемых банков как облако в 74-размерном пространстве показателей. Для того, чтобы понизить размерность данных, был применен метод главных компонент.

После понижения размерности данных с помощью метода главных компонент был осуществлен переход от пространства показателей размерности 74 к пространству главных компонент размерности два. Данные были спроецированы в это пространство.

С помощью метода упругих карт была получена аппроксимация облака точек (банков) с помощью кривой, на которую были спроецированы точки.

Таблица 1. Перечень банков, показатели которых взяты для исследования

Название банка	Название банка	Название банка
ЮниКредит Банк	Московский Кредитный Банк	Авангард
Стройкредит	Пересвет	Нота-Банк
Инвестбанк	Транскредитбанк	Фондсервисбанк
ЦентроКредит	Национальный Резервный Банк	СБ Банк
Балтийский Банк	Мастер-Банк	Нордеа Банк
Международный Банк С.Петербурга	Открытие	Татфондбанк
Хоум Кредит Банк	НОМОС-Банк	Росгосстрах Банк
МДМ Банк	Транскапиталбанк	Национальный Торговый Банк
Россия	Интеза	РосЕвроБанк
Газпромбанк	Центр-Инвест	Балтинвестбанк
Уральский Банк Реконструкции	Московский Банк Реконструкции	ВестЛБ Восток
Банк «Санкт-Петербург»	Росбанк	Промсвязьбанк
Сургутнефтегазбанк	Уралсиб	Зенит
СКБ-Банк	Русский Стандарт	Внешпромбанк
Дальневосточный Банк	Абсолют Банк	Национальный Банк «Траст»
Металлургический Коммерческий Банк	Союз	Всероссийский Банк Развития Регионов
Московский Индустриальный Банк	Российский Капитал	Эйч-Эс-Би-Си Банк (HSBC)
Запсибкомбанк	Еврофинанс Моснарбанк	Райффайзенбанк
Совкомбанк	Пробизнесбанк	Национальный Расчетный Депозитарий
ВТБ	Металлинвестбанк	Кредит Европа Банк
Собинбанк	Меткомбанк	Дойче Банк
Альфа-Банк	ИНГ Банк	Коммерцбанк (Евразия)
Возрождение	Новикомбанк	Расчетная Палата РТС
Восточный Экспресс Банк	Ситибанк	ДельтаКредит
Связь-Банк	Бинбанк	МСП Банк
Сбербанк России	Ак Барс	Россельхозбанк
ВТБ 24	Королевский Банк Шотландии	Ренессанс Кредит
Креди Агриколь КИБ	Международный Финансовый Клуб	СМП Банк
Петрокоммерц	Локо-Банк	БНП Париба Банк
Русфинанс Банк	Банк Москвы	Национальный Стандарт
Азиатско-Тихоокеанский Банк	Инвестторгбанк	Первобанк
КИТ Финанс Инвестиционный Банк	ОТП Банк	Национальный Клиринговый Центр
Глобэкс	Юниаструм Банк	
Ханты-Мансийский Банк	Москомприватбанк	

5 Результаты аппроксимации. Составление рейтинга

После того как вектора главных компонент были найдены, данные были спроецированы на плоскость, образованную первыми двумя вектора главных компонент.

Таким образом, вектор данных B_i будет заменен на $\sum_{j=1}^k a_j(a_j, B_i)$, $k=2$.

После операции проецирования был получен рисунок облака данных на плоскости главных компонент (Рис. 3).

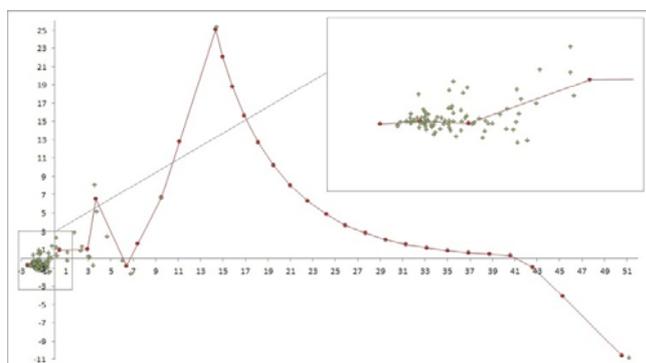


Рис. 3: Проекция точек данных на плоскость главных компонент и кривая, аппроксимирующая облако данных. После того как многообразие построено, для визуализации данных необходимо указать правило, с помощью которого данные из исходного пространства переносятся на упругую кривую. Длина вектора переноса не будет слишком велика, поскольку карта аппроксимирует данные и достаточно плотно к ним прилегает.

Идея, которая применяется при проецировании – сопоставление точке данных ближайшей точки отрезка, соединяющего два ближайших к точке узла на карте. Место объекта в рейтинге определяется координатой точки на кривой, аппроксимирующей облако данных.

Введем понятие расстояния от точки до отрезка.

Определение 3. *Расстояние* будем определять следующим образом: выполним ортогональное проецирование на прямую, содержащую отрезок. Если проекция принадлежит отрезку, то искомое расстояние – это расстояние до проекции. Иначе искомое расстояние – это расстояние до ближайшего конца отрезка. Тогда координатой точки на кривой будет либо координата этой точки на отрезке, либо координата ближайшего к ней узла.

Так как отрезок является линейной комбинацией координат двух точек, тогда условием принадлежности точки отрезку будет существование такого $p \in [0, 1]$ что:

$$\begin{cases} px_1 + (1-p)x_2 = x \\ py_1 + (1-p)y_2 = y \end{cases}$$

где (x, y) – координаты точки данных, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) – координаты ближайших к ней узлов.

Рассмотрим рисунок 4. Точки на кривой – проекции точек-банков на линейное многообразие. Получили последовательность точек. Выпрямляя кривую, мы получим «естественный» рейтинг банков.

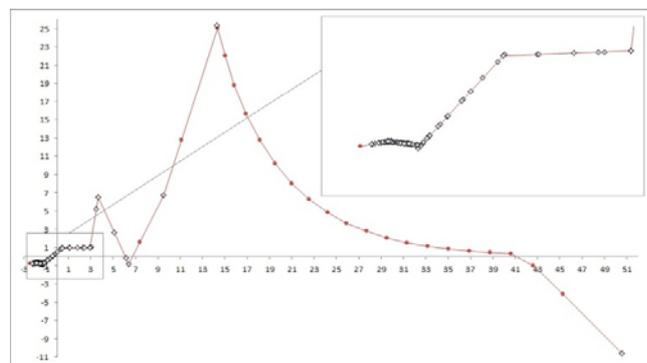


Рис. 4: Проекция точек данных на кривой.

В таблице 2 представлен рейтинг, полученный с помощью метода упругих карт.

Таким образом, применяя метод главных компонент и метод упругих карт, аппроксимируя облако данных кривой, можно получать независимый объективный рейтинг.

6 Заключение

Нелинейные расширения метода главных компонент, такие как главные многообразия, могут служить в качестве универсального инструмента, позволяющего приблизить сложные распределения точек данных, когда линейное приближение является недостаточным. Применение метода главных компонент, метода упругих карт, аппроксимация облака данных кривой дает возможность получить независимый объективный рейтинг исследуемых объектов системы.

Работа поддержана РФФИ (№11-07-00688-а)

Литература

- [1] A. N. Gorban, A. Zinovyev. Principal manifolds and graphs in practice: from molecular biology to dynamical systems International Journal of Neural Systems, Vol. 20, No. 3 (2010) 219–232
- [2] Jolliffe I.T. Principal Component Analysis, Series: Springer Series in Statistics, 2nd ed., Springer, NY, 2002, XXIX, 487 p. 28 illus. ISBN 978-0-387-95442-4
- [3] А. Ю. Зиновьев. Визуализация многомерных данных, Красноярск, Изд. КГТУ, 2000.
- [4] <http://www.allbanks.ru>
- [5] <http://www.cbr.ru>

Таблица 2: Рейтинг банков, полученный с помощью метода упругих карт

Место	Название банка	Место	Название банка	Место	Название банка
1	Сбербанк России	35	Запсибкомбанк	69	Азиатско-Тихоокеанский Банк
2	ВТБ	36	Возрождение	70	Центр-Инвест
3	Газпромбанк	37	ОТП Банк	71	РосЕвроБанк
4	ВТБ 24	38	Восточный Экспресс Банк	72	Мастер-Банк
5	Россельхозбанк	39	Русский Стандарт	73	Национальный Расчетный Депозитарий
6	Альфа-Банк	40	Росгосстрах Банк	74	Балтинвестбанк
7	Транскредитбанк	41	Юниаструм Банк	75	Собинбанк
8	ЮниКредит Банк	42	Внешпромбанк	76	Инвестбанк
9	Уралсиб	43	Международный Банк Санкт-Петербурга	77	Меткомбанк
10	Промсвязьбанк	44	Хоум Кредит Банк	78	СБ Банк
11	Райффайзенбанк	45	Нордеа Банк	79	Первобанк
12	Банк Москвы	46	ИНГ Банк	80	Татфондбанк
13	Росбанк	47	Русфинанс Банк	81	Металлинвестбанк
14	НОМОС-Банк	48	СКБ-Банк	82	Российский Капитал
15	Банк «Санкт-Петербург»	49	КИТ Финанс Инвестиционный Банк	83	Еврофинанс Моснарбанк
16	МДМ Банк	50	Всероссийский Банк Развития Регионов	84	Национальный Торговый Банк
17	Глобэкс	51	Пробизнесбанк	85	Национальный Клиринговый Центр
18	Ханты-Мансийский Банк	52	Абсолют Банк	86	БНП Париба Банк
19	Россия	53	Инвестторгбанк	87	Национальный Резервный Банк
20	Ситибанк	54	Новикомбанк	88	Национальный Стандарт
21	Связь-Банк	55	Авангард	89	Совкомбанк
22	Московский Кредитный Банк	56	Союз	90	Международный Финансовый Клуб
23	Зенит	57	СМП Банк	91	Креди Агриколь КИБ
24	Открытие	58	Пересвет	92	Металлургический Коммерческий Банк
25	Петрокоммерц	59	Дальневосточный Банк	93	Эйч-Эс-Би-Си Банк (HSBC)
26	Ак Барс	60	Фондсервисбанк	94	Стройкредит
27	Кредит Европа Банк	61	Дойче Банк	95	ЦентроКредит
28	Бинбанк	62	Ренессанс Кредит	96	Королевский Банк Шотландии
29	Транскапиталбанк	63	МСП Банк	97	Коммерцбанк (Евразия)
30	Московский Индустриальный Банк	64	Москомприватбанк	98	ВестЛБ Восток
31	Интеза	65	Нота-Банк	99	Расчетная Палата РТС
32	Московский Банк Реконструкции и Развития	66	Уральский Банк Реконструкции и Развития	100	ДельтаКредит
33	Сургутнефтегазбанк	67	Локо-Банк		
34	Национальный Банк «Траст»	68	Балтийский Банк		

Эвентологический системный анализ безопасности в картинках

Олег Юрьевич Воробьев

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярский государственный
торгово-экономический институт
НИИ проблем пожарной безопасности
Красноярск
oleg.yu.vorobyev@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются эвентологическое моделирование систем безопасности в рамках эвентологического системного анализа. Предлагается эвентологическая гиперсценарно-модульная модель системы безопасности субъектов на предприятии.

Ключевые слова. Эвентология, теория вероятностей, элементарный исход, состояние, событие, множество событий, множество состояний, свободное множество событий, свободное множество состояний, система событий, система состояний, системный базис, системная оболочка, вероятность, вероятностная зависимость, операционная зависимость, риск, безопасность, пожарная безопасность, эвентологический системный анализ.

Твое соседство нам опасно...
Александр Пушкин,
декабрь 1824 — январь 1825.

Прежде всего, уместно еще раз вслед за [4] подчеркнуть важную идею, раскрывающую эвентологическое понимание безопасности и экономики безопасности:

- и безопасность, и экономика безопасности — это всегда субъектная безопасность и субъектная экономика безопасности, измеряемые математически на основе эвентологической модели субъекта и субъектных методов учета и управления вероятностными и ценностными эвентологическими распределениями множеств событий в области безопасности и ее экономики.

В работе предлагаются математические модели систем безопасности¹, построенные на основе эвентологической теории систем [3] и последних разработок в области эвентологии безопасности [4]. Системы (пожарной) безопасности существуют в каждом уголке мира, в каждой отрасли и на каждом предприятии. Современные подходы к созданию систем (пожарной) безопасности [1, 9, 8], несмотря на специфические отраслевые, отраслевые и индивидуальные

¹В том числе, систем пожарной безопасности.

системные особенности, имеют общий системный базис. Эвентологическая теория систем позволяет разработать такую математическую модель, которая открывает возможность не только выразить в единой эвентологической системе безопасности и системный базис, и системную оболочку, но также объяснить и измерить структуру системных событийных взаимодействий между ними.

Чтобы эвентологически выразить, объяснить и измерить системы безопасности, как системы событий, надо сначала договориться, что в эвентологии понимать под системой событий, и, в частности, чем понятие системы событий должно отличаться от до сих пор центрального в этой теории понятия множества событий.

В эвентологии математические модели систем безопасности рассматриваются в рамках эвентологической теории систем (эвентологического системного анализа) [3]. Начиная с нашей работы [6], под эвентологической системой (системой событий) предлагается понимать множество событий, которое складывается из свободного множества событий (системный базис) и событий, операционно связанных с событиями из базиса (системная оболочка).

Поскольку существенно новое для эвентологической теории определение системы событий используется в данной работе прикладного характера, за всеми теоретическими подробностями, связанными с этим нововведением, читатель отсылается к работам [6, 7]. Скажем лишь коротко, что основу различия между эвентологическими понятиями множества событий и системы событий составляют два естественных вида связей между событиями (событийных взаимодействий): вероятностные² и операционные³. Совокупности событий, между которыми существуют только вероятностные связи называются свободными множествами событий. Совокупности событий,

²Вероятностные связи между событиями — это вероятностная зависимость или независимость событий, определяемая вероятностью.

³Операционные связи между событиями — это операционная зависимость между событиями, определяемая теоретическими множествами операциями.

между которыми существуют и *вероятностные*, и *операционные* связи называются *системами событий*.

В качестве основных ориентиров в области разработки систем безопасности нами были выбраны из довольно внушительного списка две работы. Одну [9] можно по праву считать наиболее известным отечественным достижением в области пожарной безопасности, а другую [8] — образцово выполненным международным проектом системы безопасности.

Первая работа [9] позволила провести полезный сравнительный анализ. А вторая [8], в которой вводятся понятия предупредительных и реагирующих *барьеров*, натолкнула на мысль ввести в эвентологическом системном анализе безопасности новые понятия и термины. События, которые имеют отношение к мероприятиям, обеспечивающим безопасность, названы *барьерными событиями*, а эвентологическая модель совокупности барьерных событий — *совокупным барьером*, который вместе с *совокупным субъектом* и *совокупным объектом* является одним из трех основных *событийных фигурантов* предлагаемой в работе *эвентологической гиперсценарно-модульной модели системы безопасности субъектов на предприятии*.

Прикладная направленность и насыщенность теоретическими новшествами вынуждает разделить эту работу на две части. В основной части дается необычно большое множество иллюстраций, вынудившее даже уточнить название работы. Они сопровождаются краткими комментариями, по возможности минимально использующими эвентологическую терминологию и формулы и позволяющими совершить всего лишь беглую экскурсию по калейдоскопу рисунков и графиков. В приложении собраны более полные теоретические комментарии, без которых было бы трудно понять математическую сущность применяемых эвентологических нововведений.

1 Совокупный субъект

Каждый субъект $\mu \in \mathfrak{M}$, участвующий в предприятии, характеризуется эвентологической моделью темперамента безопасности (см. параграф 13.1), которая описывает вероятностное распределение его поведения в ролях того или иного физио-, психо- и социо-типа и характеризует восприятие и деятельность субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ в области собственной безопасности. Четыре классических типа темперамента событийно соответствуют адекватному типу поведения субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ при стечении четырех видов опасных обстоятельств:

- флегматический (Ф) — норма (Н),
- меланхолический — угроза (У),
- холерический (Х) — опасность (О),

- сангвинический (С) — восстановление (В).

Это событийное соответствие показано на рис. 1.

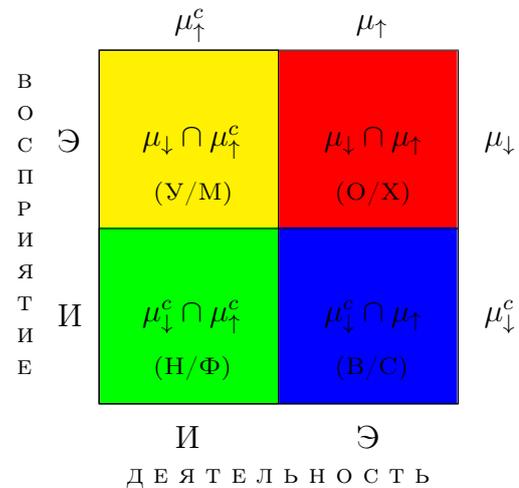


Рис. 1: Один субъект. Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель состояний безопасности *одного субъекта* $\mu \in \mathfrak{M}$: (Нормальное/Флегматическое), (Угрожающее/Меланхолическое), (Опасное/Холерическое) и (Восстановительное/Сангвиническое), которая представлена системой событий $\mathcal{S}_{\{\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow}\}}$, порожденной дулетом $\{\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow}\}$ *субъектных* событий экстравертного восприятия μ_{\downarrow} (верхний прямоугольник) и экстравертной деятельности μ_{\uparrow} (правый прямоугольник). Дополнениями к этим событиям служат: μ_{\downarrow}^c — интравертное восприятие (нижний прямоугольник) и μ_{\uparrow}^c — интравертная деятельность (левый прямоугольник).

Множество субъектов \mathfrak{M} в всей своей совокупности также может быть охарактеризовано аналогичной эвентологической моделью совокупного темперамента, если взглянуть на \mathfrak{M} , как на одного совокупного субъекта, совокупный темперамент которого складывается из совокупности темпераментов, входящих в него субъектов $\mu \in \mathfrak{M}$. В работе предлагается эвентологическая модель совокупного субъекта, которая определяется как система, порожденная базисом $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ из двух *средневероятных событий*⁴ $\{\hat{\mu}_{\downarrow \mathfrak{M}}, \hat{\mu}_{\uparrow \mathfrak{M}}\}$. Вероятностное распределение поведения совокупного субъекта $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ в ролях того или иного физио-, психо- и социо-типа строго определяется распределением поведений образующих его субъектов на основе модели средневероятного события [5]. Эвентологическая модель темперамента безопасности совокупного субъекта представляет собой вынужденную, но корректную и удобную событийную аппроксимацию совокупного поведения множества субъектов \mathfrak{M} , строгое математическое описание которого имеет *неполиномиальную сложность*⁵ и не позволяет проводить практические расчеты. Иллюстрация темперамента безопасности совокупного субъекта и его соответствия

⁴Новое понятие в эвентологии, введенное в [5].

⁵Речь идет о работе с массивами из неполиномиального числа $4^{|\mathfrak{M}|}$ вероятностей, где $|\mathfrak{M}|$ — количество субъектов на предприятии.

видам стечения опасных обстоятельств показана на рис. 2.

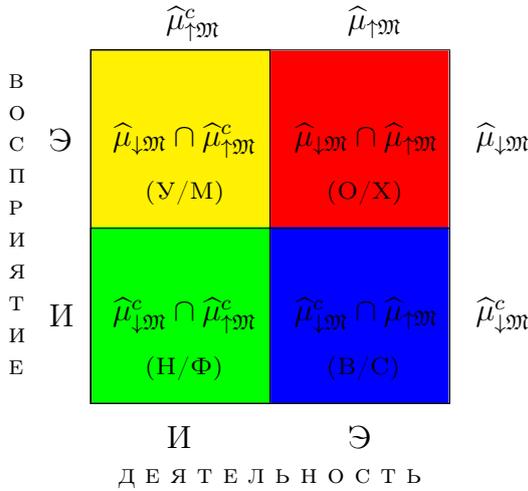


Рис. 2: **Совокупный субъект.** Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель четырех состояний безопасности *совокупного субъекта* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$: (Н/Ф), (У/М), (О/Х) и (В/С), которая представлена стандартной системой событий $\mathcal{S}_{\{\hat{\mu}_{\downarrow\mathfrak{M}}, \hat{\mu}_{\uparrow\mathfrak{M}}\}}$, порожденной дууплетом $\{\hat{\mu}_{\downarrow\mathfrak{M}}, \hat{\mu}_{\uparrow\mathfrak{M}}\}$ *субъектных* событий экстравертного восприятия $\hat{\mu}_{\downarrow\mathfrak{M}}$ (верхний прямоугольник) и экстравертной деятельности $\hat{\mu}_{\uparrow\mathfrak{M}}$ (правый прямоугольник). Дополнениями к этим событиям служат: $\hat{\mu}_{\downarrow\mathfrak{M}}^c$ — интравертное восприятие (нижний прямоугольник) и $\hat{\mu}_{\uparrow\mathfrak{M}}^c$ — интравертная деятельность (левый прямоугольник).

2 Совокупный барьер

Назовем различного рода меры, повышающие безопасность субъектов на предприятии, *барьерами* и обозначим \mathfrak{B} — *множество барьеров* $b \in \mathfrak{B}$. Нас будет интересовать не барьеры сами по себе, а их событийное восприятие субъектами $\mu \in \mathfrak{M}$, участвующими в предприятии. Эвентологическая модель восприятия барьеров субъектами основана на том, что можно назвать принципом “событийных очков” (см. параграф 13.2). Ее вид аналогичен модели субъекта и показан на рис. 3.

В этой модели участвуют четыре вида барьерных событий:

- *предупредительные барьерные события* $b_{\downarrow}^c \cap b_{\uparrow}^c$, которые осуществляются при нормальном стечении обстоятельств (при безопасном событии), когда риск причинения вреда субъекту не выше допустимого уровня;
 - наступление *предупредительных барьерных событий* направлено на снижение вероятности наступления угрожающего допустимо опасного события, т.е. на статистическое отдаление угрозы — функционирование предприятия в угрожающих обстоятельствах;

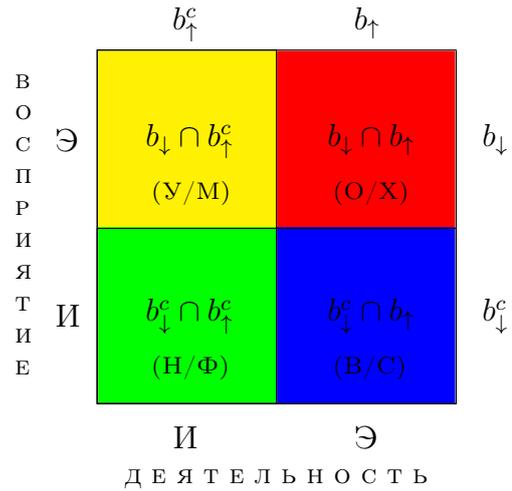


Рис. 3: **Один барьер.** Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель четырех состояний безопасности *одного барьера* $b \in \mathfrak{B}$: (Н/Ф), (У/М), (О/Х) и (В/С), которая характеризуется системой событий $\mathcal{S}_{\{b_{\downarrow}, b_{\uparrow}\}}$, порожденной дууплетом $\{b_{\downarrow}, b_{\uparrow}\}$ *барьерных* событий экстравертного восприятия b_{\downarrow} (верхний прямоугольник) и экстравертной деятельности b_{\uparrow} (правый прямоугольник). Дополнениями к этим событиям служат: b_{\downarrow}^c — интравертное восприятие (нижний прямоугольник) и b_{\uparrow}^c — интравертная деятельность (левый прямоугольник).

- *устраняющие барьерные события* $b_{\downarrow} \cap b_{\uparrow}^c$, которые осуществляются при угрожающем стечении обстоятельств (при угрожающем допустимо опасном событии), когда риск причинения вреда субъекту не выше допустимого уровня и позволяет проводить устраняющие угрозу работы;
 - наступление *устраняющих барьерных событий* направлено на снижение вероятности наступления опасного события, т.е. на статистическое отдаление опасности — чрезвычайного функционирование предприятия в опасных обстоятельствах;
- *реагирующие барьерные события* $b_{\downarrow} \cap b_{\uparrow}$, которые осуществляются при опасном стечении обстоятельств (опасное событие);
 - наступление *реагирующих барьерных событий* направлено на повышение вероятности наступления допустимо опасного события, т.е. на статистическое приближение восстановления — восстановление нормального функционирования предприятия;
- *восстанавливающие барьерные события* $b_{\downarrow}^c \cap b_{\uparrow}$, которые осуществляются при допустимо опасном стечении обстоятельств (при восстанавливающем допустимо опасном событии), когда риск причинения вреда субъекту, хотя и превышает норму, но позволяет субъекту проводить восстановительные работы и ликвидировать последствия опасного события;

– наступление *барьерных восстанавливающих событий* направлено на повышение вероятности безопасного события, т.е. на статистическое приближение нормы — нормального функционирования предприятия.

Однако наибольший практический интерес для системы безопасности представляет не восприятие каждого отдельного барьера $b \in \mathfrak{B}$ каждым отдельным субъектом $\mu \in \mathfrak{M}$, а восприятие *совокупного барьера* $\hat{b}_{\mathfrak{B}}$ *совокупным субъектом* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$. Эвентологическая модель совокупного барьера, основанная на принципе средневероятного наследования событийной структуры, имеет вид аналогичный эвентологической модели совокупного субъекта (см. рис. 4).

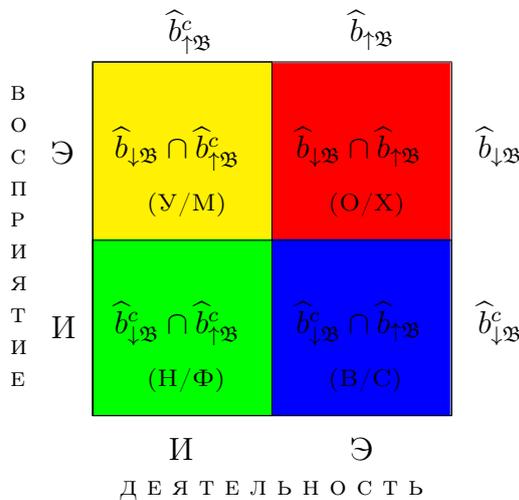


Рис. 4: **Совокупный барьер.** Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель четырех состояний безопасности *совокупного барьера* $\hat{b}_{\mathfrak{B}}$: (Н/Ф), (У/М), (О/Х) и (В/С), которая характеризуется системой событий $\mathfrak{S}_{\{\hat{b}_{\downarrow\mathfrak{B}}, \hat{b}_{\uparrow\mathfrak{B}}\}}$, порожденной дууплетом $\{\hat{b}_{\downarrow\mathfrak{B}}, \hat{b}_{\uparrow\mathfrak{B}}\}$ *барьерных* событий экстравертного восприятия $\hat{b}_{\downarrow\mathfrak{B}}$ (верхний прямоугольник) и экстравертной деятельности $\hat{b}_{\uparrow\mathfrak{B}}$ (правый прямоугольник). Дополнениями к этим событиям служат: $\hat{b}_{\downarrow\mathfrak{B}}^c$ — интравертное восприятие (нижний прямоугольник) и $\hat{b}_{\uparrow\mathfrak{B}}^c$ — интравертная деятельность (левый прямоугольник).

3 Совокупный объект

Назовем все основные элементы, из которых состоит предприятие, *объектами* и обозначим \mathfrak{X} — *множество объектов* $x \in \mathfrak{X}$. Нас будет интересовать не объекты сами по себе, а их событийное восприятие субъектами $\mu \in \mathfrak{M}$, участвующими в предприятии.

Эвентологическая модель восприятия объектов субъектами основана на том, что можно назвать принципом “событийных очков” (см. параграф 13.2). Ее вид аналогичен модели субъекта и показан на рис. 3.

В этой модели участвуют четыре вида объектных событий:

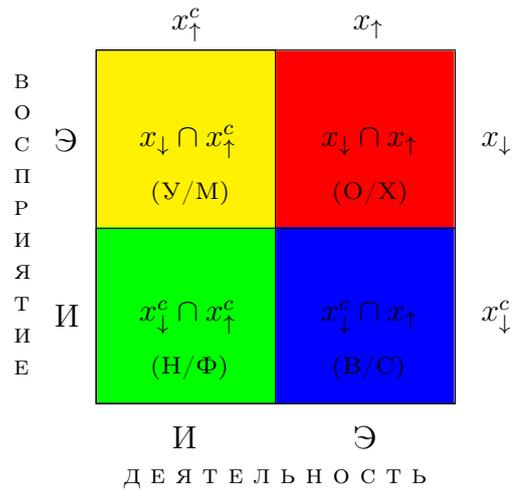


Рис. 5: **Один объект.** Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель четырех состояний безопасности *одного объекта* $x \in \mathfrak{X}$: (Н/Ф), (У/М), (О/Х) и (В/С), которая характеризуется системой событий $\mathfrak{S}_{\{x_{\downarrow}, x_{\uparrow}\}}$, порожденной дууплетом $\{x_{\downarrow}, x_{\uparrow}\}$ *объектных* событий экстравертного восприятия x_{\downarrow} (верхний прямоугольник) и экстравертной деятельности x_{\uparrow} (правый прямоугольник). Дополнениями к этим событиям служат: x_{\downarrow}^c — интравертное восприятие (нижний прямоугольник) и x_{\uparrow}^c — интравертная деятельность (левый прямоугольник).

- *нормальные объектные события (безопасные)* $x_{\downarrow}^c \cap x_{\uparrow}^c$, которые происходят с объектами при нормальном стечении обстоятельств, когда риск причинения вреда субъекту не выше допустимого уровня;
- *угрожающие объектные события (допустимо опасные)* $x_{\downarrow} \cap x_{\uparrow}^c$, которые происходят с объектами при угрожающем стечении обстоятельств, когда риск причинения вреда субъекту не выше допустимого уровня и позволяет проводить устраняющие угрозу работы;
- *опасные объектные события* $b_{\downarrow} \cap b_{\uparrow}$, которые происходят с объектами при опасном стечении обстоятельств, когда риск причинения вреда субъекту выше допустимого уровня;
- *восстанавливающие объектные события* $b_{\downarrow}^c \cap b_{\uparrow}$, которые происходят с объектами при допустимо опасном стечении обстоятельств (при восстанавливаемом допустимо опасном событии), когда риск причинения вреда субъекту, хотя и превышает норму, но позволяет субъекту проводить восстановительные работы и ликвидировать последствия опасного события;

Однако наибольший практический интерес для системы безопасности представляет не восприятие каждого отдельного объекта $x \in \mathfrak{X}$ каждым отдельным субъектом $\mu \in \mathfrak{M}$, а восприятие *совокупного барьера* $\hat{x}_{\mathfrak{X}}$ *совокупным субъектом* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$. Эвентологическая модель совокупного объекта, основанная на

принципе средневоятного наследования событийной структуры, имеет вид аналогичный эвентологической модели совокупного субъекта (см. рис. 6).

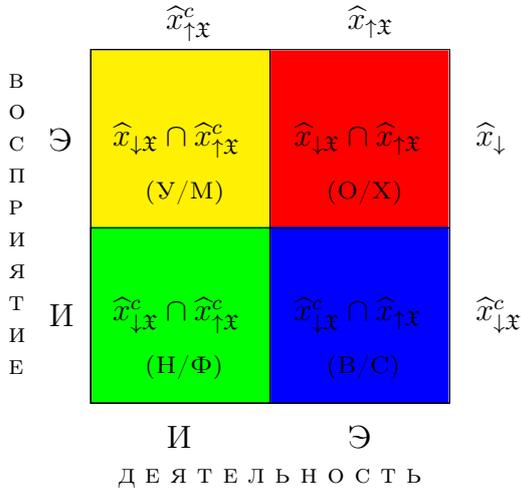


Рис. 6: **Совокупный объект.** Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель четырех состояний безопасности *совокупного объекта* \hat{x}_x : (H/Φ), (Y/M), (O/X) и (B/C), которая характеризуется системой событий $\mathcal{S}_{\{\hat{x}_{\downarrow x}, \hat{x}_{\uparrow x}\}}$, порожденной дуэтом $\{\hat{x}_{\downarrow x}, \hat{x}_{\uparrow x}\}$ объектных событий экстравертного восприятия $\hat{x}_{\downarrow x}$ (верхний прямоугольник) и экстравертной деятельности $\hat{x}_{\uparrow x}$ (правый прямоугольник). Дополнениями к этим событиям служат: $\hat{x}_{\downarrow x}^c$ — интравертное восприятие (нижний прямоугольник) и $\hat{x}_{\uparrow x}^c$ — интравертная деятельность (левый прямоугольник).

4 Три системных совокупных фигуранта

Рассмотренные выше *совокупный субъект, совокупный барьер и совокупный объект* представляют собой трех фигурантов системы безопасности предприятия, которые называются *системными совокупными фигурантами*. Каждый из системных фигурантов — это эвентологическая модель восприятия субъектами того или иного стечения опасных обстоятельств на барьерах и объектах данного предприятия. Каждый системный фигурант описывает средневоятное событийное восприятие барьеров и объектов предприятия всем множеством субъектов, участвующих на предприятии (см. рис. 7, 8, 9).

Наибольший интерес представляет совместное поведение трех фигурантов, которое определяет поведение всей системы безопасности предприятия. Эвентологической моделью системы безопасности служит совместное эвентологическое распределение 64-х террасных событий, которые могут происходить с тремя системными фигурантами (см. рис. 10).

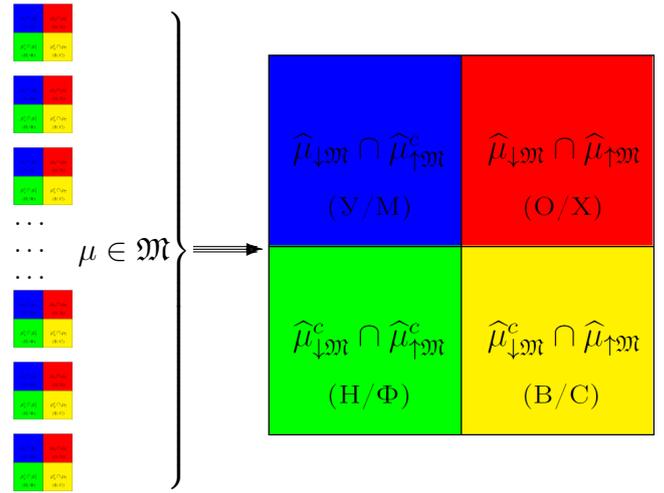


Рис. 7: **Совокупность субъектов и совокупный субъект.** Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель аппроксимации *совокупности субъектов* \mathfrak{M} , порожденной базисами $\{\hat{\mu} = \{\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow}\} : \mu \in \mathfrak{M}\}$, одним *совокупным субъектом*, который порожден базисом $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \{\hat{\mu}_{\downarrow \mathfrak{M}}, \hat{\mu}_{\uparrow \mathfrak{M}}\}$ из двух средневоятных событий.

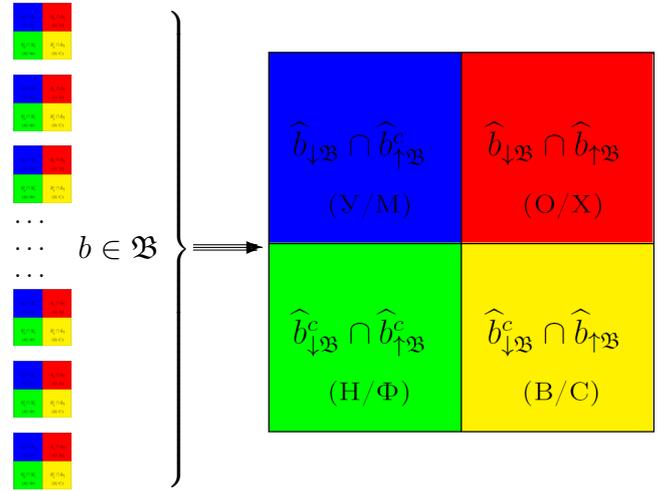


Рис. 8: **Совокупность барьеров и совокупный барьер.** Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель аппроксимации *совокупности барьеров* \mathfrak{B} , порожденной базисами $\{\hat{b} = \{b_{\downarrow}, b_{\uparrow}\} : b \in \mathfrak{B}\}$, одним *совокупным барьером*, который порожден базисом $\hat{b}_{\mathfrak{B}} = \{\hat{b}_{\downarrow \mathfrak{B}}, \hat{b}_{\uparrow \mathfrak{B}}\}$ из двух средневоятных событий.

5 Гиперсценарный цикл функционирования системы безопасности

Основная последовательность совместных состояний трех системных фигурантов образует так называемый гиперсценарный цикл функционирования системы безопасности предприятия, который определяется состояниями *совокупного объекта*: нормальное (H), угрожающее (Y), опасное (O), восстановительное (B). Событийная иллюстрация гиперсценарного цикла показана на рис. 11, а его развертывание во времени на рис. 12.

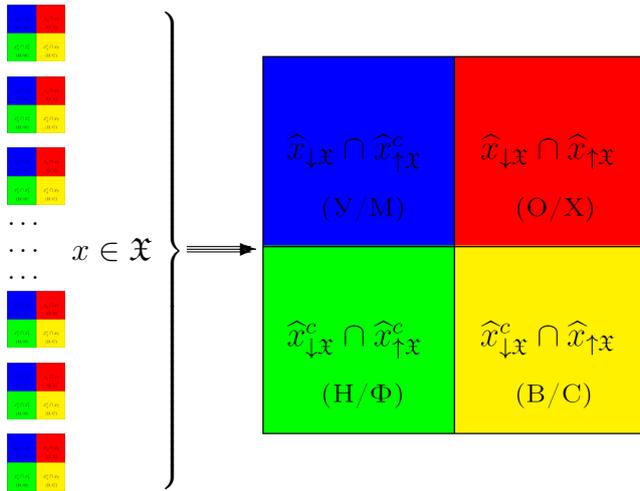


Рис. 9: Совокупность объектов и совокупный объект. Диаграмма Венна, иллюстрирующая эвентологическую модель аппроксимации совокупности объектов \mathfrak{X} , порожденной базисами $\{\tilde{x} = \{x_{\downarrow}, x_{\uparrow}\} : x \in \mathfrak{X}\}$, одним совокупным объектом, который порожден базисом $\hat{x}_{\mathfrak{X}} = \{\hat{x}_{\downarrow\mathfrak{X}}, \hat{x}_{\uparrow\mathfrak{X}}\}$ из двух средневоятных событий.

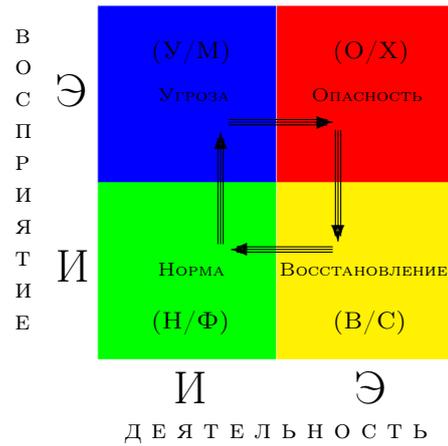


Рис. 11: Гиперсценарный событийный цикл. Диаграмма Венна, иллюстрирующая гиперсценарный событийный цикл системы безопасности, характеризующий последовательной сменой состояний ее совокупных фигурантов: ... \rightarrow Норма (Ф) \rightarrow Угроза (С) \rightarrow Опасность (Х) \rightarrow Последствие (М) \rightarrow Норма (Ф) \rightarrow ...

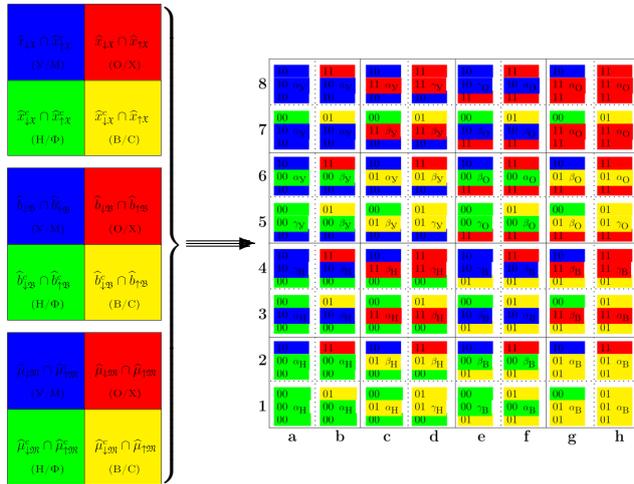


Рис. 10: Три фигуранта и их совокупность. Диаграммы Венна, иллюстрирующие эвентологическую модель *трех* фигурантов (слева) системы безопасности — совокупного субъекта $\hat{\mu}_{\downarrow M}$, совокупного барьера $\hat{b}_{\downarrow B}$ и совокупного объекта $\hat{x}_{\downarrow X}$ и эвентологическую модель совокупности *трех* фигурантов (справа в виде шахматной визуализации, см. детали в параграфе 6), порожденной объединенным базисом $\hat{\mu} + \hat{b} + \hat{x} = \{\hat{\mu}_{\downarrow M}, \hat{\mu}_{\uparrow M}, \hat{b}_{\downarrow B}, \hat{b}_{\uparrow B}, \hat{x}_{\downarrow X}, \hat{x}_{\uparrow X}\}$ из шести средневоятных событий.

6 Шахматная визуализация гиперсценарных состояний системы безопасности

При наступлении каждого из четырех состояний совокупного объекта, оставшиеся два системных фигуранта могут оказаться в одном из 16-ти совместных состояний. Общая событийная картина системы безопасности состоит из 64-х совместных состояний, которые можно иллюстрировать при помощи так называемой шахматной визуализации (см. рис. 13).

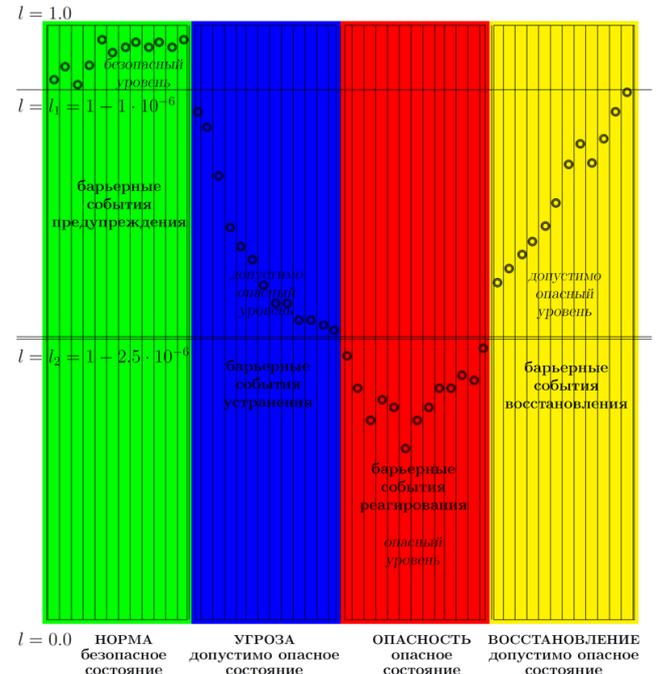


Рис. 12: Гиперсценарный цикл по времени. Эвентологическая гиперсценарная модель одного *четырёхтактного* (норма, угроза, опасность, восстановление) цикла системы *трехуровневой* (безопасный: $1 > l \geq l_1$, допустимо опасный: $l_1 > l \geq l_2$, опасный: $l_2 > l > 0$) безопасности субъектов на предприятии. Диаграмма Венна последовательности (слева направо) стечения *террасных состояний* субъектов, барьеров и объектов. На фоне *террасных состояний* субъектами осуществляются *барьерные события*: предупреждающие (в безопасном состоянии: НОРМА), устраняющие (в допустимо опасном состоянии: УГРОЗА), реагирующие (в опасном состоянии: ОПАСНОСТЬ) и восстанавливающие (в допустимо опасном состоянии: ВОССТАНОВЛЕНИЕ). Вертикальная ось — *уровень безопасности* ($0 \leq l \leq 1$ в *нелинейной* шкале) субъектов, горизонтальная ось — *временная последовательность* (слева направо) *террасных событий*.

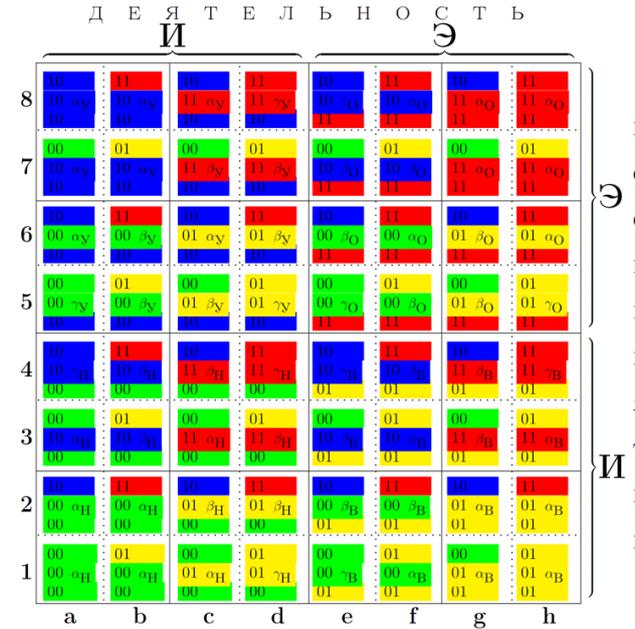


Рис. 13: Шахматная визуализация гиперсценарных состояний системы безопасности. Диаграмма Венна эвентологической модели системы безопасности S $\{\hat{x}_{\downarrow x}, \hat{x}_{\uparrow x}, \hat{b}_{\downarrow z}, \hat{b}_{\uparrow z}, \hat{\mu}_{\downarrow m}, \hat{\mu}_{\uparrow m}\}$, порожденной объединенным базисом трех системных фигурантов, который состоит из шести средневероятных событий $\{\hat{x}_{\downarrow x}, \hat{x}_{\uparrow x}, \hat{b}_{\downarrow z}, \hat{b}_{\uparrow z}, \hat{\mu}_{\downarrow m}, \hat{\mu}_{\uparrow m}\}$, иллюстрирующая шахматную визуализацию рисков опасности и возможностей развития гиперсценарных циклов безопасности. Для обозначения каждого из 64-х террасных событий использована аббревиатура: булева матрица (2×3) , в которой 1 обозначает базовое событие, а 0 — его дополнение, причем нижняя строка матрицы соответствует совокупному объекту $\hat{x}_x = \{\hat{x}_{\downarrow x}, \hat{x}_{\uparrow x}\}$, средняя — совокупному барьеру $\hat{b}_z = \{\hat{b}_{\downarrow z}, \hat{b}_{\uparrow z}\}$, а верхняя — совокупному субъекту $\hat{\mu}_m = \{\hat{\mu}_{\downarrow m}, \hat{\mu}_{\uparrow m}\}$. Например, аббревиатурой на поле **h8** обозначено террасное событие: $\text{ter}(\hat{x}_x // \hat{x}_x) \cap \text{ter}(\hat{b}_z // \hat{b}_z) \cap \text{ter}(\hat{\mu}_m // \hat{\mu}_m)$, а аббревиатурой на поле **a1** обозначено террасное событие: $\text{ter}(\emptyset // \hat{x}_x) \cap \text{ter}(\emptyset // \hat{b}_z) \cap \text{ter}(\emptyset // \hat{\mu}_m)$. Показаны *риски опасности*: $\alpha_o, \beta_o, \gamma_o$, *угроз*: $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$, *восстановления*: $\alpha_b, \beta_b, \gamma_b$ и *нормы*: $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, где $l_2 > \alpha_o > \beta_o > \gamma_o > 0$, $l_1 > \alpha_y > \beta_y > \gamma_y > l_2$, $l_1 > \alpha_b > \beta_b > \gamma_b > l_2$, $1 > \alpha_n > \beta_n > \gamma_n > l_1$, а $l_1 = 1 - 1 \cdot 10^{-6}$, $l_2 = 1 - 2.5 \cdot 10^{-6}$ — нормативные уровни рисков, разделяющие опасные, допустимо опасные и безопасные риски.

7 Траектория безопасности

Развертывание во времени гиперсценарного цикла системы безопасности предприятия (рис. 12) образует *траекторию безопасности* предприятия. Примерная траектория безопасности предприятия за 50-летний период может выглядеть так, как показано на рис. 14

8 Формула субъектного риска

Вероятность гибели *субъектов* $\mu \in \mathcal{M}$ от наступления опасного состояния совокупного объекта полагается равной аналогичной характеристике $Q_{\hat{\mu}_m}$ *сово-*

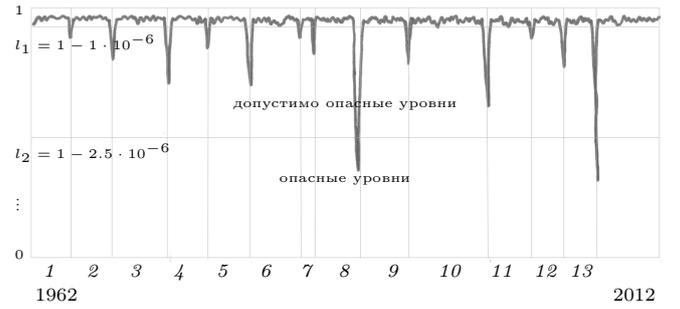


Рис. 14: Траектория безопасности. График вероятности субъектной безопасности $0 < l < 1$ (вертикальная ось в нелинейной шкале) для примерной 50-летней последовательности 13-ти гиперсценарных циклов системы безопасности. Частота опасных пожарных событий равна 0.04 (2 события за 50 лет). Безопасные уровни: $l_1 < l < 1$; допустимо опасные уровни: $l_2 < l < l_1$; опасные уровни: $0 < l < l_2$.

купного субъекта $\hat{\mu}_m$ и оценивается сверху

$$Q_{\hat{\mu}_m} \leq P(W_{xzm}) \quad (8.1)$$

вероятностью наиболее опасного сочетания состояний всех трех системных *совокупных фигурантов*, которое происходит при наступлении следующего пересечения трех террасных событий — объектного, барьерного и субъектного:

$$\begin{aligned} W_{xzm} &= \\ &= \text{ter}(\hat{x}_x // \hat{x}_x) \cap \text{ter}(\emptyset // \hat{b}_z) \cap \text{ter}(\emptyset // \hat{\mu}_m) = \\ &= \hat{x}_{\downarrow x} \cap \hat{x}_{\uparrow x} \cap \hat{b}_{\downarrow z}^c \cap \hat{b}_{\uparrow z}^c \cap \hat{\mu}_{\downarrow m}^c \cap \hat{\mu}_{\uparrow m}^c \subseteq \Omega \end{aligned}$$

В наиболее опасном сочетании W_{xzm} состояния *совокупного субъекта* и *совокупного барьера* максимально не соответствуют опасному состоянию *совокупного объекта*, поскольку и совокупный субъект и совокупный барьер находятся в состояниях нормы и максимально не подготовлены к наступлению опасного состояния совокупного объекта.

Вероятность наиболее опасного сочетания состояний фигурантов вычисляется по известной формуле

$$P(W_{xzm}) = Q_x Q_{z|x} Q_{m|x|z}, \quad (8.2)$$

где

$$Q_x = P(\hat{x}_{\downarrow x} \cap \hat{x}_{\uparrow x})$$

— вероятность *опасного состояния* $\hat{x}_{\downarrow x} \cap \hat{x}_{\uparrow x}$ совокупного объекта $\hat{x}_x = \{\hat{x}_{\downarrow x}, \hat{x}_{\uparrow x}\}$,

$$Q_{z|x} = P(\hat{b}_{\downarrow z}^c \cap \hat{b}_{\uparrow z}^c | \hat{x}_{\downarrow x} \cap \hat{x}_{\uparrow x})$$

— условная вероятность состояния *максимального барьерного несоответствия* $\hat{b}_{\downarrow z}^c \cap \hat{b}_{\uparrow z}^c$ — *максимального несоответствия* состояния совокупного барьера $\hat{b}_z = \{\hat{b}_{\downarrow z}, \hat{b}_{\uparrow z}\}$ опасному состоянию совокупного объекта при условии его наступления,

$$Q_{m|x|z} = P(\hat{\mu}_{\downarrow m}^c \cap \hat{\mu}_{\uparrow m}^c | \hat{x}_{\downarrow x} \cap \hat{x}_{\uparrow x} \cap \hat{b}_{\downarrow z}^c \cap \hat{b}_{\uparrow z}^c)$$

— условная вероятность состояния *максимального субъектного несоответствия* $\hat{\mu}_{\text{зн}}^c \cap \hat{\mu}_{\text{зн}}^c$ — *максимального несоответствия* состояния совокупного субъекта $\hat{\mu}_{\text{зн}} = \{\hat{\mu}_{\text{зн}}, \hat{\mu}_{\text{зн}}\}$ опасному состоянию совокупного объекта $\hat{x}_{\text{зн}} \cap \hat{x}_{\text{зн}}$ при условии наступления этого опасного объектного состояния и наступления состояния *максимального барьерного несоответствия* $\hat{b}_{\text{зн}}^c \cap \hat{b}_{\text{зн}}^c$.

Из (8.1) и (8.2) следует формула

$$Q_{\hat{\mu}_{\text{зн}}} \leq Q_{\text{зн}} Q_{\text{зн}|\text{зн}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}, \quad (8.2')$$

для оценки вероятности гибели субъектов от опасности, которая обобщает формулу индивидуального пожарного риска из [9] (см. формулу (13.3.1) в параграфе 13.3) и совпадает с ней при

$$Q_{\text{зн}} = Q_{\text{п}}, \quad (8.3)$$

$$Q_{\text{зн}|\text{зн}} = (1 - R_{\text{ап}})(1 - P_{\text{пз}}), \quad (8.4)$$

$$Q_{\text{зн}|\text{зн}} = P_{\text{пр}}(1 - P_{\text{э}}). \quad (8.5)$$

9 Четыре субъектных риска

Если в формуле субъектного риска (8.2') подчеркнуть, что речь идет о *субъектных рисках опасности*, т.е. при наступлении опасности (О):

$$Q_{\hat{\mu}_{\text{зн}}}^{\text{О}} \leq Q_{\text{зн}}^{\text{О}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{О}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{О}}, \quad (9.1)$$

то применяя ту же логику вывода, что и в параграфе 8, получаем еще три формулы.

Для *субъектного риска угрозы* (У):

$$Q_{\hat{\mu}_{\text{зн}}}^{\text{У}} \leq Q_{\text{зн}}^{\text{У}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{У}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{У}}, \quad (9.2)$$

для *субъектного риска восстановления* (В):

$$Q_{\hat{\mu}_{\text{зн}}}^{\text{В}} \leq Q_{\text{зн}}^{\text{В}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{В}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{В}}, \quad (9.3)$$

для *субъектного риска нормы* (Н):

$$Q_{\hat{\mu}_{\text{зн}}}^{\text{Н}} \leq Q_{\text{зн}}^{\text{Н}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{Н}} Q_{\text{зн}|\text{зн}}^{\text{Н}}, \quad (9.4)$$

Таким образом, предлагаемая эвентологическая модель системы безопасности выражает и позволяет оценивать *четыре субъектных риска*.

10 Траектория системы безопасности как конечная марковская цепь

Эвентологическая модель системы безопасности предприятия, основанная на совместном событийном поведении трех системных фигурантов, без особого труда укладывается в классическую регулярную цепь Маркова [2]. Матрица переходных вероятностей для состояния каждого системного фигуранта имеет вид, показанный на рис. 15, а граф переходов показан на рис. 16. Немного подробнее о характеристиках системы безопасности, которые позволяют оценивать теория марковских цепей см. в параграфе 14.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1_{\text{Н}}) & (2_{\text{У}}) & (3_{\text{О}}) & (4_{\text{В}}) & (5_{\text{Г}}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1_{\text{Н}}) \\ (2_{\text{У}}) \\ (3_{\text{О}}) \\ (4_{\text{В}}) \\ (5_{\text{Г}}) \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Рис. 15: Матрица гиперсценарных переходных вероятностей марковской цепи с 5-тью состояниями: Норма, Угроза, Опасность, Восстановление, Гибель.

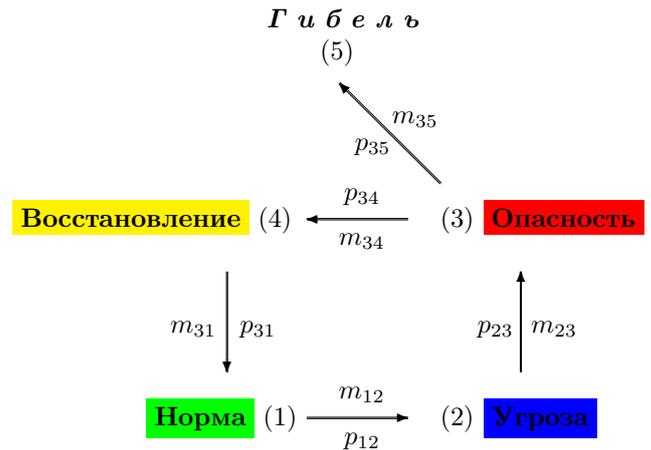


Рис. 16: Граф базового гиперсценария безопасности: p_{ij} — переходные вероятности; m_{ij} — средние переходные времена, для марковской цепи с 5-тью состояниями: Норма, Угроза, Опасность, Восстановление, Гибель.

11 Эвентологические сценарные модели событийной динамики системных фигурантов

Параметры, которые входят в оценки различного рода вероятностей, условных вероятностей и переходных вероятностей в формулах субъектных рисков, а также в формулах из марковских моделей, являются выходами специальных сценарных моделей, которые включают *эвентологические сценарные модели*⁶ *статистического отдаления опасного события* и *эвентологические сценарные модели*⁷ *статистического приближения допустимо опасного (или безопасного) события*.

12 Эвентологическая экономика безопасности

Эвентологическое распределение множества событий в отличие от классического вероятностного распределения включает, кроме *вероятности*, еще одну очень

⁶Включающие в качестве стандартных модулей детерминированные, имитационные и вероятностные сценарные модели.

⁷Включающие в качестве стандартных модулей детерминированные, имитационные и вероятностные сценарные модели.

важную для экономических расчетов меру события — его *ценность*. На основе понятия *ценности события* в эвентологии [3] сформулированы и решены задачи оптимального распределения ресурсов среди множества событий. Разработанные методы эвентологического портфельного анализа позволяют решать аналогичные задачи и для предлагаемой системы безопасности предприятия. Например, нет никаких препятствий для решения задачи оптимального распределения ресурсов в различные виды профилактических мер безопасности, которое максимально снижает субъектные риски в рамках приемлемых затрат.

13 Теоретическое приложение

13.1 Событийный темперамент

В психологии *темперамент*⁸ — совокупность индивидуальных свойств личности, определяемых характером ее психических процессов и состояний; термин введен *Галеном*⁹; изучался *Гиппократом*¹⁰.

В эвентологии *темперамент* — проявление субъектом дуальности его со~бытия; эвентологическая модель темперамента субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ определяется дулетом событий

$$\ddot{\mu} = \{\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow}\},$$

состоящим из события *экстравертного восприятия* μ_{\downarrow} и события *экстравертной деятельности* μ_{\uparrow} , теоретико-множественными дополнениями к которым служат событие *интравертного восприятия* μ_{\downarrow}^c и событие *интравертной деятельности* μ_{\uparrow}^c (рис. 1).

Холерическое состояние субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ — неуравновешенность, склонность к бурным эмоциональным вспышкам, резкая смена настроения; быстрота, порывистость, способность отдаваться делу с исключительной страстностью; эвентологически характеризуется *экстравертным восприятием* и *экстравертной деятельностью* — террасным событием $\mu_{\downarrow} \cap \mu_{\uparrow}$.

Меланхолическое состояние субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ — впечатлительность, легкоранимость, склонность глубоко переживать даже незначительные неудачи; внешне малое реагирование на окружающее, ипохондрик или идеалист в делах; эвентологически характеризуется *экстравертным восприятием* и *интравертной деятельностью* — террасным событием $\mu_{\downarrow} \cap \mu_{\uparrow}^c$.

⁸От лат. *temperamentum* — надлежащее соотношение частей, соразмерность.

⁹*Гиппократ* (греч. *Ἱπποκράτης, Hippokrates*) (ок. 460 до н. э. — ок. 377 до н. э.) — древнегреческий врач, “отец медицины”, которая благодаря ему выделилась из философии в отдельную науку.

¹⁰*Гален* (греч. *Γαληνός*; 129 или 131 — ок. 200 или ок. 210); с эпохи Возрождения распространено написание имени *Клавдий Гален* (лат. *Claudius Galenus*) — античный медик.

Сангвиническое состояние субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ — внешне легкое переживание неудачи и неприятности; непостоянство, сиюминутность, подвижность, быстрая возбудимость; эвентологически характеризуется *интравертным восприятием* и *экстравертной деятельностью* — террасным событием $\mu_{\downarrow}^c \cap \mu_{\uparrow}$.

Флегматическое состояние субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ — более или менее постоянное настроением, внешне слабое выражение душевного состояния; медлительность, невозмутимость, устойчивость стремления в делах; эвентологически характеризуется *интравертным восприятием* и *интравертной деятельностью* — террасным событием $\mu_{\downarrow}^c \cap \mu_{\uparrow}^c$.

Подводя итог, можно сказать, что эвентологической моделью темперамента субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ служит эвентологическая система (рис. 1)

$$\mathcal{S}_{\ddot{\mu}} = \ddot{\mu} + \text{terr}(\ddot{\mu}),$$

определяемая базисом — дулетом событий

$$\ddot{\mu} = \{\text{экстравертное восприятие, экстравертная деятельность}\},$$

и оболочкой — террасным разбиением

$$\text{terr}(\ddot{\mu}) = \{\text{ter}(Y//\ddot{\mu}) : Y \subseteq \ddot{\mu}\} =$$

$$= \{\text{ter}(\ddot{\mu}//\ddot{\mu}), \text{ter}(\{\mu_{\downarrow}\}//\ddot{\mu}), \text{ter}(\{\mu_{\uparrow}\}//\ddot{\mu}), \text{ter}(\emptyset//\ddot{\mu})\} =$$

$$= \{\mu_{\downarrow} \cap \mu_{\uparrow}, \mu_{\downarrow} \cap \mu_{\uparrow}^c, \mu_{\downarrow}^c \cap \mu_{\uparrow}, \mu_{\downarrow}^c \cap \mu_{\uparrow}^c\} =$$

$$= \{\text{холерик, меланхолик, сангвиник, флегматик}\},$$

порожденным базисом $\ddot{\mu}$. Вероятности террасных событий

$$p(Y//\ddot{\mu}) = \mathbf{P}(\text{ter}(Y//\ddot{\mu}))$$

из террасного разбиения $\text{terr}(\ddot{\mu})$ образуют вероятностное распределение

$$\{p(Y//\ddot{\mu}) : Y \subseteq \ddot{\mu}\}$$

системы событий $\mathcal{S}_{\ddot{\mu}}$ и ее базиса $\ddot{\mu}$, которое эвентологически характеризует темперамент субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$, указывая вероятности, с которыми он оказывается в холерическом, меланхолическом, сангвиническом и флегматическом состоянии.

Эта эвентологическая модель темперамента субъекта отражает то известное психологическое наблюдение, что чистых темпераментов у субъектов практически не бывает. Каждый субъект в каждый момент времени характеризуется собственной “смесью” психологических состояний, которая проявляется при его событийном взаимодействии с окружающим миром в виде эвентологического распределения чистых темпераментов холерика, меланхолика, сангвиника и флегматика.

13.2 Событийные “очки” субъекта

В этой работе принимается эвентологическая гипотеза о том, что субъект *воленс-ноленс* “проецирует” структуру собственного событийного устройства на всё, с чем или с кем вступает в событийное взаимодействие. Иными словами, субъект способен воспринимать событийное окружение исключительно через свои событийные “очки”, конструкция которых характеризуется его собственным событийным устройством. В процессе этой “проекции” субъект переносит на то, с чем или с кем событийно взаимодействует, лишь форму собственной событийной структуры, не затрагивая содержание событийного окружения: “облекает” событийное содержание своего окружения в собственную событийную форму.

Рассмотрим одну из простейших эвентологических моделей событийных “очков” субъекта, основанную на этой гипотезе. Чтобы в ней разобраться начнем с примера в рамках эвентологической системы безопасности $(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}, \hat{b}_{\mathfrak{B}}, \hat{x}_{\mathfrak{X}})$, в которой действуют три событийных фигуранта: *совокупный субъект* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$, *совокупный барьер* $\hat{b}_{\mathfrak{B}}$ и *совокупный объект* $\hat{x}_{\mathfrak{X}}$. Любое объектное или барьерное событие приобретает смысл в данной системе безопасности только при взаимодействии с субъектами $\mu \in \mathfrak{M}$, формирующими ее неотъемлемого событийного фигуранта — *совокупного субъекта* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$. Однако в этом примере нас будет интересовать событийное взаимодействие лишь одного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ с одним барьером $b \in \mathfrak{B}$, вынуждающее субъекта “проецировать” свою событийную структуру на барьер. А затем — взаимодействие того же субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ с одним объектом $x \in \mathfrak{X}$, вынуждающее его “проецировать” свою событийную структуру на объект.

Обозначим

$$\mathcal{S}_{\hat{\mu}} = \{\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow}\} + \text{ter}(\{\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow}\}) \quad (13.2.1)$$

— систему событий, характеризующую событийную структуру субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$. Эта система состоит из базиса — дуплета событий (см. рис. 1)

$$\ddot{\mu} = \{\mu_{\downarrow}, \mu_{\uparrow}\},$$

и оболочки — террасного разбиения

$$\text{terr}(\ddot{\mu}) = \{\text{ter}(Y//\ddot{\mu}) : Y \subseteq \ddot{\mu}\},$$

порожденного дуплетом $\ddot{\mu} \subset \mathcal{A}$.

Наша цель — сначала определить событийную структуру барьера $b \in \mathfrak{B}$, опираясь только на систему событий $\mathcal{S}_{\hat{\mu}}$ и барьерное событие $b \subseteq \Omega$, таким по возможности наиболее простым образом, чтобы она характеризовалась системой событий аналогичного вида (см. рис. 3)

$$\mathcal{S}_{\hat{b}} = \ddot{b} + \text{terr}(\ddot{b})$$

с базисом

$$\ddot{b} = \{b_{\downarrow}, b_{\uparrow}\}$$

и оболочкой — террасным разбиением

$$\text{terr}(\ddot{b}) = \{\text{ter}(Y//\ddot{b}) : Y \subseteq \ddot{b}\},$$

порожденным дуплетом $\ddot{b} \subset \mathcal{A}$.

Чисто технически единственный простой способ определения системы $\mathcal{S}_{\hat{b}}$, удовлетворяющей сформулированным условиям, дается формулами:

$$\ddot{b} = \ddot{b}(\mu) = \{b_{\downarrow}(\mu), b_{\uparrow}(\mu)\} = \{b \cap \mu_{\downarrow}, b \cap \mu_{\uparrow}\},$$

$$\text{terr}(\ddot{b}(\mu)) = \{b \cap \text{ter}(Y//\ddot{\mu}) : Y \subseteq \ddot{\mu}\}.$$

Остается дать этому лапидарному техническому решению содержательную интерпретацию. Поищем такую интерпретацию в области пожарной безопасности на примере всем известного барьерного противопожарного события¹¹

$$b = \{\omega \in \Omega : \text{установлена табличка "Не курить"}\} \subset \Omega.$$

Для такого барьера имеем следующие интерпретации двух базисных событий $b_{\downarrow}(\mu)$ и $b_{\uparrow}(\mu)$:

$$\begin{aligned} b_{\downarrow}(\mu) &= b \cap \mu_{\downarrow} = \\ &= \{\omega \in \Omega : \text{субъект } \mu \text{ экстравертно воспри-} \\ &\quad \text{нимает табличку "Не курить"}\}, \end{aligned} \quad (13.2.2)$$

$$\begin{aligned} b_{\uparrow}(\mu) &= b \cap \mu_{\uparrow} = \\ &= \{\omega \in \Omega : \text{субъект } \mu \text{ экстравертно реаги-} \\ &\quad \text{рует на табличку "Не курить"}\}. \end{aligned} \quad (13.2.3)$$

и 4-х террасных событий из разбиения $\text{terr}(\ddot{b}(\mu))$:

$$\begin{aligned} b \cap \text{ter}(\ddot{\mu}//\ddot{\mu}) &= b \cap \mu_{\downarrow} \cap \mu_{\uparrow} = \\ &= \{\omega \in \Omega : \text{субъект } \mu \text{ холерично реагирует} \\ &\quad \text{на табличку "Не курить"}\}, \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

$$\begin{aligned} b \cap \text{ter}(\{\mu_{\downarrow}\}//\ddot{\mu}) &= b \cap \mu_{\downarrow} \cap (\mu_{\uparrow})^c = \\ &= \{\omega \in \Omega : \text{субъект } \mu \text{ меланхолично реаги-} \\ &\quad \text{рует на табличку "Не курить"}\}, \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

$$\begin{aligned} b \cap \text{ter}(\{\mu_{\uparrow}\}//\ddot{\mu}) &= b \cap (\mu_{\downarrow})^c \cap \mu_{\uparrow} = \\ &= \{\omega \in \Omega : \text{субъект } \mu \text{ сангвинично реагиру-} \\ &\quad \text{ет на табличку "Не курить"}\}, \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

$$\begin{aligned} b \cap \text{ter}(\emptyset//\ddot{\mu}) &= b \cap (\mu_{\downarrow})^c \cap (\mu_{\uparrow})^c = \\ &= \{\omega \in \Omega : \text{субъект } \mu \text{ флегматично реаги-} \\ &\quad \text{рует на табличку "Не курить"}\}. \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

Таким образом, система

$$\mathcal{S}_{\hat{b}(\mu)} = \ddot{b}(\mu) + \text{terr}(\ddot{b}(\mu)) \quad (13.2.8)$$

определяет событийную структуру барьера $b \in \mathfrak{B}$ в форме, аналогичной событийной структуре субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$. Данная система — это как раз то, что видит субъект $\mu \in \mathfrak{M}$ при событийном взаимодействии с барьером $b \in \mathfrak{B}$ через свои событийные “очки”.

¹¹Барьерное событие $b \in \mathfrak{B}$, разумеется, наступает при данном стечении обстоятельств, в данном месте и в данное время.

Весь *совокупный субъект* $\mu_{\mathfrak{M}}$, характеризуется системой

$$\mathcal{S}_{\mu_{\mathfrak{M}}} = \ddot{\mu}_{\mathfrak{M}} + \text{terr}(\ddot{\mu}_{\mathfrak{M}}) \quad (13.2.9)$$

с базисом

$$\ddot{\mu}_{\mathfrak{M}} = \{\hat{\mu}_{\downarrow\mathfrak{M}}, \hat{\mu}_{\uparrow\mathfrak{M}}\},$$

который составлен из двух *средневероятных событий* [5]

$$\hat{\mu}_{\downarrow\mathfrak{M}} \text{ и } \hat{\mu}_{\uparrow\mathfrak{M}} \quad (13.2.10)$$

для множеств событий

$$\{\mu_{\downarrow} : \mu \in \mathfrak{M}\} \text{ и } \{\mu_{\uparrow} : \mu \in \mathfrak{M}\}$$

соответственно.

Вид одного барьера $b \in \mathfrak{B}$ через событийные “очки” всего *совокупного субъекта* $\mu_{\mathfrak{M}}$, характеризуется системой

$$\mathcal{S}_{b(\mathfrak{M})} = \ddot{b}(\mathfrak{M}) + \text{terr}(\ddot{b}(\mathfrak{M}))$$

с базисом

$$\ddot{b}(\mathfrak{M}) = \{\hat{b}_{\downarrow}(\mathfrak{M}), \hat{b}_{\uparrow}(\mathfrak{M})\},$$

который составлен из двух *средневероятных событий*

$$\hat{b}_{\downarrow}(\mathfrak{M}) \text{ и } \hat{b}_{\uparrow}(\mathfrak{M}) \quad (13.2.11)$$

для множеств событий

$$\{b_{\downarrow}(\mu) : \mu \in \mathfrak{M}\} \text{ и } \{b_{\uparrow}(\mu) : \mu \in \mathfrak{M}\}$$

соответственно, где каждое событие $b_{\downarrow}(\mu)$ и $b_{\uparrow}(\mu)$ определяется соотношениями (13.2.2) и (13.2.3).

Вид же всего *совокупного барьера* $b_{\mathfrak{B}}$ через событийные “очки” *совокупного субъекта* $\mu_{\mathfrak{M}}$, характеризуется системой

$$\mathcal{S}_{b_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{M})} = \ddot{b}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}) + \text{terr}(\ddot{b}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{M})) \quad (13.2.12)$$

с базисом

$$\ddot{b}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}) = \{\hat{b}_{\downarrow\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}), \hat{b}_{\uparrow\mathfrak{B}}(\mathfrak{M})\},$$

составленным из двух *средневероятных событий*

$$\hat{b}_{\downarrow\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}) \text{ и } \hat{b}_{\uparrow\mathfrak{B}}(\mathfrak{M}) \quad (13.2.13)$$

для множеств событий

$$\{\hat{b}_{\downarrow}(\mathfrak{M}) : b \in \mathfrak{B}\} \text{ и } \{\hat{b}_{\uparrow}(\mathfrak{M}) : b \in \mathfrak{B}\},$$

которые сами составлены из *средневероятных событий*

$$\hat{b}_{\downarrow}(\mathfrak{M}) \text{ и } \hat{b}_{\uparrow}(\mathfrak{M}) \quad (13.2.11)$$

для множеств событий

$$\{b_{\downarrow}(\mu) : \mu \in \mathfrak{M}\} \text{ и } \{b_{\uparrow}(\mu) : \mu \in \mathfrak{M}\}$$

соответственно.

Аналогичную событийную структуру видит *совокупный субъект* $\mu_{\mathfrak{X}}$ через свои событийные “очки”, глядя на *совокупного объекта* $x_{\mathfrak{X}}$, который в результате характеризуется системой (см. рис. 5)

$$\mathcal{S}_{x_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{M})} = \ddot{x}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{M}) + \text{terr}(\ddot{x}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{M})) \quad (13.2.14)$$

с базисом

$$\ddot{x}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{M}) = \{\hat{x}_{\downarrow\mathfrak{X}}(\mathfrak{M}), \hat{x}_{\uparrow\mathfrak{X}}(\mathfrak{M})\},$$

составленным из двух *средневероятных событий*

$$\hat{x}_{\downarrow\mathfrak{X}}(\mathfrak{M}) \text{ и } \hat{x}_{\uparrow\mathfrak{X}}(\mathfrak{M}) \quad (13.2.15)$$

для множеств событий

$$\{\hat{x}_{\downarrow}(\mathfrak{M}) : x \in \mathfrak{X}\} \text{ и } \{\hat{x}_{\uparrow}(\mathfrak{M}) : x \in \mathfrak{X}\},$$

которые сами составлены из *средневероятных событий*

$$\hat{x}_{\downarrow}(\mathfrak{M}) \text{ и } \hat{x}_{\uparrow}(\mathfrak{M}) \quad (13.2.16)$$

для множеств событий

$$\{x_{\downarrow}(\mu) : \mu \in \mathfrak{M}\} \text{ и } \{x_{\uparrow}(\mu) : \mu \in \mathfrak{M}\}$$

соответственно.

13.3 Структура событий в формуле расчета индивидуального пожарного риска из [9]

Рассмотрим с эвентологической точки зрения формулу¹²

$$Q = Q_{\text{п}}(1 - R_{\text{ап}})(1 - P_{\text{пз}})P_{\text{пр}}(1 - P_{\text{э}}), \quad (13.3.1)$$

предлагаемую в методике [9] для расчета величины индивидуального пожарного риска, где

- Q — расчетная величина индивидуального пожарного риска;
- $Q_{\text{п}}$ — частота возникновения пожара в здании в течение года; определяется на основании статистических данных; допускается принимать $Q_{\text{п}} = 4 \cdot 10^{-2}$ для каждого здания;
- $R_{\text{ап}}$ — вероятность эффективного срабатывания установок автоматического пожаротушения; в норме допускается принимать $R_{\text{ап}} = 0.9$;
- $P_{\text{пз}}$ — вероятность эффективной работы системы противопожарной защиты, направленной на обеспечение безопасной эвакуации людей при пожаре;
- $P_{\text{пр}}$ — вероятность присутствия людей в здании, определяемая из соотношения $P_{\text{пр}} = t_{\text{функц}}/24$, где $t_{\text{функц}}$ — время нахождения людей в здании в часах;
- $P_{\text{э}}$ — вероятность эвакуации людей.

Методика [9] предлагает считать индивидуальный пожарный риск приемлемым, если:

$$Q \leq Q^{\text{н}}, \quad (13.3.2)$$

где

- $Q^{\text{н}} = 10^{-6} \text{ год}^{-1}$ — нормативное значение величины индивидуального пожарного риска.

¹²В исходных обозначениях [9].

Эвентологическое предположение. Прежде всего эвентологически естественно предположить, что все, фигурирующие в этой формуле величины

$$Q, Q_{\Pi}, 1 - R_{\text{ап}}, 1 - P_{\text{пз}}, P_{\text{пр}}, 1 - P_{\text{э}}$$

— это вероятности, или оценки вероятностей, связанные с множеством соответствующих событий:

- (i) W — гибель субъекта от пожара в здании;
- (ii) z_{Π} — возникновение пожара в здании;
- (iii) $z_{\text{ап}}^c$ — несрабатывание установок автоматического пожаротушения;
- (vi) $z_{\text{пз}}^c$ — несрабатывание системы противопожарной защиты, обеспечивающей эвакуацию субъекта из здания;
- (iv) $z_{\text{пр}}$ — присутствие субъекта в здании;
- (v) $z_{\text{э}}^c$ — неэвакуация субъекта из здания

из алгебры \mathcal{A} всеобщего вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1) Простейший событийный взгляд на структуру зависимостей этих событий основан на следующих предположениях:

- а) событие W определяется как пересечение событий:

$$W = z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c \cap z_{\text{пр}} \cap z_{\text{э}}^c, \quad (13.3.3)$$

- б) все события из пересечения *независимы*,
- в) фигурирующие в формуле величины — это вероятности или оценки вероятностей этих событий:

$$Q = \mathbf{P}(W), \quad Q_{\Pi} = \mathbf{P}(z_{\Pi}), \quad 1 - R_{\text{ап}} = \mathbf{P}(z_{\text{ап}}^c), \\ 1 - P_{\text{пз}} = \mathbf{P}(z_{\text{пз}}^c), \quad P_{\text{пр}} = \mathbf{P}(z_{\text{пр}}), \quad 1 - P_{\text{э}} = \mathbf{P}(z_{\text{э}}^c).$$

При таких предположениях

$$\mathbf{P}(W) = \mathbf{P}(z_{\Pi})\mathbf{P}(z_{\text{ап}}^c)\mathbf{P}(z_{\text{пз}}^c)\mathbf{P}(z_{\text{пр}})\mathbf{P}(z_{\text{э}}^c)$$

— справедлива формула (13.3.1).

2) Без предположения независимости событий остаются два предположения:

- а) событие W определяется как пересечение событий:

$$W = z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c \cap z_{\text{пр}} \cap z_{\text{э}}^c, \quad (13.3.3)$$

- г) величины в формуле — это либо вероятности, либо условные вероятности перечисленных событий (или оценки этих вероятностей) следующего вида:

$$Q = \mathbf{P}(W), \quad Q_{\Pi} = \mathbf{P}(z_{\Pi}), \\ 1 - R_{\text{ап}} = \mathbf{P}(z_{\text{ап}}^c | z_{\Pi}), \quad 1 - P_{\text{пз}} = \mathbf{P}(z_{\text{пз}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c), \\ P_{\text{пр}} = \mathbf{P}(z_{\text{пр}} | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c), \quad 1 - P_{\text{э}} = \mathbf{P}(z_{\text{э}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c \cap z_{\text{пр}}).$$

Таким образом без предположения независимости

$$\mathbf{P}(W) = \mathbf{P}(z_{\Pi})\mathbf{P}(z_{\text{ап}}^c | z_{\Pi})\mathbf{P}(z_{\text{пз}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c) \times \\ \times \mathbf{P}(z_{\text{пр}} | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c) \mathbf{P}(z_{\text{э}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пр}}) \quad (13.3.4)$$

— также справедлива формула (13.3.1). Однако, хотя формула (13.3.4) и имеет вид произведения вероятностей и условных вероятностей, но ее вид существенно

определяется выбранным порядком¹³ событий в пересечении.

3) Отказ от определения события W равенством (13.3.3) оставляет одно предположение:

- г) величины в формуле — это либо вероятности, либо условные вероятности перечисленных событий (или оценки этих вероятностей) следующего вида:

$$Q = \mathbf{P}(W), \quad Q_{\Pi} = \mathbf{P}(z_{\Pi}), \\ 1 - R_{\text{ап}} = \mathbf{P}(z_{\text{ап}}^c | z_{\Pi}), \quad 1 - P_{\text{пз}} = \mathbf{P}(z_{\text{пз}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c), \\ P_{\text{пр}} = \mathbf{P}(z_{\text{пр}} | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c), \quad 1 - P_{\text{э}} = \mathbf{P}(z_{\text{э}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c \cap z_{\text{пр}}).$$

Оставшееся предположение носит чисто технический характер и сводится только к выбору порядка среди 4-х событий (iii — vi), которые образуют пересечение. Фактически рассматривается самый общий вариант структуры вероятностных зависимостей рассматриваемого множества из 6-ти событий (i — vi) без каких либо существенных ограничений.

Отметим, что из определений событий (i — vi) следует не равенство (13.3.3), а лишь включение

$$W \subseteq z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c \cap z_{\text{пр}} \cap z_{\text{э}}^c, \quad (13.3.5)$$

из которого вытекает неравенство для вероятностей

$$\mathbf{P}(W) \leq \mathbf{P}(z_{\Pi})\mathbf{P}(z_{\text{ап}}^c | z_{\Pi})\mathbf{P}(z_{\text{пз}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c) \times \\ \times \mathbf{P}(z_{\text{пр}} | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c)\mathbf{P}(z_{\text{э}}^c | z_{\Pi} \cap z_{\text{ап}}^c \cap z_{\text{пз}}^c \cap z_{\text{пр}}). \quad (13.3.6)$$

вместо равенства (13.3.4).

Однако неравенство (13.3.6) продолжает обеспечивать приемлемость величины пожарного риска в смысле неравенства (13.3.2), так как если его правая часть удовлетворяет (13.3.2), то из (13.3.5) следует, что выполняется и нормативное неравенство

$$\mathbf{P}(W) \leq Q^{\text{н}}$$

для вероятности гибели субъекта от пожара.

14 Регулярные марковские цепи и их характеристики

Рассматривается регулярная марковская цепь [2], с матрицей переходных вероятностей P , предельной матрицей $P^n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, предельным расщеплением $\alpha P = \alpha$, $\alpha = \{a_i\}$ и фундаментальной матрицей

$$Z = (I - (P - A))^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (P^n - A).$$

¹³Нетрудно заметить, что формул, эквивалентных (13.3.4), можно записать $n!$ вариантов (при $n = 4$, имеем 24 варианта), каждый из которых в произведении дает вероятность $\mathbf{P}(W)$, но состоит из различных сомножителей — вероятностей и условных вероятностей.

В этих обозначениях матрица средних времен перехода решает уравнение

$$M = P(M - M_{dg}) + E$$

и вычисляется по формуле

$$M = (I - Z + EZ_{dg})D,$$

где E — матрица из единиц; D — диагональная матрица: $D = \{1/a_i\}$; M_{dg}, Z_{dg} — диагональные матрицы, полученные из матриц M, Z занулением недиагональных элементов.

15 Заключение

Предлагаемая в работе эвентологическая гиперсценарная модель системы безопасности субъектов на предприятии имеет модульную структуру и состоит из двух основных расчетных блоков:

- эвентологическая модель расчета управления множеством барьерных событий при данном стечении событий-обстоятельств из множества заданного уровня безопасности на основе формул субъектных рисков. Эта расчетная модель применима для каждого уровня безопасности.
- эвентологическая сценарная модель расчета динамики множества событий-обстоятельств заданного уровня безопасности, основанная и включающая готовые модули детерминированных, имитационных и вероятностных сценарных моделей. Эта расчетная модель также применима для каждого уровня безопасности.

Извинения и благодарности

Автор просит извинения за возможные несоответствия обозначений в тексте, которые объясняются исключительно обилием новых понятий и терминологии, возникших совсем недавно и впервые применяющихся на практике, и заранее благодарен всем, кто сообщит ему об обнаруженных несуразностях.

Автору приятно выразить благодарность Аркадию Арсеньевичу Новоселову за неизменную настойчивую защиту своей точки зрения на семинарах по эвентологической математике, сопротивление которой помогает обнаружить верное направление, и Сергею Петровичу Амелчугову за выдвижение проблем из области пожарной безопасности, разрешение которых стимулирует развитие эвентологической теории.

Список литературы

- [1] С. П. Амелчугов, Ю. А. Андреев, С. Ю. Комаров. Оценка лесопожарных рисков. *Труды X Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):33–38, 2011.
- [2] Кемени, Дж. Дж., Снелл Дж. Л. *Конечные цепи Маркова*. Наука, М., 1970.
- [3] О. Ю. Воробьев. *Эвентология*. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с.
- [4] О. Ю. Воробьев. Эвентология безопасности. *Труды X Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):92–101, 2011.
- [5] О. Ю. Воробьев. Средневероятное событие для множества событий. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):139–147, 2012.
- [6] О. Ю. Воробьев. Эвентологический анализ систем: система событий во внесистемных обстоятельствах. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):126–130, 2012.
- [7] О. Ю. Воробьев. Совокупная система и совокупность систем: эвентологическое сходство и различие. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):131–138, 2012.
- [8] Оценка международных стандартов для безопасной разведки, добычи и транспортировки нефти и газа в Баренцевом море. Гармонизация стандартов по охране труда, промышленной безопасности и охране окружающей среды для работ в Баренцевом море. *Баренц-2020. Российско-норвежский проект. Окончательный отчет*, 2009, 139с.
- [9] Методика определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и строениях различных классов функциональной пожарной опасности. *Приложение к приказу МЧС России от 30.06.2009, №382*, 2009, 14с.

Эвентологический анализ систем: система событий во внесистемных обстоятельствах

Олег Юрьевич Воробьев

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярский государственный
торгово-экономический институт
НИИ противопожарной безопасности
Красноярск
oleg.yu.vorobyev@gmail.com

Аннотация. В рамках эвентологического системного анализа предлагается новое определение системы событий, рассматривается система событий во внесистемных обстоятельствах, а также эвентологические модели вероятностного и операционного событийного взаимодействия между системой событий и событийными обстоятельствами.

Ключевые слова. Эвентология, теория вероятностей, элементарный исход, состояние, событие, множество событий, множество состояний, свободное множество событий, свободное множество состояний, система событий, система состояний, системный базис, системная оболочка, вероятность, вероятностная зависимость, операционная зависимость, эвентологический системный анализ.

“Что? Что? Уже?.. Не может быть!”

— Конечно!..”

Анна Ахматова,
Трилистник московский, 1961–1963.

Основу эвентологического различия между понятиями *множества событий* и *системы событий* составляют два естественных вида связей между событиями (событийных взаимодействий): *вероятностные*¹ и *операционные*².

Совокупности событий, между которыми существуют только вероятностные связи называются *свободными множествами событий*, или просто³ *множествами событий*.

Совокупности событий, между которыми существуют и *вероятностные*, и *операционные* связи называются *системами событий*.

¹ *Вероятностные связи* между событиями — это вероятностная зависимость или независимость событий, определяемая вероятностью.

² *Операционные связи* между событиями — это операционная зависимость между событиями, определяемая теоретическими операциями.

³ Как это было по умолчанию принято до сих пор в эвентологии.

1 Множество событий

Напомним, что в эвентологии под конечным *множеством событий* $\mathfrak{X} \subset \mathcal{A}$, выбранных из всеобщей алгебры \mathcal{A} всеобщего вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, принято понимать информацию, которую можно извлечь из того факта, что в рамках всеобщего вероятностного пространства определены все события из множества \mathfrak{X} .

Иными словами, в эвентологии считается, что за каждым множеством \mathfrak{X} “скрывается” порожаемое им разбиение

$$\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \text{ter}(X // \mathfrak{X})$$

на террасные события

$$\text{ter}(X // \mathfrak{X}) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c \subset \Omega$$

и, разумеется, — вероятности этих террасных событий

$$p(X // \mathfrak{X}) = \mathbf{P}(\text{ter}(X // \mathfrak{X})),$$

образующие вероятностное распределение \mathfrak{X} :

$$\{p(X // \mathfrak{X}), X \subseteq \mathfrak{X}\}.$$

Таким образом, эвентологическое определение произвольного конечного множества всеобщих событий \mathfrak{X} по умолчанию включает в это понятие и порожаемое им террасное разбиение Ω , и набор вероятностей всех террасных событий из этого разбиения.

2 Свободное множество событий

До сих пор эвентологическое понятие *множества событий* всегда имело более узкий теоретический смысл, чем тот, который обычно вкладывает в это понятие теория множеств. Иногда этот узкий смысл специально оговаривался, иногда принимался в качестве естественного предположения, вытекающего из контекста, иногда просто принимался по умолчанию без всяких оговорок.

Наступил момент, когда без более аккуратного определения *множества событий*, которое является одним из центральных эвентологических понятий, стало неудобно продвигаться к новому определению понятия *системы событий*, которое естественным образом потребовалось при построении эвентологической модели системы пожарной безопасности.

Определение (свободное множество событий). Множество всеобщих событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{A}$, выбранных из алгебры всеобщих событий \mathcal{A} всеобщего вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, называется *свободным от операционной зависимости*, если никакое всеобщее событие из этого множества не может быть получено как результат некоторой теоретико-множественной операции над остальными событиями из \mathfrak{X} . В противном случае множество \mathfrak{X} называется *несвободным* множеством всеобщих событий.

Например, множество событий $\mathfrak{X} = \{x, x^c\}$ — не является *свободным*, так как второе событие получается из первого при помощи операции дополнения, или $\mathfrak{X} = \{x, y, x \cup y\}$ — *несвободное* множество событий, так как третье событие получается из первых двух операцией объединения.

До недавнего времени в эвентологии все рассматриваемые множества событий по умолчанию считались *свободными* в смысле только что данного определения. Систематическое неподчеркивание этого факта было не слишком обременительным, в силу того очевидного факта, что вероятностное распределение каждого *несвободного* множества событий всегда определяется вероятностным распределением “наименьшего” содержащегося в нем *свободного множества*, которое порождает то же разбиение Ω , что и всё данное *несвободное* множество событий.

Итак понятие *свободного множества событий* позволяет эвентологии вести речь о втором⁴ виде взаимодействия событий — *операционной зависимости или независимости*.

Если какое-то всеобщее событие $x \in \mathcal{A}$ может быть представлено как результат теоретико-

⁴Напомним, что первым видом взаимодействия событий и единственным, изучаемым в теории вероятностей, является *вероятностная зависимость или независимость* событий — взаимодействие, которое определяется исключительно вероятностью событий, а не самими событиями, как подмножествами пространства всеобщих элементарных исходов Ω .

Напомним, что два события $x, y \in \mathcal{A}$ называются (*вероятностно*) *независимыми* всякий раз, когда для их вероятностей выполнено равенство:

$$\mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y).$$

Множество событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{A}$ называется (*вероятностно*) *тотально-независимым* всякий раз, когда для каждого его подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$ выполняется аналогичное равенство вероятностей:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x).$$

множественной операции над некоторым множеством всеобщих событий $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{A}$, то говорят, что x *операционно зависит* от \mathfrak{Z} .

Если же всеобщее событие $x \in \mathcal{A}$ не может быть представлено в виде какой бы-то ни было теоретико-множественной операции над всеобщими событиями из $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{A}$, то событие x называется *операционно независимым* от множества событий \mathfrak{Z} .

3 Система событий

По сию пору эвентология обходилась без специального эвентологического определения *системы событий*, а если и использовала этот термин, то лишь в самом общем смысле.

Вместе с тем, и в теории вероятностей, и в эвентологии всегда существовали математические модели множеств событий, которые, хотя и называются иначе, но вполне пригодны для исполнения роли *систем событий* в том самом смысле, который обычно вкладывается в это понятие.

Речь идет об *алгебрах событий*, в частности, об алгебрах событий, порождаемых некоторым конечным множеством событий. Это — те самые *алгебры событий*, без которых немислима аксиоматика колмогоровской теории вероятности, а, следовательно, и — эвентологической теории. В эвентологии, как и в теории вероятностей, алгебры событий требуются в качестве готовых и удобных плацдармов, достаточных для того, чтобы на них разворачивались все мыслимые операции над множествами событиями, которые фигурируют в очередной задаче.

Только ради того, чтобы при решении каждой задачи исследователь имел под рукой такие плацдармы, колмогоровская аксиоматика требует от алгебры событий замкнутости относительно теоретико-множественных операций над событиями. Именно, это ключевое свойство алгебры позволяет исследователю всегда быть уверенным в том, что любая мыслимая теоретико-множественная операция над событиями приведет к событию из алгебры, вероятность которого аксиоматически определена.

Однако *система событий*, возникающая в той или иной задаче, не обязана быть алгеброй событий. Роль системы событий, в рамках которой и о которой ставится данная задача, скромнее и заключается лишь в том, чтобы обеспечить корректную постановку задачи на языке событий. Система событий не обязана обеспечивать плацдарм для всех возможных решений задачи об этой системе. Решение задачи заведомо выходит за пределы исходной системы, но должно принадлежать некоторой алгебре событий, в которой содержится исследуемая система событий.

В силу изложенного предлагается следующее

Определение (система событий). *Системой событий* называется совокупность событий, которые могут иметь между собой как вероятностные, так и операционные связи. *Системой событий, порожденной свободным множеством* \mathfrak{X} , называется такое подмножество $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ алгебры всеобщих событий $\mathcal{A}_{\mathfrak{X}}$, порожденной этим множеством событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{A}$, которое содержит \mathfrak{X} :

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{S}_{\mathfrak{X}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathfrak{X}}.$$

При этом свободное множество \mathfrak{X} называется *базисом системы* $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$, а события системы, которые не принадлежат \mathfrak{X} , образуют множество событий

$$\sigma_{\mathfrak{X}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X},$$

называемое *оболочкой системы* $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$.

Базис $\mathfrak{X} \subset \mathcal{A}$ системы событий $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ выбирается субъектом из *всеобщей алгебры* \mathcal{A} *всеобщего вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. *Оболочка* $\sigma_{\mathfrak{X}} \subset \mathcal{A}$ системы событий $\mathcal{S}_{\mathfrak{X}}$ также выбирается субъектом из алгебры \mathcal{A} и выражает те операционные связи между событиями системы, которые субъект включает в свою эвентологическую модель данного конкретного бытия — данную *систему событий*.

Таким образом, в работе предлагается новое эвентологическое понятие *системы событий*, которое шире того понятия *множества событий*, которое до недавнего времени использовалось в эвентологии и о котором в смысле нового определения корректнее говорить, как о *свободном множестве событий*, иными словами, как о совокупности событий, которые *свободны от операционных связей*.

Пример. В качестве примера приведем *систему пожароопасных событий* для множества объектов \mathfrak{X} , предложенную в [1], которая в каждый момент $n = 0, 1, \dots$ имеет вид совокупности из девяти событий

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\hat{\mathfrak{X}}_n} &= \{x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, x_n, x_n^{(3)}, x_n^{(4)} : x \in \mathfrak{X}\} + \\ &+ \{x_n^{(0)} \cup x_n, x_n^{(1)} \cup x_n, x_n^{(3)} \cup x_n, x_n^{(4)} \cup x_n : x \in \mathfrak{X}\} = \\ &= \hat{\mathfrak{X}}_n + \sigma_{\hat{\mathfrak{X}}_n}, \end{aligned}$$

которая составлена из *базиса системы* — свободного множества из пяти пожароопасных событий $\hat{\mathfrak{X}}_n$, и *системной оболочки* — $\sigma_{\hat{\mathfrak{X}}_n}$, состоящей из четырех событийных рисков, определяемых как результаты операции объединения соответствующих пожароопасных событий из системного базиса.

4 Событийная фигура на событийном фоне

Воспользовавшись известной аналогией с “фигурой и фоном”, взглянем на множество и систему событий при стечениях соответственно внемножественных и внесистемных обстоятельств с эвентологической точки зрения.

4.1 Множество событий при стечении внемножественных обстоятельств

Односторонний взгляд. Отношение структур вероятностных зависимостей любых двух непересекающихся множеств событий \mathfrak{X} (множество событий) и $2^{\mathfrak{Z}}$ (внемножественные обстоятельства) определяет функцию

$$f : 2^{\mathfrak{Z}} \rightarrow 2^{\mathfrak{X}}$$

следующим образом для $Z \subseteq \mathfrak{Z}$

$$f(Z) = \{x \in \mathfrak{X} : x \cap \text{ter}(Z//\mathfrak{Z}) \neq \emptyset\} \subseteq \mathfrak{X},$$

и наоборот, определяет функцию

$$f^* : 2^{\mathfrak{X}} \rightarrow 2^{\mathfrak{Z}}$$

аналогичным образом для $X \subseteq \mathfrak{X}$

$$f^*(X) = \{z \in \mathfrak{Z} : z \cap \text{ter}(X//\mathfrak{X}) \neq \emptyset\} \subseteq \mathfrak{Z},$$

Возникает вопрос: можно ли и как выразить функции f и f^* друг через друга?

Двойственный взгляд. На любую пару непересекающихся конечных множеств событий $\mathfrak{X}, \mathfrak{Z} \subseteq \mathcal{A}$ можно взглянуть, по крайней мере, двояко:

- 1) \mathfrak{X} — “основное” множество событий;

\mathfrak{Z} — внемножественные для \mathfrak{X} обстоятельства (“вспомогательное” множество событий), при стечении которых случается \mathfrak{X} ;

- 2) \mathfrak{Z} — “основное” множество событий;

\mathfrak{X} — внемножественные для \mathfrak{Z} обстоятельства (“вспомогательное” множество событий), при стечении которых случается \mathfrak{Z} .

Иначе говоря, в терминах “фигуры” и “фона”:

- 1) \mathfrak{X} — событийная “фигура”;

\mathfrak{Z} — событийный “фон”;

- 2) \mathfrak{Z} — событийная “фигура”;

\mathfrak{X} — событийный “фон”.

Ясно, что каждая пара “фигура-фон” двойственна: любая “фигура” может сыграть двойственную роль “фона”, на котором ее прежний “фон” превратится в “фигуру”.

Матрично-террасное представление. Пусть

$$\text{terr}(\mathfrak{X}) = \{\text{ter}(X//\mathfrak{X}) : X \subseteq \mathfrak{X}\}$$

— совокупность всех террасных событий, порождаемых множеством событий \mathfrak{X} , а

$$\text{terr}_+(\mathfrak{X}) = \{\text{ter}(X//\mathfrak{X}) : X \subseteq \mathfrak{X}, \text{ter}(X//\mathfrak{X}) \neq \emptyset\}$$

— совокупность всех непустых террасных событий, порождаемых множеством событий \mathfrak{X} . Пусть, наконец,

$$\text{terr}_+(\mathfrak{X} + \mathcal{Z}) = \{\text{ter}(X + Z // \mathfrak{X} + \mathcal{Z}) : X \subseteq \mathfrak{X}, Z \subseteq \mathcal{Z}, \text{ter}(X + Z // \mathfrak{X} + \mathcal{Z}) \neq \emptyset\}$$

— совокупность всех непустых террасных событий, совместно порождаемых множествами событий \mathfrak{X} и \mathcal{Z} .

Функции, характеризующие операционные связи между множествами событий \mathfrak{X} и \mathcal{Z} , имеют вид:

$$f_{\mathfrak{X}, \mathcal{Z}}(Z) = \bigcap_{X: \text{ter}(X+Z // \mathfrak{X} + \mathcal{Z}) \neq \emptyset} X,$$

Пусть

$$f_{\mathcal{Z}, \mathfrak{X}}^*(X) = \bigcap_{Z: \text{ter}(X+Z // \mathfrak{X} + \mathcal{Z}) \neq \emptyset} Z.$$

Справедливо включение

$$\text{terr}_+(\mathfrak{X} + \mathcal{Z}) \subseteq \{\text{ter}(X + Z // \mathfrak{X} + \mathcal{Z}) : (X, Z) \in \text{terr}_+(\mathfrak{X}) \times \text{terr}_+(\mathcal{Z})\}$$

— множества всех непустых террасных событий $\text{terr}_+(\mathfrak{X} + \mathcal{Z})$, совместно порождаемых множествами событий \mathfrak{X} и \mathcal{Z} , в “матрицу” террасных событий, множеством непустых элементов которой и является множество $\text{terr}_+(\mathfrak{X} + \mathcal{Z})$.

4.2 Система событий при стечении внесистемных обстоятельств

Каждая система событий случается при стечении *внесистемных обстоятельств, ситуаций и условий*, эвентологической моделью которых служат террасные события, порожденные некоторой *внесистемной* (по отношению к данной системе событий) *совокупностью событий*.

Система событий выделяется субъектом в результате событийного субъектного отстранения от внесистемных террасных событий. Террасные события, при стечении которых случается для субъекта система событий, создают для субъекта внесистемный фон обстоятельств, ситуаций и условий, на котором разворачивается выделенное им *системное событие*.

Наступление этих *внесистемных* террасных событий *операционно влияет и изменяет* как содержание *системного базиса*, так и содержание *системной оболочки*, заставляя их “пробегать” от обстоятельства к обстоятельству, вообще говоря, любые подмножества, соответственно, базиса и оболочки исходной системы.

Данное операционное влияние внесистемных террасных событий, порожденных некоторой внесистемной совокупностью событий \mathcal{Z} , на систему событий

$\mathcal{A}_{\mathfrak{X}}$ может быть эвентологически описано с помощью функции

$$f : 2^{\mathcal{Z}} \rightarrow 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{(\sigma_{\mathfrak{X}})},$$

которая сопоставляет каждому подмножеству $Z \subseteq \mathcal{Z}$ пару подмножеств $(X, \sigma_X) \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{(\sigma_{\mathfrak{X}})}$:

$$f(Z) = (X, \sigma_X),$$

первое из которых $X \subseteq \mathfrak{X}$ определяет системный базис, а второе $\sigma_X \subseteq \sigma_{\mathfrak{X}}$ — системную оболочку подсистемы событий

$$\mathcal{S}_X = X + \sigma_X \subseteq \mathfrak{X} + \sigma_{\mathfrak{X}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{X}},$$

которая случается при наступлении внесистемного террасного события

$$\text{ter}(Z // \mathcal{Z}) = \bigcap_{z \in Z} z \bigcap_{z \in \mathcal{Z}^c} z^c \subset \Omega.$$

Пример. Приведем коротко пример трех однородных систем событий, которые предложены нами в [2] в качестве моделей трех основных событийных фигурантов эвентологической системы безопасности:

- *совокупного субъекта*

$$\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \{\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\downarrow}, \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\uparrow}\} + \text{terr} \left(\{\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\downarrow}, \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\uparrow}\} \right),$$

- *совокупного барьера*

$$\hat{b}_{\mathfrak{B}} = \{\hat{b}_{\mathfrak{B}}^{\downarrow}, \hat{b}_{\mathfrak{B}}^{\uparrow}\} + \text{terr} \left(\{\hat{b}_{\mathfrak{B}}^{\downarrow}, \hat{b}_{\mathfrak{B}}^{\uparrow}\} \right),$$

- *совокупного объекта*

$$\hat{x}_{\mathfrak{X}} = \{\hat{x}_{\mathfrak{X}}^{\downarrow}, \hat{x}_{\mathfrak{X}}^{\uparrow}\} + \text{terr} \left(\{\hat{x}_{\mathfrak{X}}^{\downarrow}, \hat{x}_{\mathfrak{X}}^{\uparrow}\} \right).$$

Каждый из трех событийных фигурантов представляет из себя систему событий одного и того же рода, которая определяется базисом — дуэтом событий, и оболочкой — террасным разбиением, порожденным этим базисом. Например, системным базисом совокупного субъекта

$$\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \beta_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow} + \sigma_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow}$$

служит дуэтом событий

$$\beta_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow} = \{\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\downarrow}, \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\uparrow}\} \subset \mathcal{A},$$

а системной оболочкой — террасное разбиение Ω :

$$\sigma_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow} = \text{terr} \left(\beta_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow} \right) = \{\text{ter}(Y // \beta_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow}) : \beta_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow}\},$$

порожденное системным базисом $\beta_{\mathfrak{M}}^{\downarrow\uparrow}$.

В рассматриваемой модели системы безопасности каждый из событийных фигурантов действует на фоне двух других под управлением их совместного

эвентологического распределения, характеризующего всю систему безопасности

$$\widehat{\mu\dot{b}\dot{x}}_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}} = \beta_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow} + \sigma_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow},$$

определяемую *системным базисом* — шестиэлементом событий

$$\beta_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow} = \left\{ \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\downarrow}, \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^{\uparrow}, \widehat{b}_{\mathfrak{B}}^{\downarrow}, \widehat{b}_{\mathfrak{B}}^{\uparrow}, \widehat{x}_{\mathfrak{X}}^{\downarrow}, \widehat{x}_{\mathfrak{X}}^{\uparrow} \right\} \subset \mathcal{A}$$

и *системной оболочкой*

$$\sigma_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow} = \text{terr} \left(\beta_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow} \right) = \left\{ \text{ter} \left(Y // \beta_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow} \right) : Y \subseteq \beta_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow} \right\}$$

— террасным разбиением⁵ Ω , порожденным системным базисом $\beta_{\mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{X}}^{\downarrow\uparrow}$.

Список литературы

- [1] О. Ю. Воробьев. Эвентология безопасности. *Труды X Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):92–101, 2011.
- [2] О. Ю. Воробьев. Эвентологический системный анализ безопасности. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):в этой книге, 2012.

⁵ Диаграмму Венна этого террасного разбиения можно увидеть в [2].

Совокупная система и совокупность систем: эвентологическое сходство и различие

Олег Юрьевич Воробьев

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярский государственный
торгово-экономический институт
НИИ противопожарной безопасности
Красноярск
oleg.yu.vorobyev@gmail.com

Аннотация. Предлагается эвентологическая модель совокупной системы, наследующей событийную структуру каждой системы из порождающей совокупности, которая опирается на новое эвентологическое понятие средневероятного события для множества событий [3].

Ключевые слова. Эвентология, теория вероятностей, событие, множество событий, свободное множество событий, система событий, системный базис, системная оболочка, вероятность, средневероятное событие, средневероятное разбиение.

Много в одном.

Эвентология [1], расширяя свои применения, осваивает территории новых эвентологических моделей. В области эвентологического системного анализа [4] одно из последних приобретений — понятие *совокупной системы событий*, которое отличается от очевидного понятия *совокупности систем событий* тем, что является ее эвентологически естественной аппроксимацией, наследующей событийную структуру составляющих ее однородных систем событий.

Для освоения понятия *совокупной системы событий* сначала предлагается определить совокупную систему событий, порождаемую совокупностью однородных *однособытийных систем*, и показать, что наиболее простой и естественной математической моделью такой совокупной системы служит *однособытийная система с базисом из средневероятного события* и оболочкой из дополнения этого *средневероятного события*, понятие которого впервые введено в [3].

Затем предлагается общее понятие *совокупной системы событий*, порождаемой совокупностью однородных *многособытийных систем*, а в качестве ее математической модели — *многособытийная система с базисом из множества средневероятных событий* и оболочкой из *средневероятного разбиения* [3], порожденного этим системным базисом.

Освоение нового понятия *совокупной системы событий* сопровождается примерами разной сложности.

1 Определения и обозначения

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — всеобщее вероятностное пространство [2, 6], а $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ — конечная совокупность всеобщих событий.

1) Каждому $\mu \in \mathfrak{M}$ сопоставляется так называемая *однособытийная система*

$$\dot{\mu} = \{\mu\} + \{\mu^c\}, \quad (1)$$

порождаемая *базисом* — моноплетом

$$\{\mu\} \subset \mathcal{A},$$

состоящим из одного события $\mu \subset \Omega$ — и *оболочкой* — моноплетом

$$\{\mu^c\} \subset \mathcal{A},$$

состоящим только из дополнения $\mu^c = \Omega - \mu$. Обозначим

$$\dot{\mathfrak{M}} = \{\dot{\mu} : \mu \in \mathfrak{M}\} \quad (2)$$

— *совокупность однородных однособытийных систем*, порождаемую множеством событий \mathfrak{M} .

2) Каждому $\mu \in \mathfrak{M}$ сопоставляется также так называемая *многособытийная система*

$$\ddot{\mu} = \bar{\mu} + \text{terr}\{\bar{\mu}\}, \quad (3)$$

состоящая из *базиса* — n -набора событий

$$\bar{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathcal{A},$$

и *оболочки* — террасного разбиения

$$\text{terr}\{\bar{\mu}\} = \{\text{ter}(Y/\bar{\mu}), Y \subseteq \bar{\mu}\} \subset \mathcal{A},$$

порожденного n -набором $\bar{\mu}$. Обозначим

$$\ddot{\mathfrak{M}} = \{\ddot{\mu} : \mu \in \mathfrak{M}\} \quad (4)$$

— *совокупность однородных многособытийных систем*, порождаемую множеством событий \mathfrak{M} .

2 Совокупная однособытийная система

Наша цель — взглянуть на \mathfrak{M} , как на *совокупную однособытийную систему*, порождаемую тем, что называется неким одним *совокупным событием*. Если это *совокупное событие* обозначить, например, $\mu_{\mathfrak{M}} \subset \Omega$, то в этих обозначениях речь идет о *совокупной однособытийной системе*

$$\dot{\mu}_{\mathfrak{M}} = \{\mu_{\mathfrak{M}}\} + \{\mu_{\mathfrak{M}}^c\}, \quad (5)$$

которая “наследует” событийную структуру однородных однособытийных систем $\dot{\mu} \in \mathfrak{M}$, составляющих данную совокупность \mathfrak{M} , и подчиняется *совокупному эвентологическому распределению* (*Э-распределению*) того же рода, что и однособытийные системы $\dot{\mu} \in \mathfrak{M}$.

Можно сказать, что тем самым *совокупность однособытийных систем* \mathfrak{M} аппроксимируется одной *совокупной однособытийной системой* $\dot{\mu}_{\mathfrak{M}}$, которая порождается базисом $\{\mu_{\mathfrak{M}}\}$, состоящим из одного *совокупного события* $\mu_{\mathfrak{M}}$, и оболочкой $\{\mu_{\mathfrak{M}}^c\}$, состоящей из одного *совокупного события* $\mu_{\mathfrak{M}}^c = \Omega - \mu_{\mathfrak{M}}$, где *совокупные события* $\mu_{\mathfrak{M}}$ и $\mu_{\mathfrak{M}}^c$ определяются множеством событий \mathfrak{M} .

Мы собираемся показать, что *совокупное событие* совпадает со *средневероятным событием* для множества событий \mathfrak{M} :

$$\mu_{\mathfrak{M}} = \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}. \quad (6)$$

Иначе говоря, показать, что наиболее простой и естественной математической моделью *совокупного события*¹ $\mu_{\mathfrak{M}}$ служит понятие *средневероятного события* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ для *множества событий* \mathfrak{M} , которое впервые введено в [3]. Это позволит определить *совокупную однособытийную систему* для *множества однособытийных систем* \mathfrak{M} как систему событий

$$\dot{\mu}_{\mathfrak{M}} = \{\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}\} + \{\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c\}, \quad (7)$$

порождаемую *средневероятным событием* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$.

Напомним, что в [3] *средневероятное событие* для \mathfrak{M} определено как всеобщее событие $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{A}$, которое происходит со средней вероятностью

$$\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu) \quad (8)$$

и удовлетворяет включениям

$$\sum_{|Y| > m} \text{ter}(Y // \mathfrak{M}) \subseteq \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subseteq \sum_{|Y| \geq m} \text{ter}(Y // \mathfrak{M}), \quad (8')$$

¹На *совокупное событие* $\mu_{\mathfrak{M}}$, можно также взглянуть как на однособытийную аппроксимацию *суперпозиционного события*, эквивалентного террасному разбиению Ω , порожденному множеством событий \mathfrak{M} и его Э-распределением. Понятие *суперпозиционного события* предполагается рассмотреть в следующих работах.

где целое $m \in \{0, 1, \dots, |\mathfrak{M}|\}$ таково, что

$$\sum_{|Y| > m} p(Y // \mathfrak{M}) < \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) \leq \sum_{|Y| \geq m} p(Y // \mathfrak{M}). \quad (8'')$$

2.1 Совокупное однособытийное эвентологическое распределение множества событий

Известно [4], что Э-распределение системы событий

$$\widehat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} + \sigma(\mathfrak{M}),$$

порожденной базисом \mathfrak{M} и оболочкой $\sigma(\mathfrak{M})$, определяется как Э-распределение системного базиса \mathfrak{M} . Поэтому, определение Э-распределения совокупной однособытийной системы

$$\dot{\mu}_{\mathfrak{M}} = \{\mu_{\mathfrak{M}}\} + \{\mu_{\mathfrak{M}}^c\} \quad (9)$$

эквивалентно определению Э-распределения *совокупного события* $\mu_{\mathfrak{M}}$.

Мы начнем с определения Э-распределения совокупной однособытийной системы $\dot{\mu}_{\mathfrak{M}}$, которое назовем *совокупным однособытийным Э-распределением множества событий* \mathfrak{M} . И только после этого определим само *совокупное событие* $\mu_{\mathfrak{M}}$ так, чтобы оно подчинялось этому однособытийному Э-распределению.

*Совокупное однособытийное Э-распределение множества*² *событий* \mathfrak{M} определяется как однособытийное Э-распределение

$$(\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}), \mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}^c)), \quad (9)$$

вероятности которого определяются формулами:

$$\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}) = \sum_{Y \subseteq \mathfrak{M}} \frac{|Y|}{|\mathfrak{M}|} p(Y // \mathfrak{M}), \quad (10)$$

$$\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}^c) = \sum_{Y \subseteq \mathfrak{M}} \left(1 - \frac{|Y|}{|\mathfrak{M}|}\right) p(Y // \mathfrak{M}) = 1 - \mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}), \quad (10')$$

где для $Y \subseteq \mathfrak{M}$

$$p(Y // \mathfrak{M}) = \mathbf{P}(\text{ter}(Y // \mathfrak{M}))$$

— вероятности террасных событий

$$\text{ter}(Y // \mathfrak{M}) = \bigcap_{\mu \in Y} \mu \bigcap_{\mu \in Y^c} \mu^c,$$

$$\mu^c = \Omega - \mu, Y^c = \mathfrak{M} - Y.$$

²Под *множеством событий* всегда по умолчанию, если не оговорено противное, подразумевается *свободное* множество событий. Напомним: множество событий называется *свободным*, если никакое его событие не может быть получено из других его событий при помощи теоретико-множественных операций. Несвободные множества событий обычно называются *системами событий*.

2.2 Простые примеры совокупных однособытийных Э-распределений

Рассмотрим всеобщее вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и разбиение

$$\mathfrak{M}^* = \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\} \subset \mathcal{A}$$

пространства всеобщих элементарных исходов Ω на пять фрагментов:

$$\Omega = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}^*} \mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4.$$

Пусть

$$\mathbf{P}(\mu_1) = \mathbf{P}(\mu_2) = \mathbf{P}(\mu_3) = \mathbf{P}(\mu_4) = \alpha,$$

где

$$4\alpha < 1,$$

тогда

$$\mathbf{P}(\mu_0) = 1 - 4\alpha.$$

Рассмотрим простые примеры различных совокупных однособытийных систем, порождающих одно и то же разбиение пространства всеобщих элементарных исходов. Для этого сконструируем из фрагментов разбиения \mathfrak{M}^* такие три различные системы событий, что хотя одна из них имеет базис из непересекающихся равновероятных событий, другая — базис из вложенных событий, а третья — базис из пересекающихся равновероятных событий, но каждая из этих трех систем порождает одно и то же разбиение Ω , совпадающее с \mathfrak{M}^* .

2.2.1 Непересекающиеся события

Пусть

$$\mathfrak{M} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\} \subset \mathcal{A}$$

— множество из 4-х непересекающихся равновероятных событий, каждое $\mu \in \mathfrak{M}$ из которых имеет Э-распределение

$$(\alpha, 1 - \alpha) = (\mathbf{P}(\mu), \mathbf{P}(\mu^c)).$$

Множество событий \mathfrak{M} разбивает Ω на 5 непустых террасных событий, которые образуют разбиение

$$\Omega = \text{ter}(\emptyset // \mathfrak{M}) + \sum_{i=1}^4 \text{ter}(\{\mu_i\} // \mathfrak{M}),$$

совпадающее с \mathfrak{M}^* . Действительно,

$$\mu_0 = \bigcap_{i=1}^4 \mu_i^c = \text{ter}(\emptyset // \mathfrak{M}),$$

$$\mu_i = \text{ter}(\{\mu_i\} // \mathfrak{M}), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Совокупная однособытийная система, порожденная \mathfrak{M} , имеет следующие Э-распределения ω -состояний:

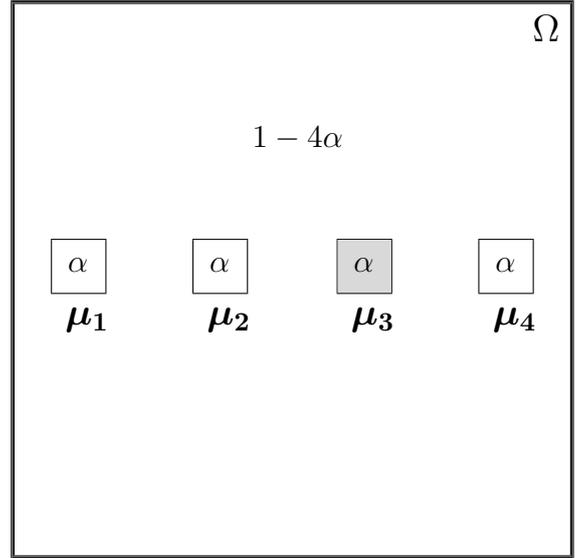


Рис. 1: Диаграмма Венна множества $\mathfrak{M} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ из 4-х непересекающихся равновероятных событий, разбивающее Ω на пять террасных событий, наступающих с вероятностями $\alpha, \alpha, \alpha, \alpha$ и $1 - 4\alpha$ соответственно. Каждое из 4-х событий имеет одно и то же Э-распределение $(\mathbf{P}(\mu_m), 1 - \mathbf{P}(\mu_m)) = (\alpha, 1 - \alpha), m = 1, 2, 3, 4$. Совокупное Э-распределение \mathfrak{M} имеет тот же вид: $(\alpha, 1 - \alpha)$. Одно из многих средневероятных событий $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \mu_3$ состоит из террасных событий, выделенных темным цветом.

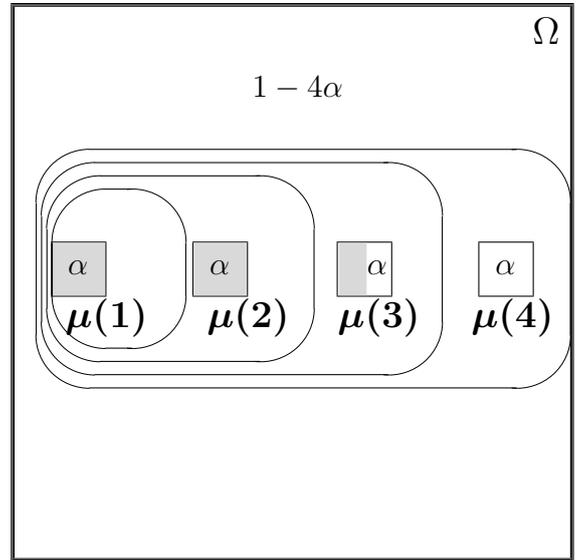


Рис. 2: Диаграмма Венна множества $\mathfrak{M} = \{\mu(1), \mu(2), \mu(3), \mu(4)\}$ из 4-х вложенных равновероятных событий, разбивающее Ω на пять террасных событий, наступающих с вероятностями $\alpha, \alpha, \alpha, \alpha$ и $1 - 4\alpha$ соответственно. Эти 4-е события имеют Э-распределения $(\mathbf{P}(\mu_m), 1 - \mathbf{P}(\mu_m)) = (m\alpha, 1 - m\alpha), m = 1, 2, 3, 4$. Совокупное Э-распределение \mathfrak{M} имеет “средний” вид: $(\alpha 5/2, 1 - \alpha 5/2)$. Одно из многих средневероятных событий $\mu(2) \subset \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subset \mu(3)$ состоит из террасных событий и их частей, выделенных темным цветом.

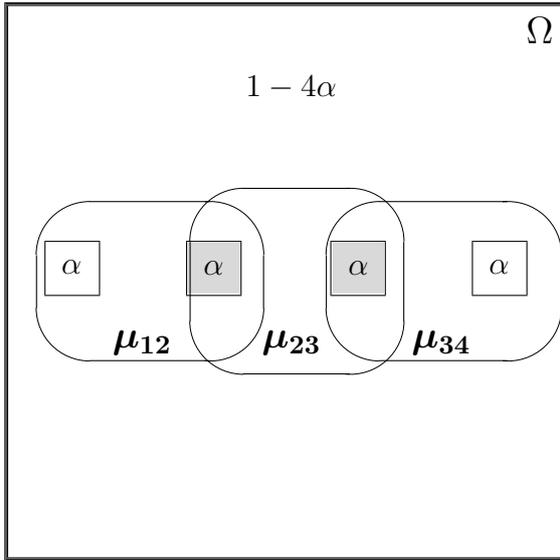


Рис. 3: Диаграмма Венна множества $\mathfrak{M} = \{\mu_{12}, \mu_{34}, \mu_{23}\}$ из 3-х пересекающихся равновероятных событий, разбивающее Ω на пять террасных событий, наступающих с вероятностями $\alpha, \alpha, \alpha, \alpha$ и $1-4\alpha$ соответственно. Каждое из 3-х событий имеет одно и то же \mathfrak{E} -распределение $(\mathbf{P}(\mu), 1 - \mathbf{P}(\mu)) = (2\alpha, 1 - 2\alpha)$. Совокупное \mathfrak{E} -распределение \mathfrak{M} имеет тот же вид: $(2\alpha, 1 - 2\alpha)$. Единственное средневоятное событие $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \mu_{23}$ состоит из террасных событий, выделенных темным цветом.

- $(1/4, 1 - 1/4)$, если $\omega \in \mu$ при $\mu \in \mathfrak{M}$,
- $(0, 1)$, если $\omega \in \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu^c$.

По формуле полной вероятности получаем среднее \mathfrak{E} -распределение совокупной однособытийной системы в виде

$$\left(\sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \alpha/4, \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} (1 - 1/4)\alpha + 1 - 4\alpha \right) = (\alpha, 1 - \alpha).$$

Таким образом, среднее \mathfrak{E} -распределение (рис. 1)

$$(\alpha, 1 - \alpha)$$

совокупной однособытийной системы, порождаемой множеством \mathfrak{M} непересекающихся равновероятных событий, повторяет \mathfrak{E} -распределение каждого события $\mu \in \mathfrak{M}$.

2.2.2 Вложенные события

Пусть

$$\mathfrak{M} = \{\mu(1), \mu(2), \mu(3), \mu(4)\} \subset \mathcal{A}$$

— множество из 4-х вложенных событий, где

$$\mu(1) \subset \mu(2) \subset \mu(3) \subset \mu(4)$$

— события, сконструированные из фрагментов разбиения \mathfrak{M}^* следующим образом для $m = 1, \dots, 4$

$$\mu(m) = \sum_{i=1}^m \mu_i.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\mu(m)) = m\alpha.$$

и события $\mu(m)$ имеют \mathfrak{E} -распределения

$$(m\alpha, 1 - m\alpha)$$

для $m = 1, 2, 3, 4$.

Не трудно проверить, что множество событий \mathfrak{M} разбивает Ω на 5 непустых террасных событий, которые образуют разбиение, также совпадающее с \mathfrak{M}^* .

Однако совокупная однособытийная система, порожденная множеством \mathfrak{M} вложенных событий, имеет другие \mathfrak{E} -распределения ω -состояний:

- $(1, 0)$, если $\omega \in \mu_1$,
- $(1 - 1/4, 1/4)$, если $\omega \in \mu_2$,
- $(1 - 2/4, 2/4)$, если $\omega \in \mu_3$,
- $(1 - 3/4, 3/4)$, если $\omega \in \mu_4$,
- $(0, 1)$, если $\omega \in \mu_0$.

Для этих \mathfrak{E} -распределения ω -состояний можно записать простую общую формулу:

$$\left(1 - (m - 1)/4, (m - 1)/4 \right),$$

если $\omega \in \mu_m$, $m = 1, \dots, 5$, если формально считать, что $\mu_5 = \mu_0$.

Далее по формуле полной вероятности получаем, что среднее \mathfrak{E} -распределение совокупной однособытийной системы состоит из двух вероятностей (рис. 2):

$$\sum_{m=1}^4 \alpha(1 - (m - 1)/4) = \alpha 5/2,$$

$$\sum_{m=2}^4 \alpha(m - 1)/4 + 1 - 4\alpha = 1 - \alpha 5/2,$$

и имеет вид:

$$\left(\alpha 5/2, 1 - \alpha 5/2 \right).$$

Таким образом, совокупная однособытийная система, порождаемая множеством \mathfrak{M} вложенных событий, имеет среднее \mathfrak{E} -распределение, которое можно считать “средним” среди \mathfrak{E} -распределений событий из \mathfrak{M} .

2.2.3 Пересекающиеся события

Пусть

$$\mathfrak{M} = \{\mu_{12}, \mu_{34}, \mu_{13}\} \subset \mathcal{A}$$

— множество из 3-х пересекающихся равновероятных событий, сконструированные из фрагментов разбиения \mathfrak{M}^* следующим образом:

$$\mu_{12} = \mu_1 + \mu_2,$$

$$\mu_{34} = \mu_3 + \mu_4,$$

$$\mu_{13} = \mu_1 + \mu_3.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\mu_{12}) = \mathbf{P}(\mu_{12}) = \mathbf{P}(\mu_{12}) = 2\alpha.$$

и эти три события имеют \mathfrak{E} -распределение

$$(2\alpha, 1 - 2\alpha).$$

Не трудно проверить, что и в этом примере множество событий \mathfrak{M} разбивает Ω на 5 непустых террасных событий, которые образуют разбиение, также совпадающее с \mathfrak{M}^* .

Однако совокупная однособытийная система, порожденная множеством \mathfrak{M} вложенных событий, имеет другие \mathfrak{E} -распределения ω -состояний:

- $(2/3, 1 - 2/3)$, если $\omega \in \mu_1 + \mu_3$,
- $(1/3, 1 - 1/3)$, если $\omega \in \mu_2 + \mu_4$,
- $(0, 1)$, если $\omega \in \mu_0$.

Далее по формуле полной вероятности получаем, что среднее \mathfrak{E} -распределение совокупной однособытийной системы состоит из двух вероятностей (рис. 3):

$$\left((2/3 + 1/3)2\alpha, (1/3 + 2/3)2\alpha + 1 - 4\alpha \right)$$

и имеет вид:

$$(2\alpha, 1 - 2\alpha).$$

Таким образом, совокупная однособытийная система, порождаемой множеством \mathfrak{M} пересекающихся равновероятных событий, повторяет \mathfrak{E} -распределение каждого события $\mu \in \mathfrak{M}$.

2.3 Примеры совокупных однособытийных \mathfrak{E} -распределений

Рассмотрим всеобщее вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и разбиение пространства всеобщих элементарных исходов

$$\Omega = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}^*} \mu,$$

где $\mathfrak{M}^* \subset \mathcal{A}$.

Пусть $|\mathfrak{M}^*| = 2^N$. Обозначим

$$\mathfrak{M}^* = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2^N-1}\},$$

$$\mathfrak{M}' = \{\mu_1, \dots, \mu_{2^N-1}\},$$

так что

$$\mathfrak{M}^* = \{\mu_0\} + \mathfrak{M}'.$$

Будем также считать, что все фрагменты разбиения $\mu \in \mathfrak{M}^*$ равновероятны:

$$\mathbf{P}(\mu) = 1/2^N.$$

Сконструируем из фрагментов разбиения \mathfrak{M}^* такие три различные системы событий, что хотя одна из них имеет базис из непересекающихся событий, другая — базис из вложенных событий, а третья — базис из totally независимых событий, но каждая из этих трех систем порождает одно и то же разбиение Ω , которое совпадает с \mathfrak{M}^* .

2.3.1 Непересекающиеся события

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \subset \mathcal{A}$ — множество из $M = 2^N - 1$ непересекающихся событий, наступающих с одинаковой вероятностью $\alpha = 1/2^N$:

$$\alpha = \mathbf{P}(\mu), \mu \in \mathfrak{M}.$$

Множество событий \mathfrak{M} разбивает Ω на $M + 1$ террасное событие

$$\Omega = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu^c + \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu.$$

Совокупная однособытийная система, порожденная \mathfrak{M} , имеет следующие \mathfrak{E} -распределения ω -состояний:

- $(1/M, 1 - 1/M)$, если $\omega \in \mu$ при $\mu \in \mathfrak{M}$,
- $(0, 1)$, если $\omega \in \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu^c$.

По формуле полной вероятности получаем среднее \mathfrak{E} -распределение совокупной однособытийной системы событий в виде

$$\left(\sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \alpha/M, \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} (1 - 1/M)\alpha + 1 - M\alpha \right) = (\alpha, 1 - \alpha).$$

Таким образом, среднее \mathfrak{E} -распределение

$$(1/2^N, 1 - 1/2^N)$$

совокупной однособытийной системы событий, порождаемой множеством \mathfrak{M} непересекающихся равновероятных событий, повторяет \mathfrak{E} -распределение каждого события $\mu \in \mathfrak{M}$.

2.3.2 Вложенные события

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{A}$ — множество из $M = 2^N - 1$ вложенных событий, такое что

$$\mathfrak{M} = \{\mu(1), \dots, \mu(M)\},$$

где

$$\mu(1) \subset \mu(2) \subset \dots \subset \mu(M)$$

— события, сконструированные из фрагментов разбиения \mathfrak{M}^* следующим образом для $m = 1, \dots, M$

$$\mu(m) = \sum_{i=1}^m \mu_i.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\mu(m)) = m\alpha = m/2^N.$$

Не трудно проверить, что множество событий \mathfrak{M} разбивает Ω на такие же террасные события, как и в примере с непересекающимися событиями.

Однако, хотя террасная структура повторяет структуру из примера с непересекающимися событиями, совокупная однособытийная система, порожденная множеством \mathfrak{M} вложенных событий, имеет другие \mathcal{E} -распределения ω -состояний:

- $(1, 0)$, если $\omega \in \mu_1$,
- $(1 - 1/M, 1/M)$, если $\omega \in \mu_2 - \mu_1$,
- ...
- $(1 - (m - 1)/M, (m - 1)/M)$, если $\omega \in \mu_m - \mu_{m-1}$,
- ...
- $(1/M, 1 - 1/M)$, если $\omega \in \mu_M - \mu_{M-1}$,
- $(0, 1)$, если $\omega \in \mu_M^c$.

Для этих \mathcal{E} -распределения ω -состояний можно записать простую общую формулу:

$$\left(1 - (m - 1)/M, (m - 1)/M\right),$$

если $\omega \in \mu_m - \mu_{m-1}$, $m = 1, \dots, M + 1$ и формально считать, что $\mu_{M+1} = \Omega$.

Далее по формулам полной вероятности получаем, что среднее \mathcal{E} -распределение совокупной однособытийной системы состоит из двух вероятностей:

$$\sum_{m=1}^M \alpha(1 - (m - 1)/M) = \alpha(M + 1)/2,$$

$$\sum_{m=2}^M \alpha(m - 1)/M + 1 - M\alpha = 1 - \alpha(M + 1)/2,$$

и имеет вид:

$$\left(\alpha(M + 1)/2, 1 - \alpha(M + 1)/2\right).$$

Таким образом, совокупная однособытийная система, порождаемая множеством \mathfrak{M} вложенных событий, имеет среднее \mathcal{E} -распределение³

$$(1/2, 1/2),$$

повторяющее \mathcal{E} -распределение события

$$\mu(2^{N-1}) \in \mathfrak{M},$$

которое можно считать “средним” среди \mathcal{E} -распределений событий из \mathfrak{M} .

³Поскольку $\alpha = 1/2^N$, а $M + 1 = 2^N$.

2.3.3 Независимые события

Рассмотрим N тотально независимых событий, которые образуют множество \mathfrak{M} , разбивающее Ω на 2^N террасных событий:

$$\Omega = \sum_{Y \subseteq \mathfrak{M}} \text{ter}(Y//\mathfrak{M}).$$

Пусть каждое из тотально независимых событий множества \mathfrak{M} наступает с вероятностью $1/2$, тогда все террасные события, порожденные \mathfrak{M} , равновероятны и наступают с вероятностью $\alpha = 1/2^N$. Очевидно, что \mathfrak{M} можно выбрать так, что множество террасных событий, порожденных \mathfrak{M} , будет совпадать с разбиением \mathfrak{M}^* .

$$\{\text{ter}(Y//\mathfrak{M}), Y \subseteq \mathfrak{M}\} = \mathfrak{M}^*.$$

Совокупная однособытийная система, порожденная так выбранным \mathfrak{M} , имеет следующие собственные \mathcal{E} -распределения ω -состояний:

$$(n/N, 1 - n/N),$$

когда $\omega \in \sum_{Y:|Y|=n} \text{ter}(Y//\mathfrak{M})$. Ясно, что

$$\mathbf{P}\left(\sum_{Y:|Y|=n} \text{ter}(Y//\mathfrak{M})\right) = C_N^n 1/2^N.$$

Отсюда среднее \mathcal{E} -распределение

$$(1/2, 1/2)$$

совокупной однособытийной системы, порожденной множеством событий \mathfrak{M} , повторяет \mathcal{E} -распределение каждого события из \mathfrak{M} .

2.4 Интерпретация совокупного однособытийного \mathcal{E} -распределения множества событий

С одной стороны, формулы (10) и (10') можно интерпретировать как формулы полной вероятности. В самом деле, множество событий \mathfrak{M} происходит только в виде наступления террасного события $\text{ter}(Y//\mathfrak{M})$ для того или иного $Y \subseteq \mathfrak{M}$, где

$$\sum_{Y \subseteq \mathfrak{M}} \text{ter}(Y//\mathfrak{M}) = \Omega.$$

При наступлении террасного события $\text{ter}(Y//\mathfrak{M})$, которое происходит с вероятностью $p(Y//\mathfrak{M})$, из множества событий \mathfrak{M} наступают события из Y и не наступают события из $Y^c = \mathfrak{M} - Y$, иначе говоря, при наступлении $\text{ter}(Y//\mathfrak{M})$ наступает доля событий из \mathfrak{M} , равная $|Y|/|\mathfrak{M}|$. Поэтому вероятности в формулах (10) и (10') интерпретируются следующим образом:

- $\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}})$ — средняя доля *наступающих событий* из \mathfrak{M} ,
- $\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}^c)$ — средняя доля *ненаступающих событий* из \mathfrak{M} .

С другой стороны, из тех же формул (10) и (10') вытекает

Лемма (о вероятностях совокупного Э-распределения). *Вероятности совокупного однособытийного Э-распределения ($\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}), \mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}^c)$) множества событий \mathfrak{M} определяются формулами:*

$$\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}) = \hat{\mathbf{P}}_{\mathfrak{M}},$$

$$\mathbf{P}(\mu_{\mathfrak{M}}^c) = 1 - \hat{\mathbf{P}}_{\mathfrak{M}},$$

где

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu)$$

— средняя вероятность событий из \mathfrak{M} .

Доказательство следует из определения (10) и теоремы Роббинса [5].

Общий итог заключается в том, что *совокупное однособытийное Э-распределение множества событий \mathfrak{M}* естественно интерпретировать как *Э-распределение средневероятного события $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$* для множества \mathfrak{M} . Иначе говоря, что

$$\mu_{\mathfrak{M}} = \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$$

— наиболее подходящей математической моделью *совокупного события $\mu_{\mathfrak{M}}$* , характеризующего множество событий \mathfrak{M} , служит *средневероятное событие $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$* для множества \mathfrak{M} , которое наступает тогда, когда доля наступивших событий из \mathfrak{M} превышает некий фиксированный уровень $t \in \{0, 1, \dots, |\mathfrak{M}|\}$, обеспечивающий $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ вероятность наступления, равную средней вероятности событий из \mathfrak{M} (см. определение (8), (8'), (8'') и [3]).

На иллюстрациях (рис. 1, 2, 3) к рассмотренным выше примерам показаны средневероятные события для множества событий \mathfrak{M} , Э-распределения которых совпадают с соответствующими совокупными однособытийными Э-распределениями множества событий \mathfrak{M} .

2.5 О субъектной интерпретации результатов случайного эксперимента

Нельзя оставить незамеченным удивительный факт, указывающий на субъектную относительность понятия совокупного однособытийного Э-распределения для совокупности однособытийных систем.

В самом деле, хотя выше (параграф 2.2) даются простые примеры различных совокупных однособытийных Э-распределений, но все эти распределения

определяются одним и тем же разбиением Ω на пять террасных событий:

$$\Omega = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_1^c \cap \mu_2^c \cap \mu_3^c \cap \mu_4^c,$$

наступающих с вероятностями

$$\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, 1 - 4\alpha$$

соответственно (см. рис. 1,1,3).

Налицо *субъектность интерпретации* результатов случайного эксперимента. Примеры демонстрируют, что результаты одного и того же эксперимента с пятью исходами каждый субъект может интерпретировать по-разному, как результаты эксперимента над той или над иной совокупностью однособытийных систем. Эта субъектность интерпретации эксперимента, разумеется, приводит и к различным совокупным однособытийным Э-распределениям испытываемых множеств событий, порождающих одно и то же разбиение Ω .

3 Совокупные многособытийные системы

Изложенный подход без особого труда обобщается для совокупностей однородных многособытийных систем вида (4), что дает возможность совершенно аналогично определить для нее *совокупную многособытийную систему*, базисом которой служит *множество средневероятных событий*, а оболочкой — *средневероятное террасное разбиение* [3], порожденное этим множеством. Некоторые принципиальные особенности этого обобщения можно отчасти найти в [3].

4 Обсуждение

Не секрет, что применять на практике эвентологическую модель сложной системы событий, которая состоит из десятков, а то и сотен событий, не представляется возможным даже при опоре на самые современные компьютеры. Поэтому прежде, чем переходить от эвентологической теории к компьютерной практике, первое что надо сделать — уяснить и принять одну общую идею вынужденного стандартного упрощения эвентологических моделей больших систем событий до приемлемого уровня сложности.

Предлагаемая упрощающая идея оригинальна и заключается в стандартной замене сложной *модели однородной совокупности* простой *совокупной моделью*. По сути, эта замена играет роль некой *стандартной аппроксимации модели однородной совокупности* — большого множества взаимодействующих однородных элементарных моделей — одной *совокупной моделью*, эвентологически наследующей такую же простую событийную структуру, какой обладает каждая из элементарных моделей, образующих аппроксимируемое множество.

Иными словами, эвентологическую модель сложной системы событий, моделирующую поведение большого множества взаимодействующих однородных объектов и представляющую из себя *множество взаимосвязанных элементарных эвентологически однородных моделей* этих объектов, предлагается *стандартно аппроксимировать* одной существенно более простой *совокупной эвентологической моделью* всего множества этих взаимодействующих объектов.

Сложность такой *совокупной модели* не превышает уровень сложности элементарных моделей потому, что она получается в результате такой стандартной процедуры упрощения *модели однородной совокупности*, что ее событийная структура эвентологически наследует событийную структуру каждой элементарной эвентологической модели.

Теоретической основой процедуры аппроксимации большой *совокупности однородных систем событий* при помощи одной *совокупной событийной системы* служат вновь вводимые в эвентологии и эвентологическом системном анализе понятия *средневероятного события* и *средневероятного разбиения* [3], *системы событий*, порождаемой *системным базисом* и *системной оболочкой*, а также — новое понятие *операционной зависимости событий*, существенно дополняющее давно известную вероятностную зависимость событий в эвентологическом моделировании событийного взаимодействия [4].

Список литературы

- [1] О. Ю. Воробьев. *Эвентология*. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с.
- [2] О. Ю. Воробьев. Начала аксиоматизации эвентологии. *Труды VIII Международ. ФАМ конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам*, Красноярск: СФУ, 1 (под ред. Олега Воробьева):77–82, 2009.
- [3] О. Ю. Воробьев. Средневероятное событие для множества событий. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):в этой книге, 2012.
- [4] О. Ю. Воробьев. Эвентологический анализ систем: система событий во внесистемных обстоятельствах. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):в этой книге, 2012.
- [5] H. E. Robbins. On the measure of a random set. *Ann. Math. Statist.*, 15/16:70–74/342–347, 1944/45.
- [6] O. Yu. Vorobyev. On elements of axiomatizing eventology. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 3 (2):157–164, 2010.

Средневероятное событие для множества событий

Олег Юрьевич Воробьев

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярский государственный
торгово-экономический институт
НИИ противопожарной безопасности
Красноярск
oleg.yu.vorobyev@gmail.com

Аннотация. Предлагается эвентологическая модель средневероятного события для множества событий, имеющая аналогии с понятием среднемерного множества [3].

Ключевые слова. Эвентология, теория вероятностей, элементарный исход, событие, множество событий, вероятность, среднемерное множество, средневероятное событие, средневероятное террасное разбиение.

1 Введение

В [3], а также в [8, стр. 644] можно найти определение понятия *среднемерного множества*, которое впервые было введено нами в 1973, а опубликовано в [1, 1975] и [2, 1977]. *Среднемерное множество* — это средняя множественная характеристика *случайного множества*, значениями которого служат подмножества измеримого пространства с мерой, играющая для случайного множества ту же роль, которую для *случайного элемента* со значениями из линейного пространства¹ играет *математическое ожидание*, или *среднее значение*.

В эвентологии уже существует понятие *среднего множества событий* [4] — результат буквального применения определения среднемерного множества для *случайного множества событий*. В этой работе определение *среднемерного множества* еще раз взято нами в качестве образца для определения нового понятия *средневероятного события*.

Хотя некоторые детали этой аналогии лежат на поверхности: измеримому пространству с мерой соответствует всеобщее вероятностное пространство, его подмножествам — события, мере — вероятностная мера, но в целом эта аналогия далеко не очевидна. Ключ к ее полному пониманию кроется в том, что аналогом *случайного множества* выступает *множество событий*, которому дается роль того, что по аналогии со *случайным множеством* напрашивалось назвать *“случайным” событием*. Однако дело в том, что прямое определение *“случайного” события*

¹Для случайной величины, вектора, матрицы, функции и т.п.

по обычной схеме определения случайного элемента требует беспричинного введения дополнительной вероятностной меры, отвечающей за природу “случайности” этого события.

Поэтому вместо “случайного” события в качестве аналога *случайного множества* предлагается *множество однородных событий*, в котором все события в определенном смысле одного типа — имеют одинаковую природу.

Разумеется, такое *множество однородных событий* можно считать источником (строителем) той самой дополнительной “однородной” меры, которая приписывает одинаковый вес каждому событию из данного множества. Предположение такой однородности событий приводит к тому, что существенным оказывается не то, какое конкретное *подмножество событий* из множества наступает, а лишь то, какая *доля событий* из данного множества. Это предположение выглядит естественным в ряде приложений², где, например, рассматриваются эвентологические модели совокупного субъекта и совокупного объекта [7].

Далее используются следующие обозначения:

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — всеобщее вероятностное пространство,
- Ω — пространство всеобщих элементарных исходов $\omega \in \Omega$,
- \mathcal{A} — алгебра всеобщих событий³ $\mu \subseteq \Omega$,
- \mathbf{P} — вероятностная мера на \mathcal{A} ,
- $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ — конечное множество всеобщих событий $\mu \in \mathfrak{M}$.

2 Среднемерное множество событий

В эвентологии с каждым *множеством событий* $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ традиционно связывается эквивалентное понятие *случайного множества событий*, которое

²Нередко, например, в эвентологической теории нечетких событий [4], требуется рассматривать множество взвешенных событий. Эта ситуация также укладывается в изложенную схему, если предварительно сконструировать эквивалентное множество событий, в котором каждое событие встречается под разными именами такое количество раз, которое пропорционально его весу.

³Далее под *событиями* всегда понимаются *всеобщие события*, поэтому, как правило, для краткости будет использоваться термин *событие* вместо *всеобщее событие*.

определяется на всеобщем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ как случайный элемент

$$K_{\mathfrak{M}} : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{M}}, 2^{2^{\mathfrak{M}}})$$

со значениями

$$K_{\mathfrak{M}}(\omega) = \{\mu \in \mathfrak{M} : \omega \in \mu\} \subseteq \mathfrak{M}$$

— подмножествами событий из \mathfrak{M} , наступающих при наступлении всеобщего элементарного исхода $\omega \in \Omega$.

Оба эквивалентных понятия: и *множество событий* \mathfrak{M} , и *случайное множество событий* $K_{\mathfrak{M}}$ определяются одним и тем же эвентологическим распределением (\mathfrak{A} -распределением) — набором

$$\{p(Y//\mathfrak{M}), Y \subseteq \mathfrak{M}\}$$

вероятностей

$$p(Y//\mathfrak{M}) = \mathbf{P}(\text{ter}(Y//\mathfrak{M}))$$

террасных событий

$$\text{ter}(Y//\mathfrak{M}) = \bigcap_{\mu \in Y} \mu \bigcap_{\mu \in Y^c} \mu^c,$$

которые образуют разбиение Ω :

$$\Omega = \sum_{Y \subseteq \mathfrak{M}} \text{ter}(Y//\mathfrak{M}),$$

порожденное \mathfrak{M} .

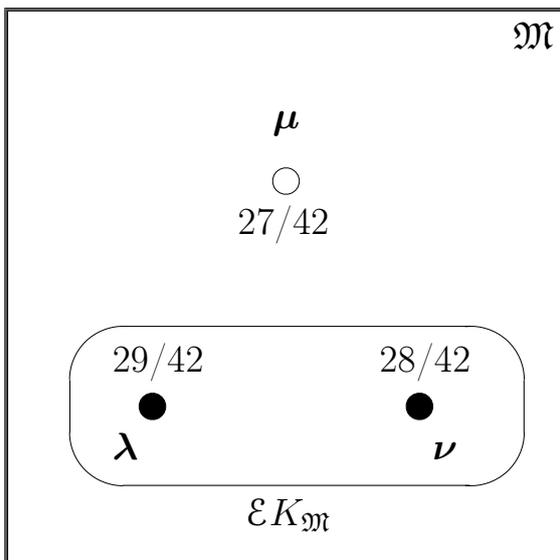


Рис. 1: Триплет событий $\mathfrak{M} = \{\mu, \lambda, \nu\}$ и его среднее множество событий $\mathcal{E}K_{\mathfrak{M}} = \{\alpha \in \mathfrak{M} : \mathbf{P}(\alpha) \geq 28/42\} = \{\lambda, \nu\} \subset \mathfrak{M}$, где $\mathbf{P}(\mu) = 27/42$, $\mathbf{P}(\nu) = 28/42$, $\mathbf{P}(\lambda) = 29/42$.

Разумеется, для *случайного множества событий* $K_{\mathfrak{M}}$ буквально так же, как и в общем варианте

для *случайного множества* произвольных элементов [3, 8], определяется *среднемерное множество событий*, как множество событий $\mathcal{E}K_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}$, которое удовлетворяет отношениям включения:

$$\{\mu : \mathbf{P}(\mu) > h\} \subseteq \mathcal{E}K_{\mathfrak{M}} \subseteq \{\mu : \mathbf{P}(\mu) \geq h\},$$

где уровень $h \in [0, 1]$ такой, что приближенное равенство⁴

$$|\mathcal{E}K_{\mathfrak{M}}| \approx \mathbf{E}|K_{\mathfrak{M}}| \tag{1}$$

выполняется с наименьшей погрешностью, что в дальнейшем будет кратко обозначаться

$$|\mathcal{E}K_{\mathfrak{M}}| \stackrel{\min}{\approx} \mathbf{E}|K_{\mathfrak{M}}|. \tag{1'}$$

Пример среднемерного множества триплета событий показан на рис. 1 и 2.

Лемма 1 (об экстремальных свойствах среднемерного множества событий). *Среднемерное множество событий $\mathcal{E}K_{\mathfrak{M}}$ минимизирует среднее расстояние (среднюю мощность симметрической разности)*

$$\mathbf{E}|K_{\mathfrak{M}} \Delta \mathcal{E}K_{\mathfrak{M}}| = \min_{|Y| \stackrel{\min}{\approx} \mathbf{E}|K_{\mathfrak{M}}|} \mathbf{E}|K_{\mathfrak{M}} \Delta Y|$$

до случайного множества событий $K_{\mathfrak{M}}$ среди тех подмножеств событий $Y \subseteq \mathfrak{M}$, для которых приближенное равенство (1) выполняется с наименьшей погрешностью.

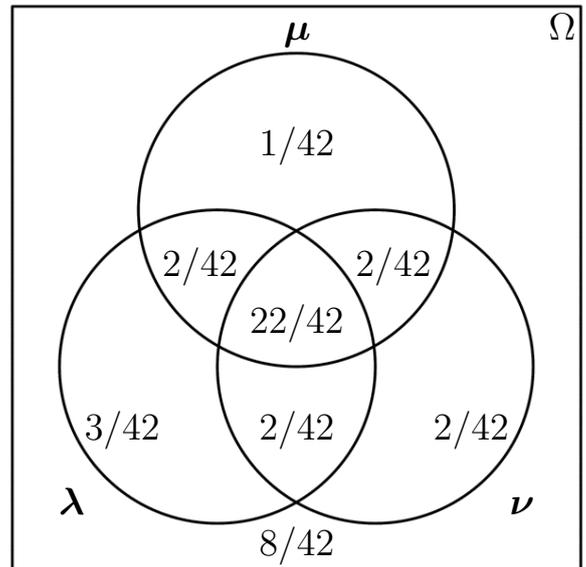


Рис. 2: Диаграмма Венна триплета событий $\mathfrak{M} = \{\mu, \lambda, \nu\}$, среднемерное множество событий $\mathcal{E}K_{\mathfrak{M}} = \{\lambda, \nu\}$ для которого показано на рис. 1. Показаны вероятности всех 8-ми террасных событий, порожденных триплетом событий \mathfrak{M} .

⁴Где $\mathbf{E}|K_{\mathfrak{M}}| = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu)$ по теореме Роббинса [9].

3 Средневероятное событие

В дополнение к стандартному определению *среднемерного множества событий* (см. предыдущий параграф), мы собираемся дать другое определение, иначе использующее аналогию с определением *среднемерного множества* [3, 8]. Речь идет о новом понятии *средневероятного события* для данного множества событий $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$, которое обозначается

$$\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subseteq \Omega,$$

наступает с вероятностью, равной⁵

$$\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu)$$

— средней вероятности событий $\mu \in \mathfrak{M}$, и играет роль средней множественной характеристики событий из \mathfrak{M} , как подмножеств Ω . Аналогично тому, как *среднемерное множество* [3] играет роль средней множественной характеристики подмножеств — значений случайного множества.

Определение (средневероятное событие). *Средневероятным событием* для множества событий $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ называется такое всеобщее событие $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{A}$, удовлетворяющее включениям

$$\sum_{|Y|>m} \text{ter}(Y//\mathfrak{M}) \subseteq \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subseteq \sum_{|Y|\geq m} \text{ter}(Y//\mathfrak{M}), \quad (2)$$

которое наступает с вероятностью

$$\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu) \quad (3)$$

всякий раз, когда среди событий из \mathfrak{M} наступает не менее, чем m событий, где $m \in \{0, 1, \dots, |\mathfrak{M}|\}$ удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{|Y|>m} p(Y//\mathfrak{M}) < \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) \leq \sum_{|Y|\geq m} p(Y//\mathfrak{M}). \quad (4)$$

При этом если в правом неравенстве достигается равенство:

$$\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \sum_{|Y|\geq m} p(Y//\mathfrak{M}), \quad (4')$$

то

$$\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \sum_{|Y|\geq m} \text{ter}(Y//\mathfrak{M}) \quad (2')$$

— *средневероятное событие* для \mathfrak{M} единственно.

Определение (вероятностное расстояние события до множества). *Вероятностное расстояние события* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{A}$ до множества $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ определяется формулой:

$$\rho(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu \Delta \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) =$$

$$= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu^c) + \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu). \quad (5)$$

Теорема 1 (об экстремальности средневероятного события). *Средневероятное событие* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ для множества событий \mathfrak{M} минимизирует вероятностное расстояние до \mathfrak{M} :

$$\rho(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}) = \min_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P}_{\mathfrak{M}}} } \rho(\alpha, \mathfrak{M}) \quad (6)$$

среди таких событий из алгебры \mathcal{A} , которые наступают с вероятностью, равной средней вероятности

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu)$$

событий из \mathfrak{M} .

Доказательство теоремы проводится в два этапа, каждый из которых состоит из нескольких шагов. На первом этапе теорема доказывается в ситуации, когда средневероятное событие единственно, на втором — в общей ситуации.

Первый этап разбивается на три шага. Шаг 1.1: средневероятное событие сравнивается с такими событиями, которые отличаются от него только отдельными террасными событиями, порожденными \mathfrak{M} . Шаг 1.2: средневероятное событие сравнивается с такими событиями, которые отличаются от него только подмножествами отдельных террасных событий, порожденных \mathfrak{M} . Шаг 1.3: сравнение средневероятного события с произвольным событием представляется последовательностью сравнений в ситуации шага 1.2.

Второй этап сводится к ситуации единственного средневероятного события, присоединением любого одного средневероятного события из многих существующих в качестве дополнительного элемента множества событий \mathfrak{M} .

Ключом к пониманию идей всего доказательства теоремы служит диаграмма Венна (рис. 3), иллюстрирующая террасную структуру отклонения средневероятного события $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ от одного произвольного события $\mu \in \mathfrak{M}$, а также отклонения от $\mu \in \mathfrak{M}$ какого-то другого события $\mu' \in \mathcal{A}$, наступающего с той же вероятностью, что и средневероятное событие: $\mathbf{P}(\mu') = \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}})$, но не являющегося средневероятным событием.

Цель доказательства — показать, что

$$\rho(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}) < \rho(\mu', \mathfrak{M}).$$

для любого такого события μ' , которое не является средневероятным.

Чтобы конструировать различные варианты произвольного события μ' , наступающего с той же вероятностью, что и средневероятное событие, но не являющегося средневероятным событием, нам понадобятся несколько вспомогательных событий.

⁵По теореме Роббинса [9] $\sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu) = \sum_{Y \subseteq \mathfrak{M}} |Y|p(Y)$.

Пусть $a, b, a', b' \in \mathcal{A}$ — четыре равновероятных события:

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) = \mathbf{P}(a') = \mathbf{P}(b') = \alpha,$$

такие, что (см. рис. 3) каждое из них содержится в одном из четырех террасных событий, порожденных дууплетом событий $\{\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}, \mu\}$:

$$a \subset \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu^c, \quad b \subset \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu^c,$$

$$a' \subset \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu, \quad b' \subset \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu.$$

На фоне террасной структуры отклонения $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ от одного события $\mu \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 3) возможны четыре варианта конструирования μ' путем *изъятия* из $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ одного из четырех введенных равновероятных событий и *добавления* к $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ другого из четырех этих событий, лежащего за пределами $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ (т.е. содержащегося в дополнении к средневероятному событию).

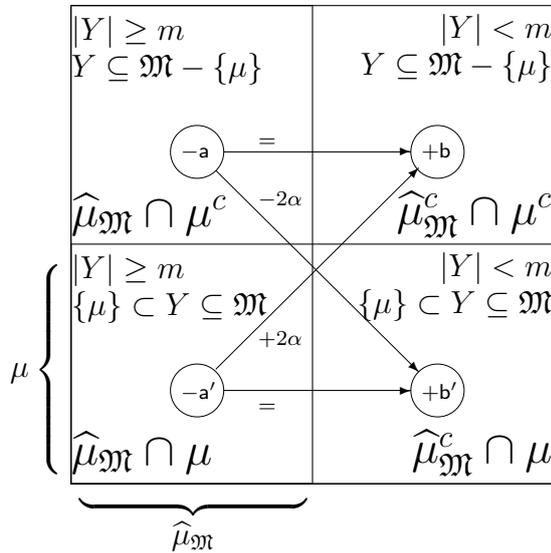


Рис. 3: Диаграмма Венна, которая иллюстрирует фигурирующую в доказательстве теоремы террасную структуру отклонения средневероятного события $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \sum_{|Y| \geq m} \text{ter}(Y // \mathfrak{M}) \subset \Omega$ от одного произвольного события $\mu \in \mathfrak{M}$ в ситуации, когда средневероятное событие единственно.

1-й вариант:

$$\mu' = \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} - a + b \implies \mathbf{P}(\mu \Delta \mu') = \mathbf{P}(\mu \Delta \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}),$$

2-й вариант:

$$\mu' = \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} - a' + b' \implies \mathbf{P}(\mu \Delta \mu') = \mathbf{P}(\mu \Delta \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}),$$

3-й вариант:

$$\mu' = \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} - a' + b \implies \mathbf{P}(\mu \Delta \mu') = \mathbf{P}(\mu \Delta \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}) + 2\alpha,$$

4-й вариант:

$$\mu' = \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} - a + b' \implies \mathbf{P}(\mu \Delta \mu') = \mathbf{P}(\mu \Delta \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}) - 2\alpha.$$

В первых двух вариантах событие μ' отклоняется от μ так же, как и средневероятное событие $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$, в третьем варианте — дальше на 2α , в четвертом — ближе на 2α , чем $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$.

Каждое из четырех террасных событий (каждый из четырех квадратов на диаграмме Венна, см. рис. 3),

порожденных дууплетом $\{\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}, \mu\}$, разбивается множеством оставшихся событий $\mathfrak{M} - \{\mu\}$ на $2^{|\mathfrak{M}|-1}$ террасных событий вида:

$$\text{ter}(Y // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu^c, \quad (7)$$

$$\text{ter}(Y // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu^c, \quad (8)$$

$$\text{ter}(Y // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu, \quad (9)$$

$$\text{ter}(Y // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu, \quad (10)$$

где $Y \subseteq \mathfrak{M} - \{\mu\}$.

1-й этап доказательства (средневероятное событие единственно).

Шаг 1.1 (конструирование события μ' “с точностью до” террасных событий).

Предположим, что каждое из четырех равновероятных событий a, b, a', b' совпадает с некоторым террасным событием (7,8,9,10):

$$a = \text{ter}(Y_a // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu^c, \quad |Y_a| \geq m,$$

$$b = \text{ter}(Y_b // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu^c, \quad |Y_b| < m,$$

$$a' = \text{ter}(Y_{a'} // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu, \quad |Y_{a'}| \geq m,$$

$$b' = \text{ter}(Y_{b'} // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu, \quad |Y_{b'}| < m,$$

“занумерованным” соответствующим подмножеством событий из $Y_a, Y_b, Y_{a'}, Y_{b'} \subseteq \mathfrak{M} - \{\mu\}$, на мощность которых наложены соответствующие ограничения.

Теперь надо просуммировать по всем событиям $\mu \in \mathfrak{M}$ вероятностные расстояния μ до события μ' , наступающего с той же вероятностью, что и средневероятное событие, но отличающегося от средневероятного события, и показать, что эта сумма больше, чем аналогичная сумма вероятностных расстояний μ до средневероятного события $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$:

$$\rho(\mu', \mathfrak{M}) > \rho(\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}),$$

где $\mu' \neq \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}$, но $\mathbf{P}(\mu') = \mathbf{P}(\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}})$.

Это можно показать следующим образом. Заметим, что каждый из 4-х вариантов (относительно μ) конструирования события μ' характеризуется своей парой подмножеств событий.

1-й вариант:

$$\{Y_a, Y_b\},$$

2-й вариант:

$$\{Y_{a'}, Y_{b'}\},$$

3-й вариант:

$$\{Y_{a'}, Y_b\},$$

4-й вариант:

$$\{Y_a, Y_{b'}\}.$$

Каждая из этих пар разбивает множество событий \mathfrak{M} на 4-е террасных подмножества. Например, пара из 3-го (относительно μ) варианта разбивает \mathfrak{M} на следующие 4-е террасных события:

$$\mathfrak{M} = Y_{a'} \cap Y_b^c + Y_{a'}^c \cap Y_b + Y_{a'} \cap Y_b + Y_{a'}^c \cap Y_b^c.$$

Нетрудно понять, что

- для $\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b^c$ 3-й (относительно μ) вариант остается 3-м (относительно λ) вариантом, поэтому

$$\mathbf{P}(\lambda \Delta \mu') = \mathbf{P}(\lambda \Delta \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) + 2\alpha,$$

- для $\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b$ 3-й вариант (относительно μ) становится 4-м (относительно λ) вариантом, поэтому

$$\mathbf{P}(\lambda \Delta \mu') = \mathbf{P}(\lambda \Delta \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) - 2\alpha,$$

- для $\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b$ 3-й (относительно μ) вариант становится 2-м (относительно λ) вариантом, поэтому

$$\mathbf{P}(\lambda \Delta \mu') = \mathbf{P}(\lambda \Delta \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}),$$

- для $\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b^c$ 3-й (относительно μ) вариант становится 1-м (относительно λ) вариантом, поэтому

$$\mathbf{P}(\lambda \Delta \mu') = \mathbf{P}(\lambda \Delta \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}).$$

Известно, что $|Y_{a'}| \geq m$, $|Y_b| < m$. Поэтому

$$|Y_{a'} \cap Y_b^c| > |Y_{a'}^c \cap Y_b|$$

и для 3-го (относительно μ) варианта

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b^c} \mathbf{P}(\mu' \Delta \lambda) + \sum_{\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda) = \\ & = \sum_{\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b^c} (\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda) + 2\alpha) + \\ & + \sum_{\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b} (\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda) - 2\alpha) = \\ & = \sum_{\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b^c} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda) + \sum_{\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda) + \\ & + 2\alpha(|Y_{a'} \cap Y_b^c| - |Y_{a'}^c \cap Y_b|) > \\ & > \sum_{\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b^c} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda) + \sum_{\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda). \end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu' \Delta \lambda) = \\ & = \left(\sum_{\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b^c} + \sum_{\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b} + \sum_{\lambda \in Y_{a'} \cap Y_b} + \sum_{\lambda \in Y_{a'}^c \cap Y_b^c} \right) \mathbf{P}(\mu' \Delta \lambda), \end{aligned}$$

где третья и четвертая суммы не меняются, то для 3-го (относительно μ) варианта

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu' \Delta \lambda) > \sum_{\lambda \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \Delta \lambda).$$

Как легко убедиться, аналогичное строгое неравенство следует и для остальных: 1-го, 2-го и 4-го (относительно μ) вариантов.

Доказательство шага 1.1 завершено.

Шаг 1.2 (конструирование события μ' "с точностью до" подмножеств террасных событий).

Предположим, что каждое из четырех равновероятных событий a, b, a', b' содержится (см. рис. 3) в некотором террасном событии (7,8,9,10):

$$\begin{aligned} a & \subseteq \text{ter}(Y_a // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu^c, & |Y_a| & \geq m, \\ b & \subseteq \text{ter}(Y_b // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu^c, & |Y_b| & < m, \\ a' & \subseteq \text{ter}(Y_{a'} // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu, & |Y_{a'}| & \geq m, \\ b' & \subseteq \text{ter}(Y_{b'} // \mathfrak{M} - \{\mu\}) \cap \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu, & |Y_{b'}| & < m, \end{aligned}$$

"занумерованном" соответствующим подмножеством событий из $Y_a, Y_b, Y_{a'}, Y_{b'} \subseteq \mathfrak{M} - \{\mu\}$, на мощность которых наложены соответствующие ограничения.

Не так трудно сообразить, что эта ситуация позволяет буквально повторить каждое действие шага 1.1 и получить тот же результат.

Шаг 1.3 (конструирование произвольного события μ').

Предположим, что каждое из четырех равновероятных событий a, b, a', b' содержится (см. рис. 3) в некотором террасном событии вида:

$$\begin{aligned} a & \subseteq \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu^c, \\ b & \subseteq \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu^c, \\ a' & \subseteq \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \cap \mu, \\ b' & \subseteq \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c \cap \mu. \end{aligned}$$

Эти четыре равновероятных события можно разбить на более редкие равновероятные события, каждое из которых содержится в соответствующем террасном событии (7,8,9,10), чтобы оказаться в ситуации шага 1.2. После этого с фрагментами такого разбиения можно последовательно совершать те же действия, что и на шаге 1.2, чтобы, в конечном итоге, получить тот же результат.

2-й этап доказательства (средневероятное событие неединственно). Пусть $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ — любое из многих средневероятных событий, удовлетворяющее строгим включениям

$$\sum_{|Y| > m} \text{ter}(Y // \mathfrak{M}) \subset \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subset \sum_{|Y| \geq m} \text{ter}(Y // \mathfrak{M}), \quad (2^*)$$

наступающее с вероятностью

$$\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(\mu)$$

всякий раз, когда среди событий из \mathfrak{M} наступает не менее, чем m событий, где $m \in \{0, 1, \dots, |\mathfrak{M}|\}$ удовлетворяет строгим неравенствам

$$\sum_{|Y|>m} p(Y//\mathfrak{M}) < \mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) < \sum_{|Y|\geq m} p(Y//\mathfrak{M}). \quad (4^*)$$

Присоединив $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ к \mathfrak{M} , получим множество событий

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M} + \{\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}\},$$

средняя вероятность которых, очевидно, совпадает со средней вероятностью событий из \mathfrak{M} :

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathfrak{M}^*} = \frac{1}{|\mathfrak{M}| + 1} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}^*} \mathbf{P}(\mu) = \hat{\mathbf{P}}_{\mathfrak{M}},$$

а средневероятное событие $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}^*}$ единственно:

$$\hat{\mu}_{\mathfrak{M}^*} = \sum_{|Y|\geq m+1} \text{ter}(Y//\mathfrak{M}^*).$$

и по построению совпадает с $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$:

$$\hat{\mu}_{\mathfrak{M}^*} = \hat{\mu}_{\mathfrak{M}}.$$

Следовательно, для любого $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ из многих средневероятных событий доказательство сводится к доказательству в ситуации единственного средневероятного события $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}^*}$, что уже сделано на первом этапе.

Это завершает доказательство теоремы.

4 Примеры

На рис. 4, 5, 6 приведены простые примеры средневероятных событий для триплетов событий $\mathfrak{M} = \{\mu, \lambda, \nu\}$, имеющих различные эвентологические распределения.

5 О коммутативности теоретико-множественных операций по Минковскому и операции взятия средневероятного события

Вместо предложенной выше для обозначения *средневероятного события* довольно удобной аббревиатуры $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ иногда будет употребляться громоздкое обозначение

$$\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \mathcal{E}(\mu/\mathfrak{M}) \subset \Omega,$$

которое имеет более традиционную форму и удобнее в этом параграфе, где нам понадобятся стандартные обозначения средневероятных событий для множеств

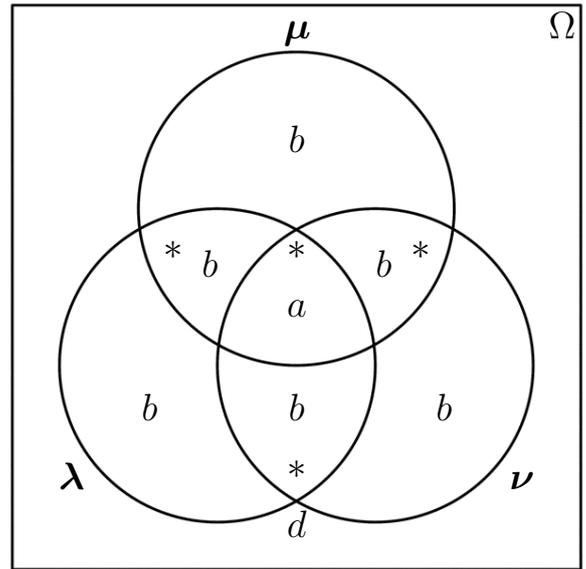


Рис. 4: Диаграмма Венна триплета событий $\mathfrak{M} = \{\mu, \lambda, \nu\}$ и его единственного средневероятного события $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \text{ter}(\{\mu, \lambda, \nu\}) + \text{ter}(\{\mu, \lambda\}) + \text{ter}(\{\mu, \nu\}) + \text{ter}(\{\lambda, \nu\}) = \mu \cap \lambda \cap \nu + \mu \cap \lambda \cap \nu^c + \mu \cap \lambda^c \cap \nu + \mu^c \cap \lambda \cap \nu \subset \Omega$, составленного из 4-х террасных событий (отмечены *), занумерованных подмножествами триплета \mathfrak{M} , мощность которых не меньше двух. Показаны вероятности соответствующих террасных событий a, b и d , где $a + 6b + d = 1$, а $\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \mathbf{P}(\mu) = \mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P}(\nu) = a + 3b$.

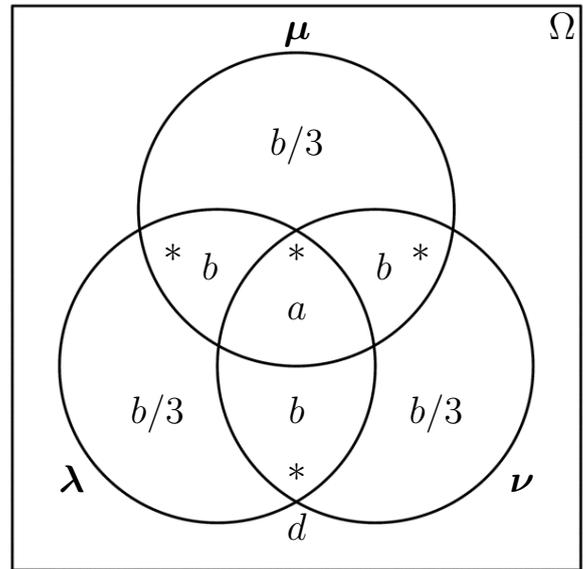


Рис. 5: Диаграмма Венна триплета событий $\mathfrak{M} = \{\mu, \lambda, \nu\}$ и его многих средневероятных событий $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subset \Omega$, удовлетворяющих включениям $\text{ter}(\{\mu, \lambda, \nu\}) \subseteq \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subseteq \text{ter}(\{\mu, \lambda, \nu\}) + \text{ter}(\{\mu, \lambda\}) + \text{ter}(\{\mu, \nu\}) + \text{ter}(\{\lambda, \nu\})$ — содержащих террасное событие $\text{ter}(\{\mu, \lambda, \nu\})$ и содержащихся в объединении 4-х террасных событий (отмечены *), занумерованных подмножествами триплета \mathfrak{M} , мощность которых не меньше двух. Показаны вероятности соответствующих террасных событий a, b и d , где $a + 4b + d = 1$, а $\mathbf{P}(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \mathbf{P}(\mu) = \mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P}(\nu) = a + 2b + b/3$.

событий — результатов теоретико-множественных операций по Минковскому над несколькими множествами событий. Эквивалентные обозначения средне-

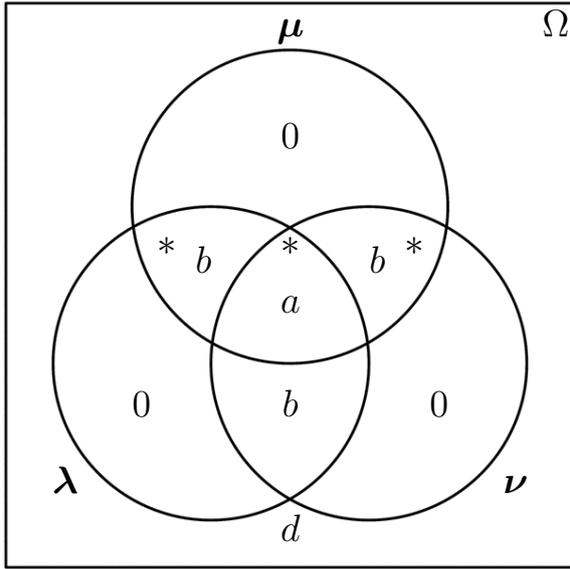


Рис. 6: Диаграмма Венна триплета событий $\mathfrak{M} = \{\mu, \lambda, \nu\}$ и одного из многих его средневероятных событий $\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} = \text{ter}(\{\mu, \lambda, \nu\}) + \text{ter}(\{\mu, \lambda\}) + \text{ter}(\{\mu, \nu\}) = \mu \cap \lambda \cap \nu + \mu \cap \lambda \cap \nu^c + \mu \cap \lambda^c \cap \nu \subset \Omega$, составленного из 3-х террасных событий (отмечены *). Показаны вероятности соответствующих террасных событий a, b и d , где $a + 3b + d = 1$, а $\mathbf{P}(\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}) = \mathbf{P}(\mu) = \mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P}(\nu) = a + 2b$.

вероятного события для множества \mathfrak{M} как события

$$\mathcal{E}(\cdot/\mathfrak{M}) = (\widehat{\cdot})_{\mathfrak{M}} \subset \Omega$$

— также могут оказаться в некоторых ситуациях более удобными, чем $\mathcal{E}(\mu/\mathfrak{M}) = \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}} \subset \Omega$.

Теоретико-множественными операциями по Минковскому (M-операциями) над множествами событий называются такие операции над ними, результат которых определяется как множество событий, составленное из соответствующих результатов теоретико-множественных операций над событиями их данных множеств.

Например, множество

$$\mathfrak{M}^{(c)} = \{\mu^c : \mu \in \mathfrak{M}\} \subset \mathcal{A}$$

называется дополнением множества событий \mathfrak{M} по Минковскому, или M-дополнением;

$$\mathfrak{M}(\cup)\mathcal{L} = \{\mu \cup \lambda : \mu \in \mathfrak{M}, \lambda \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{A}$$

— M-объединением множеств событий \mathfrak{M} и \mathcal{L} ;

$$\mathfrak{M}(\cap)\mathcal{L} = \{\mu \cap \lambda : \mu \in \mathfrak{M}, \lambda \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{A}$$

— M-пересечением множеств событий \mathfrak{M} и \mathcal{L} ;

$$\mathfrak{M}(\Delta)\mathcal{L} = \{\mu \Delta \lambda : \mu \in \mathfrak{M}, \lambda \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{A}$$

— M-симметрической разностью множеств событий \mathfrak{M} и \mathcal{L} , и т.п.

Нас интересует связь между средневероятными событиями

$$\mathcal{E}(\mu/\mathfrak{M}), \quad \mathcal{E}(\lambda/\mathcal{L})$$

для исходных множеств событий \mathfrak{M} и \mathcal{L} и средневероятными событиями

$$\mathcal{E}(\mu^c/\mathfrak{M}^{(c)}), \quad \mathcal{E}(\mu \cup \lambda/\mathfrak{M}(\cup)\mathcal{L})$$

$$\mathcal{E}(\mu \cap \lambda/\mathfrak{M}(\cap)\mathcal{L}), \quad \mathcal{E}(\mu \Delta \lambda/\mathfrak{M}(\Delta)\mathcal{L})$$

для результатов M-операций над ними, перечисленных выше, а также других M-операций.

Лемма 2 (о средневероятном событии для M-дополнения). *Средневероятное событие для множества дополнений $\mathfrak{M}^{(c)}$ событий из \mathfrak{M} совпадает с дополнением средневероятного события для множества событий \mathfrak{M} .⁶*

$$\mathcal{E}(\mu^c/\mathfrak{M}^{(c)}) = (\mathcal{E}(\mu/\mathfrak{M}))^c = \Omega - \mathcal{E}(\mu/\mathfrak{M}).$$

Лемма 3 (о средневероятном событии для бинарной M-операции). *Средневероятное событие для бинарной M-операции $\mathfrak{M}(\ast)\mathcal{L}$ над множествами событий \mathfrak{M} и \mathcal{L} совпадает с бинарной теоретико-множественной операцией над средневероятными событиями для этих двух множеств событий:*

$$\mathcal{E}(\mu(\ast)\lambda/\mathfrak{M}(\ast)\mathcal{L}) = \mathcal{E}(\mu/\mathfrak{M}) \ast \mathcal{E}(\lambda/\mathcal{L}).$$

Перед формулировкой следующего утверждения рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}} = \{\ddot{\mu} : \ddot{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}, \mu \in \mathfrak{M}\},$$

состоящее из n -наборов событий $\ddot{\mu}$, когда $\mu \in \mathfrak{M}$. И определим террасную M-операцию над множеством $\mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}}$ следующим образом для $Y \subseteq \mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} \text{ter}(\{\ddot{\mu}, \mu \in Y\} // \mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}}) &= \left(\bigcap_{\mu \in Y} \ddot{\mu} \right) \left(\bigcap_{\mu \in Y^c} \ddot{\mu}^{(c)} \right) = \\ &= \left\{ \text{ter}(\{\mu_i, \mu \in Y\} // \{\mu_i, \mu \in \mathfrak{M}\}), i = 1, \dots, n \right\} = \\ &= \left\{ \bigcap_{\mu \in Y} \mu_i \bigcap_{\mu \in Y^c} \mu_i^c, i = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 4 (о средневероятном событии для террасной M-операции). *Средневероятное событие для террасной M-операции $\text{ter}(\{\ddot{\mu}, \mu \in Y\} // \mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}})$ над множеством $\mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}}$ совпадает с соответствующей террасной операцией над множеством средневероятных событий $\mathcal{E}(\cdot/\ddot{\mu})$, когда $\ddot{\mu} \in \mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}}$:*

$$\mathcal{E} \left(\text{ter}(\{\ddot{\mu}, \mu \in Y\} // \mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}}) / \mathfrak{M}\ddot{\mathfrak{M}} \right) =$$

⁶Для сравнения — запись этого же соотношения с использованием аббревиатуры:

$$\widehat{\mu}_{\mathfrak{M}^{(c)}}^c = \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}^c = \Omega - \widehat{\mu}_{\mathfrak{M}}.$$

$$= \bigcap_{\mu \in Y} \mathcal{E}(\cdot/\dot{\mu}) \bigcap_{\mu \in Y^c} \left(\mathcal{E}(\cdot/\dot{\mu}) \right)^c.$$

$$= \text{ter} \left(\{ \mathcal{E}(\cdot/\dot{\mu}), \mu \in Y \} // \{ \mathcal{E}(\cdot/\dot{\mu}), \mu \in \mathfrak{M} \} \right).$$

Доказательства лемм 2, 3 и 4 не приводятся из-за ограничений на объем этой работы.

6 О средневероятном террасном разбиении

Понятие *средневероятного события* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ для множества событий \mathfrak{M} , которое можно рассматривать как разбиение пространства всеобщих элементарных исходов на два террасных события

$$\Omega = \hat{\mu}_{\mathfrak{M}} + (\hat{\mu}_{\mathfrak{M}})^c,$$

каждое из которых — средневероятное событие⁷, может быть обобщено до понятия *средневероятного террасного разбиения* $\mu_{\mathfrak{M}^*}^*$ для множества $\mathfrak{M}^* = \{ \mu^* : \mu \in \mathfrak{M} \}$ однородных террасных разбиений $\mu^* \in \mathfrak{M}^*$, каждый фрагмент которого — средневероятное событие.

Более подробно. Пусть \mathfrak{M} — множество событий $\mu \in \mathfrak{M}$. В каждом из этих событий выделены подмножества, образующие n -набор событий

$$\dot{\mu} = \{ \mu_i \subseteq \mu : i = 1, \dots, n \} \subset \mathcal{A},$$

который порождает террасное разбиение μ на 2^n террасных события:

$$\mu = \sum_{Y \subseteq \dot{\mu}} \mu(Y//\dot{\mu}),$$

где сокращенно обозначены

$$\mu(Y//\dot{\mu}) = \mu \cap \text{ter}(Y//\dot{\mu})$$

— фрагменты 2^n -террасного разбиения события $\mu \in \mathfrak{M}$. Обозначим это 2^n -террасное разбиение

$$\mu^* = \{ \mu(Y//\dot{\mu}), Y \subseteq \dot{\mu} \},$$

а множество всех таких 2^n -террасных разбиений

$$\mathfrak{M}^* = \{ \mu^* : \mu \in \mathfrak{M} \}.$$

Определение (средневероятное террасное разбиение). *Средневероятным 2^n -террасным разбиением события*⁸

$$\text{ter}(\mathfrak{M}//\mathfrak{M}) = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu,$$

⁷Так как: $(\hat{\mu}_{\mathfrak{M}})^c = \hat{\mu}_{\mathfrak{M}^c}$.

⁸В частности, когда $\mu = \Omega$ для всех $\mu \in \mathfrak{M}$, это событие совпадает с пространством всеобщих элементарных исходов: $\text{ter}(\mathfrak{M}//\mathfrak{M}) = \Omega$.

характеризующим совокупность 2^n -террасных разбиений μ^* всех событий $\mu \in \mathfrak{M}$ в том же среднем смысле, в котором *средневероятное событие* $\hat{\mu}_{\mathfrak{M}}$ характеризует совокупность событий \mathfrak{M} , называется множеством средневероятных террасных событий

$$\mu_{\mathfrak{M}^*}^* = \{ \mu(Y//\dot{\mu})_{\mathfrak{M}(Y)}, Y \subseteq \dot{\mu} \},$$

образующих разбиение события $\text{ter}(\mathfrak{M}//\mathfrak{M})$:

$$\text{ter}(\mathfrak{M}//\mathfrak{M}) = \sum_{Y \subseteq \dot{\mu}} \mu(Y//\dot{\mu})_{\mathfrak{M}(Y)},$$

в котором каждый фрагмент разбиения

$$\mu(Y//\dot{\mu})_{\mathfrak{M}(Y)}$$

— средневероятное террасное событие для множества террасных событий

$$\mathfrak{M}(Y) = \{ \mu \cap \text{ter}(Y//\dot{\mu}), \mu \in \mathfrak{M} \}.$$

Для формулировки экстремальных свойств средневероятного террасного разбиения придется определить вероятностное расстояние между террасными разбиениями, как сумму вероятностных расстояний между их *соответствующими* фрагментами (террасными событиями), и вероятностное расстояние от террасного разбиения до множества террасных разбиений, как сумму вероятностных расстояний до каждого террасного разбиения из данного множества.

Определение (вероятностное расстояние между террасными разбиениями). Пусть $\mu, \lambda \in \mathfrak{M}$ — два события, которые характеризуются террасными разбиениями μ^* и λ^* . *Вероятностное расстояние между террасными разбиениями μ^* и λ^* определяется как*

$$\rho(\mu^*, \lambda^*) = \sum_Y \mathbf{P} \left(\mu(Y_{\mu}//\dot{\mu}) \Delta \lambda(Y_{\lambda}//\dot{\lambda}) \right)$$

— сумма вероятностных расстояний между *соответствующими* фрагментами этих террасных разбиений, где соответствие взаимно однозначно и, в частности, для дулетов $\dot{\mu} = \{ \mu_1, \mu_2 \}$ и $\dot{\lambda} = \{ \lambda_1, \lambda_2 \}$ может быть записано в виде:

$$\emptyset_{\mu} \leftrightarrow \emptyset_{\lambda},$$

$$\{ \mu_1 \}_{\mu} \leftrightarrow \{ \lambda_1 \}_{\lambda},$$

$$\{ \mu_2 \}_{\mu} \leftrightarrow \{ \lambda_2 \}_{\lambda},$$

$$\{ \mu_1, \mu_2 \}_{\mu} \leftrightarrow \{ \lambda_1, \lambda_2 \}_{\lambda},$$

из которого ясно, как устроено это соответствие в общей ситуации.

Определение (вероятностное расстояние от террасного разбиения до множества террасных разбиений). Пусть \mathfrak{M}^* — множество однородных террасных разбиений $\mu^* \in \mathfrak{M}^*$, а $\alpha^* = \{ \alpha(Y) :$

$Y \subseteq \ddot{\alpha}$ — террасное разбиение такого же рода. *Вероятностное расстояние террасного разбиения* α^* до множества террасных разбиений \mathfrak{M}^* определяется как

$$\rho(\alpha^*, \mathfrak{M}^*) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \rho(\alpha^*, \mu^*)$$

— сумма вероятностных расстояний от α^* до каждого террасного разбиения $\mu^* \in \mathfrak{M}^*$.

Кроме того, требуется ввести обозначение

$$\mathcal{P}(\alpha^*) = \{\mathbf{P}(\alpha(Y)) : Y \subseteq \ddot{\alpha}\}$$

для эвентологического распределения террасного разбиения

$$\alpha^* = \{\alpha(Y) : Y \subseteq \ddot{\alpha}\},$$

связанного с произвольным событием $\alpha \in \mathcal{A}$ и его 2^n -террасным разбиением α^* , порожденным n -набором событий $\ddot{\alpha}$. А также — обозначение для среднего эвентологического распределения террасных разбиений из множества \mathfrak{M}^* :

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{M}^*} = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}(\mu^*).$$

Обозначим также \mathcal{A}^* — множество всех 2^n -разбиений, порожденных n -наборами $\ddot{\alpha} = \{\alpha_i \in \mathcal{A} : i = 1, \dots, n\}$ событий из алгебры \mathcal{A} .

Теорема 2 (об экстремальности средневероятного террасного разбиения). *Средневероятное террасное разбиение $\mu_{\mathfrak{M}^*}^*$ для множества однородных террасных разбиений \mathfrak{M}^* минимизирует вероятностное расстояние до \mathfrak{M}^* :*

$$\rho(\mu_{\mathfrak{M}^*}^*, \mathfrak{M}^*) = \min_{\substack{\alpha^* \in \mathcal{A}^* \\ \mathcal{P}(\alpha^*) = \widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{M}^*}}} \rho(\alpha^*, \mathfrak{M}^*) \quad (11)$$

среди таких террасных разбиений, которые имеют среднее эвентологическое распределение

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{M}^*} = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}(\mu^*)$$

среди всех эвентологических распределений террасных разбиений из \mathfrak{M}^ .*

Доказательство этой теоремы не имеет принципиальных отличий от доказательства аналогичной теоремы для средневероятного события, но существенно более громоздко. Поэтому здесь оно не приводится, чтобы быть опубликованным в специальном издании, лояльном к размеру публикации.

7 Заключение

Понятие о *средневероятном событии* для данного множества событий возникло совсем недавно в силу необходимости детально разобраться с корректным определением *совокупной системы событий* и

ее отличия от *совокупности систем событий* [7]. Новое понятие *совокупной системы событий* потребовалось в эвентологическом системном анализе [5], [6] при событийном описании совокупности субъектов, которая в приложениях зачастую воспринимается как некий совокупный субъект, обладающий “персональными” эвентологическими характеристиками, схожими с персональными эвентологическими характеристиками отдельных субъектов.

Средневероятное событие, как и *средневероятное террасное разбиение*, может быть использовано в любом эвентологическом исследовании множества однородных событий или множества однородных систем событий, когда необходима средняя характеристика события или системы событий, такого же рода, какому принадлежат отдельные события и системы событий, составляющие данную совокупность.

Например, в эвентологической теории нечетких событий [4], которая определяет нечеткое событие как множество колмогоровских событий, *средневероятное событие* играет роль средней событийной характеристикой нечеткого мнения множества субъектов (источников данной нечеткости). Поскольку средневероятное событие обладает всеми свойствами колмогоровского события и наступает с определенной вероятностью, оно может служить эвентологически корректным обоснованием процедуры *дефаззификации*.

Список литературы

- [1] О. Ю. Воробьев. Определение вероятностей распространения горения и оценка развития средних контуров пожара. *Охрана лесных ресурсов Сибири. Красноярск, ИЛиД СО АН СССР*, 1:43–67, 1975.
- [2] О. Ю. Воробьев. О множественных характеристиках состояний распределенных вероятностных процессов. *Известия СО АН СССР*, 3:3–7, 1977.
- [3] О. Ю. Воробьев. *Среднемерное моделирование*. Наука, Москва, 1984, 133с.
- [4] О. Ю. Воробьев. *Эвентология*. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с.
- [5] О. Ю. Воробьев. Эвентологический системный анализ безопасности. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):113–125, 2012.
- [6] О. Ю. Воробьев. Эвентологический анализ систем: система событий во внесистемных обстоятельствах. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):126–130, 2012.
- [7] О. Ю. Воробьев. Совокупная система и совокупность систем: эвентологическое сходство и различие. *Труды XI Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):131–138, 2012.
- [8] *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. БРЭ, Москва, 1999.
- [9] H. E. Robbins. On the measure of a random set. *Ann. Math. Statist.*, 15/16:70–74/342–347, 1944/45.

Исследование потребителей товаров для дома для открытия нового торгового комплекса в г. Красноярск

Наталья Викторовна Выдрыч
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск

Аннотация. Статья посвящена открытию нового торгового комплекса в Красноярске. В статье актуализируется проблема рационального выбора метода исследования с целью усиления конкурентных преимуществ «Атмосферы дома» на рынке. Также представлены результаты исследования.

Ключевые слова. Торговый комплекс, исследование, методы исследования, анкетирование, факторы покупки товара, форма обслуживания

1 Введение

В 2011 г. сеть «Командор» решила выйти на новые форматы торговли. Владельцы начали строительство на ул. Вавилова в Свердловском районе г. Красноярск нового торгового комплекса «Атмосфера дома» с якорными арендаторами гипермаркет «Аллея» и мебельным магазином «Командор».

В связи с этим собственниками торгового комплекса была поставлена задача проанализировать потенциальную целевую аудиторию, их основные потребности и предпочтения и на основе полученных результатов исследования разработать концепцию позиционирования нового торгового комплекса.

Выбор метода исследования

Для сбора маркетинговых данных было необходимо выбрать метод исследования. Разные методы применяются в зависимости от поставленной цели и круга решаемых задач. Например, кабинетные исследования занимаются выявлением и систематизацией информации, связанной с изучаемыми рынками. Качественные исследования решают задачи, связанные с глубинным изучением рынков и объектов, количественные – с потребительским поведением. Также количественные исследования (quantitative research) нацелены на получение количественных данных о состоянии рынка, реакции респондентов на какое-либо событие, объемах производства и т.п. Важным является и то, что в ходе исследования изучается мнение достаточно большого количества людей (большая выборка), а это может служить показателем объективности и достоверности полученных данных.

Анкетирование

Проанализировав потенциальный объем работы, для исследования был выбран метод опроса (анкетирование).

Существуют различные виды анкетирования. По числу опрашиваемых выделяют групповое и индивидуальное анкетирование. В зависимости от ситуации и аудитории различают анкетирование по месту работы, в целевой аудитории (например, в библиотеке) или на улице. Важное значение имеет способ доставки анкет. Здесь различают следующие разновидности:

- раздаточное (курьерское) анкетирование. Позволяет одному анкетеру одновременно опрашивать много человек путем раздачи анкет в аудитории;
- почтовое анкетирование, при котором анкета доставляется респонденту по почте;
- прессовый опрос. В этом случае анкета публикуется в средствах массовой информации. Данный метод имеет ограниченные возможности, поскольку социолог не формирует выборочную совокупность, не в состоянии спрогнозировать, кто ответит на анкету. Применяется в журналистике.

Каждая из перечисленных разновидностей метода имеет как преимущества, так и недостатки. Например, в случае почтового анкетирования возникает проблема возврата анкет, а в случае прессового опроса невозможно распространить результаты исследования на всю изучаемую совокупность (подписчиков газеты), поскольку здесь только респондент решает, принимать ему участие в опросе или нет.

Письменный опрос (анкетирование) – один из методов количественных исследований, представляющий собой самостоятельное заполнение анкеты респондентом без участия интервьюера.

Данный метод используется для проведения опросов среди гомогенных групп и специфичных групп населения, отличительной особенностью данного метода является относительная анонимность опроса, что позволяет получить ответы на сензитивные вопросы¹.

Таблица 1

Преимущества метода:	Недостатки метода:
<ul style="list-style-type: none">• Относительно невысокие материальные затраты;• Отсутствует влияние личности интервьюера;• Возможно использование визуальных средств;• У респондента	<ul style="list-style-type: none">• Риск невозврата анкет, пропусков в ответах на вопросы;• Отсутствует возможность разъяснения сложных моментов.

¹ Вопросы, направленные на получение сведений, которые люди предпочитают утаивать

достаточно времени на обдумывание вопросов.	
---------------------------------------------	--

Композиция анкеты включает:

1. титульный лист;
2. вводная часть (содержит обращение к респонденту, краткое указание на цель опроса, анонимность опроса, организация, которая проводит опрос, инструкции по заполнению анкеты, выражение благодарности респонденту);
3. основная (содержательная) часть (вопросы анкеты, направленные на исследование проблемы);
4. социально-демографическая часть (паспортичка).

Вначале анкеты располагаются вопросы наиболее простые, нейтральные по смыслу. Кроме своей прямой познавательной задачи они обеспечивают «завязку» беседы, формируют психологическую установку на сотрудничество. Их задача - заинтересовать собеседника, ввести в курс обсуждаемых проблем. Сложные вопросы, требующие размышлений работы памяти, размещаются в середине анкеты. Трудные вопросы, поставленные вначале, могут отпугнуть, и это приведет к отказу участвовать в опросе.

Учет особенностей восприятия респондентом текста анкеты - ведущий принцип, из которого следуют и все другие требования к ее построению. Смысловые «блоки» опросного листа должны быть примерно одного объема. Каждый вопрос должен сопровождаться четкой инструкцией, как на него отвечать: отметить какие-то пункты, отвечать в свободной форме и т. п.

Блок вопросов о социально-демографических характеристиках респондента - это «паспортичка» об объективном положении и статусе опрашиваемого. Она необходима для анализа собранных данных, для оценки представительности результатов, проведения сравнительных исследований и т. д. Нельзя начинать опрос с «паспортички», которая вообще тревожит некоторых людей. Сведения о демографических данных опрашиваемого полезно относить в заключение анкетного листа.

Нумерация вопросов анкеты включает в себе порядок, последовательность их расположения. Кодировка включает присвоение шифра ответам - их наличие или отсутствие (но не ее содержание). Тем самым код (условное число) позволяет трансформировать эмпирический материал в символы (нумералы), пригодные для дальнейших расчетов (числовых операций).

Анализ целевой аудитории «Товары для дома»

География исследования: г. Красноярск.

Генеральная совокупность населения города Красноярска в возрасте четырех лет и старше (4+), проживающих в домохозяйствах хотя бы с одним работающим телевизором – 917.200 тыс. человек.

Требуемый размер выборки 384 человека.

Характеристика выборки анализа целевой аудитории с доверительной вероятностью (точность) 95% и доверительным интервалом (погрешность) 5%.

Тестовая версия анкеты была опробована в фокус-группе и переделана с учетом полученных результатов для удобства использования респондентами.

Данные, полученные от респондентов, были обработаны с помощью таблиц Excel, проанализированы и представлены в виде диаграмм.

Респонденты были разбиты на группы по следующим видам расходов на одно домохозяйство: до 15000 руб., 16000-20000 руб., 21000-25000 руб., 26000-30000 руб., 31000 – 40000 руб., 41000-50000 руб., 51000 руб. и более, также была рассмотрена средняя по всем группам.

Результаты исследования

Проанализировав группы респондентов, можно отметить, что по распределению ежемесячных расходов домохозяйства расходы на продовольственные товары, расходы на непродовольственные товары, расходы на платные услуги в большинстве групп колеблется в одном диапазоне и составляют следующую пропорцию 44:30:26% (рис. 1).



Рис.1. Распределение ежемесячных расходов домохозяйства

Пограничные группы: в группе с доходом 21000-25000 руб. возрастают расходы на продовольственные товары (пропорция 50:28:21), в группе с доходом 31000-40000 руб. возрастают расходы на непродовольственные товары (пропорция 39:31:28), в группе с доходом более 51000 руб. возрастают расходы на платные услуги (пропорция 38:30:31).

Потребительские расходы всех групп респондентов расположились в следующем порядке убывания: расходы на покупку продуктов для домашнего питания (28%), жилищно-коммунальные расходы (11%). Далее в группах потребительские расходы меняются в зависимости от дохода респондентов.

Бытовая химия вышла на первое место и составляет 25% среди прочих расходов на товары для дома. (рис. 2).

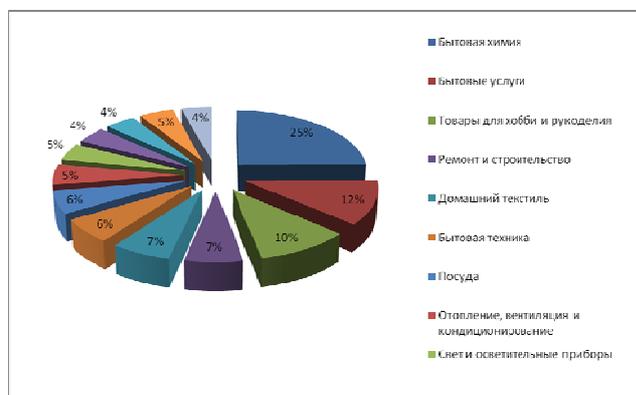


Рис. 2. Ежемесячные расходы на товары для дома

Средняя покупка у большинства респондентов свыше 1000 руб. и составляет в среднем 5288,71 руб. (рис. 3).

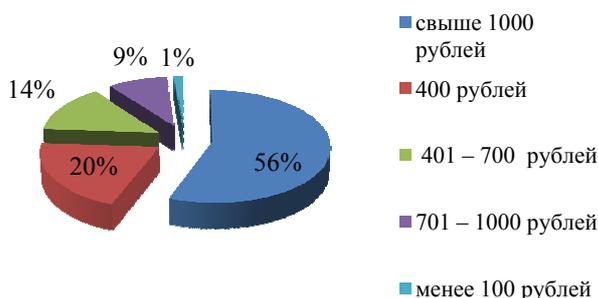


Рис. 3. Средняя сумма покупки товаров для дома в месяц

% На вопрос «Укажите, пожалуйста, какую сумму денег Вы тратите или готовы потратить на каждую из перечисленных групп товаров?» мнения в группах разделились, но часть ответов совпала, так, большинство респондентов в среднем готовы потратить на шторы в среднем 7929,75 руб., на бытовую химию 1662,29 руб., на посуду 4987,15 руб., на бытовую технику 22728,82 руб., на осветительные приборы 6039,31 руб., на комплектующие к осветительным приборам 1797,64 руб., на мебель и оборудование для ванн 18412,93 руб., на санфаянс 12762,03 руб., на комплектующие к сантехнике 4695,45 руб., на отопление, вентиляцию и кондиционирование 8506,35 руб., на товары для хобби и рукоделия 5584,19 руб.

Для каждой группы респондентов разные факторы влияют на выбор торговой точки и каждая группа респондентов имеет свой источник информации о товарах для дома.

На вопрос «Укажите, как часто Вы приобретаете следующие товары?» мнения разделились, только в категории «Санфаянс» 19% респондентов покупали данный товар 1 раз и 14% от случая к случаю.

Для 35% респондентов самым важным фактором при покупке товаров для дома является «гарантированное качество», для 31% важен предыдущий личный опыт. Самая предпочтительная форма обслуживания – самообслуживание, ей отдали предпочтение 67%.

61% респондентов приобретает крупные покупки за счет личных средств.

Заключение

Создание нового торгового комплекса «Атмосфера дома» входит в стратегическую программу развития компании «Командор». Сроки окупаемости подобных проектов в последнее время увеличиваются, однако при открытии новых торговых площадей с учетом того, что уже имеется, компания рассчитывает получить синергетический эффект², т.к. рынок крупных торговых центров в г.Красноярск находится на стадии роста.

Правый берег города был выбран из соображений расширения покупательской аудитории. Появление нового объекта очень удобно для жителей кварталов, расположенных на сравнительно небольшом расстоянии от выбранной площадки строительства.

² Синергетический эффект — возрастание эффективности деятельности в результате интеграции, слияния отдельных частей в единую систему за счет т. н. системного эффекта.

На основании данных исследования у «Атмосферы дома» сформирован торговый кластер, в котором много специализированных магазинов и офисов. Собственное пищевое производство расположено рядом с торговым комплексом и работает у компании уже более двух лет. Планируется создание качественных парковок и проездов, где смогут разместиться 1300 машин. Будет обустроена развязка между ул. Вавилова и ул. Семафорная. В «Атмосферы дома» создадут фудкорт и детскую площадку.

Несмотря на прошедший кризис, продажа товаров для дома по результатам исследования остается выгодным бизнесом, так как потребление данной группы товаров независимо от ситуации в экономике остается на стабильном уровне.

Система самообслуживания является самым удобным методом сбыта ходовых продовольственных товаров промышленного производства, получаемых в фабричной упаковке, при условии, что их продажа заранее обеспечена широкой рекламой или известностью марки. Самообслуживание создаёт благоприятную психологическую обстановку в процессе купли-продажи и изменяет статус покупателя: из статичного и пассивного покупатель становится динамичным и активным.

Результаты проведенного исследования помогли выделить целевую аудиторию, выявить наиболее востребованные категории товаров, помочь выбрать подходящую модель обслуживания и оптимизировать доступ к торговому центру «Атмосфера дома».

Литература

- [1] Ядов, В.А. Стратегия социологического исследования. Описание, объяснение, понимание социальной реальности. - 7-е изд. - М.: "Добросвет", 2003.
- [2] Кравченко, А.И. Социология в вопросах и ответах: учеб. пособие. - М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2007.
- [3] Кузнецов, И.Н. Технологии социологического исследования: Учебно-методическое пособие. - М.: ИКЦ "МарТ"; Ростов н/Д: издательский центр "МарТ", 2005.
- [4] Интернет-источники:
- [5] <http://www.step-by-step.ru/services/marketing-agency/data-capture-methods/>
- [6] <http://www.dela.ru/articles/komandor-hipermarket/>
- [7] <http://www.dela.ru/articles/kras-retail-uskoril/>
- [8] <http://websurveys.ru/market/marts12.htm>
- [9] <http://www.expertcom.ru/glossary/50-synergy.html>
- [10] <http://www.adsmarket.com.ua/articles/analytics/3997/>

Ветвление решений в нелинейных задачах размещения объектов и планирования эксперимента

Юрий Дмитриевич Григорьев

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет (ЛЭТИ)
Санкт-Петербург
yuri_grigoriev@mail.ru

Аннотация. Приводятся примеры феномена ветвления решений при построении D - и A -оптимальных конфигураций опорных ориентиров в дальномерной задаче навигации и при построении байесовских и максимин D -эффективных планов в задачах планирования эксперимента.

Ключевые слова. ветвление решений, точка бифуркации, опорные точки, байесовские и максимин D -эффективные планы эксперимента.

1 Введение

Под математической задачей ветвления понимается задача нахождения решений нелинейного уравнения вида

$$F(y; \lambda) = 0, \quad y = y(\lambda) \in R^1, \quad \lambda \in R^1. \quad (1)$$

где нелинейный оператор F , зависящий от параметра λ , применяется к неизвестной функции или вектору $y = y(\lambda)$. Одним из основных является вопрос, имеет ли уравнение (1) решение y при заданном значении λ . Затем возникают вопросы, сколько оно имеет решений и как их число изменяется в зависимости от λ . Особенный интерес представляет явление ветвления (бифуркации), когда при λ , переходящем через критическое значение λ_0 , называемое точкой ветвления (бифуркации), заданное решение уравнения (1) расщепляется на два или более решений. С математической точки зрения это классическая задача о неявных функциях, когда частная производная, или якобиан, $J = \partial F / \partial \lambda$ обращается в нуль в соответствующей точке.

Теория ветвления нелинейных уравнений, у истоков которой стоял еще Ньютон, в настоящее время хорошо изучена как в теоретическом плане, так и в чисто вычислительном аспекте, см., например, [4],[7]. Основные задачи, решаемые в рамках этой теории суть следующие [7, с. 71]: определение значений параметра λ , при котором меняется число решений уравнения (1) (теория существования); определение числа решений в окрестности точки бифуркации λ_0 (теория кратности); поведение решений в окрестности λ_0 (спектральная теория).

Цель данной статьи — представить содержательные примеры ветвления решений нелинейных уравнений,

возникающих в теории размещения объектов и задачах планирования эксперимента. Статья организована на следующем образом. В разделе 2 представлены два элементарных примера, иллюстрирующие идею ветвления решений. С незначительными дополнениями они заимствованы из [4], [7]. В разделе 3 рассматривается навигационная задача определения места судна по двум опорным ориентирам (маякам), располагаемым на эллипсе. Показано, что соответствующее нелинейное уравнение (1) имеет точки бифуркации при D - и A -оптимальных конфигурациях маяков. В разделе 4 рассматриваются примеры ветвления решений в задачах байесовского и максимин D -эффективного планирования эксперимента. Уточняется численный результат байесовского планирования для модели Михаэлиса–Ментен, представленный в [13]. На основе представленных в [15] результатов предлагается алгоритм приближенного оценивания первой точки ветвления максиминных D -эффективных планов в случае экспоненциальной модели регрессии.

2 Элементарные примеры точек бифуркации

Рассмотрим два примера — узел ветвления алгебраической кривой 3-го порядка декартов лист и краевую задачу для тонкого стержня с заземленными концами.

2.1 Декартов лист

Идею ветвления продемонстрируем на примере алгебраической кривой третьего порядка декартов лист, уравнение которой в прямоугольной системе имеет вид

$$\lambda^3 + y^3 - 3\lambda y = 0. \quad (1)$$

Обычное исследование этой кривой на особые точки приводит к заключению, что начало координат $\lambda_0 = 0$ является узловой точкой (рис. 1), в которой происходит ветвление решений уравнения (1). Из геометрических соображений видим, что таких ветвей будет три, при этом $y(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

Используя метод диаграмм Ньютона [4, с. 41-44], находим разложения трех ветвей декартова листа (1) в

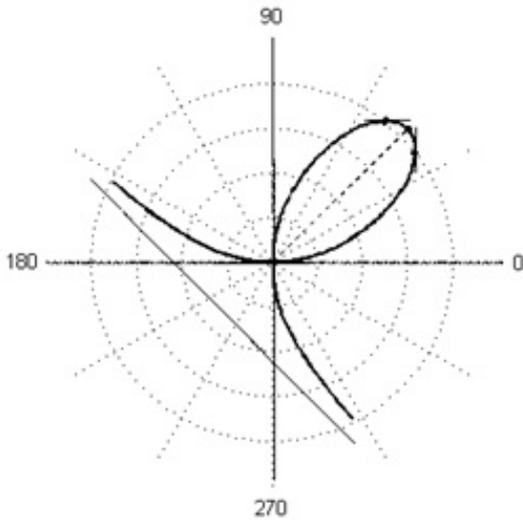


Рис. 1: Кривая декартов лист.

начале координат, которые имеют вид

$$y_1(\lambda) = \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3^4}\lambda^5 + \frac{1}{3^6}\lambda^8 + \frac{4}{3^9}\lambda^{11} + o(\lambda^{11}), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$y_{2,3}(\lambda) = \pm\sqrt{3}\lambda^{1/2} - \frac{1}{6}\lambda^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{72}\lambda^{7/2} - \frac{1}{162}\lambda^5 + o(\lambda^5), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (3)$$

В данном случае мы имеем ответы на все поставленные выше вопросы: точка ветвления одна, ее кратность равна трем, поведение решений представлено уравнениями (2), (3).

2.2 Тонкий стержень с заземленными концами

Следуя [10], рассмотрим тонкий стержень с заземленными концами, лежащими в плоскости Oxz . Заданы перемещения концов стержня в направлении оси x . Форма стержня описывается двумя функциями $u(x)$ и $w(x)$ — безразмерными перемещениями вдоль осей x и z . Эти функции удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям и граничным условиям:

$$w''(x) + \lambda w(x) = 0, \quad (4)$$

$$w(0) = w(1) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u'(x) + \frac{1}{2}[w'(x)]^2 = -\beta\lambda, \quad (5)$$

$$u(0) = -u(1) = c > 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Постоянная λ в (5) и (6) пропорциональна осевому напряжению в стержне. Положительная постоянная

$c > 0$ в (6) пропорциональна заданному перемещению конца. Физическая постоянная $\beta > 0$ задана.

Задача (5)–(6) нелинейная, потому что в (6) присутствует $(w')^2$.

Обозначим

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Решением задачи (5) будет

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \lambda_n; \\ A_n w_n(x) = A_n \sin n\pi x, & \lambda = \lambda_n. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь A_n — постоянная, которая пока не определена. Чтобы получить $u(x)$ при $\lambda = \lambda_n$ согласно (6), подставим $w_n = A_n w_n(x)$ в (6) и проинтегрируем с использованием начального условия $u(0) = c$. В результате получаем

$$u(x) = u_n(x) \equiv c - \beta\lambda_n \left(1 + \frac{A_n^2}{4\beta}\right)x - \frac{n\pi A_n^2}{8} \sin 2n\pi x. \quad (8)$$

Применяя условие $u(1) = -c$, находим

$$c = c_n \left(1 + \frac{A_n^2}{4\beta}\right). \quad (9)$$

Уравнение (9) выражает связь между конечным сокращением и амплитудой и дает “реакцию” стержня. На рис. 2 приведено графическое изображение уравнения (9). Для каждого n действительные решения (9) при данном A_n могут существовать тогда и только тогда, когда $c \geq c_n$. Решения ответвляются от невыпущенной формы $A_n = 0$ в точках c_n . Таким образом, решение линейной задачи определяет точки бифуркации решений нелинейной задачи. Для любого c из интервала $c_n \leq c \leq c_{n+1}$ существует $2n + 1$ решений. При $c < c_1$ потеря устойчивости невозможна. Из (9) видим, что $dc/dA_n = c_n A_n / 2\beta$. Таким образом, для фиксированной амплитуды A парабола на рис. 2, ответвляющаяся c_n , имеет более крутой наклон, чем парабола, ответвляющаяся из c_m , если $m < n$. Поэтому параболы не пересекаются.

3 Задачи размещения объектов

Задачи размещения объектов часто возникают на практике и издавна привлекают к себе внимание специалистов [11], [5]. В общем случае задача размещения заключается в отыскании точки B в пространстве R^n , находящейся на кратчайшем расстоянии от заданного множества N точек A_1, A_2, \dots, A_N пространства R^n . В частности, при $n = 2$ и $N = 3$ и евклидовом расстоянии $|\cdot|$ в R^2 приходим к различным задачам геометрии треугольника, связанным с точками пересечения чевиан и другими замечательными точками треугольника. К задачам данного типа относятся, в частности, известные задачи Ферма

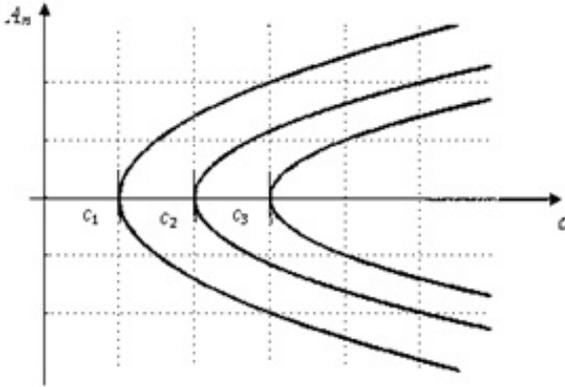


Рис. 2: Ветвление решений в задаче с заземленным стержнем: семейство парабол.

и Лемуана. Первая из них интересна в том плане, что в ней речь идет о расстояниях до *фиксированных точек* (в последующем изложении — до опорных точек), в то время как вторая задача интересна в том отношении, что приводит к методу наименьших квадратов и, соответственно, к *матрице Якоби* — основному предмету нашего внимания в последующих разделах.

3.1 Задача Ферма

Впервые одну из задач размещения поставил Ферма в XVIII веке [19]. Она заключается в поиске такой точки U на плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин треугольника ABC минимальна, т.е.

$$AU + BU + CU \rightarrow \min. \quad (1)$$

Это одна из так называемых задач Штейнера (1796-1863), который рассмотрел класс аналогичных геометрических задач на минимум и максимум.

Обозначим $U = (u_1, u_2)$ — искомая точка, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ — заданные точки. Целевая функция (1), подлежащая минимизации, принимает вид

$$J(u) = \sum_{i=1}^3 d_i(u) \rightarrow \min, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} d_i(u) &= |u - a_i| \\ &= \sqrt{(u_1 - x_i)^2 + (u_2 - y_i)^2}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

С геометрической точки зрения U — это точка, из которой стороны треугольника должны быть видны под углом 120° [11, с. 106]. Если тупой угол треугольника равен или больше 120° , то искомая точка совпадает с вершиной тупого угла. В общем случае точку

U необходимо искать численно. Отметим также, что точка Ферма является частным случаем так называемой точки Торичелли [8, с. 144-151], которая определена и при тупом угле, большем 120° .

Обозначим $a_1 = d_2 d_3$, $a_2 = d_1 d_3$, $a_3 = d_1 d_2$. Из необходимого условия экстремума $\partial J / \partial u = 0$ приходим к нелинейному уравнению

$$u = G(u), \quad (3)$$

где нелинейный оператор $G : R^2 \rightarrow R^2$ задается координатными функциями

$$g_1 = \sum_{i=1}^3 x_i p_i, \quad g_2 = \sum_{i=1}^3 y_i p_i, \quad p_i = \frac{a_i}{\sum_{i=j}^3 a_j}.$$

Функция $J(u)$ является выпуклой [11, с. 108], и, следовательно, согласно общему свойству выпуклых функций, имеет единственный минимум, если, конечно, все три точки не лежат на одной прямой. С другой стороны, уравнение (4) позволяет воспользоваться для его решения методом итераций [3, с. 483] в виде

$$u_{n+1} = G(u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Процесс итераций сходится к точке минимума с любого начального приближения $u_0 \in ABC$, кроме его вершин. Константу Липшица K в неравенстве

$$|G(u') - G(u'')| \leq K |u' - u''|, \quad u', u'' \in ABC,$$

оценивать нет необходимости, однако примеры показывают, что для области, совпадающей с плоскостью треугольника, эта константа может быть больше единицы. Следовательно, сжимающим оператор G может быть только в малой окрестности точки минимума.

Правильность решения можно проверить по значению функционала J в искомой точке, которое может быть заранее вычислено [8, с. 149]:

$$J(U) = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{2} + 2S\sqrt{3}}, \quad (5)$$

где S — площадь треугольника ABC .

Сделаем последнее замечание. Предположим, что требуется найти не точку Ферма, а точку M , сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника минимальна:

$$J(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \arg \min_{P \in ABC} J(P). \quad (6)$$

Решение этой задачи можно получить, используя теорему Лейбница [8, с.69]: если P — произвольная точка, G — центр тяжести треугольника (центроид), то

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2. \quad (7)$$

Из теоремы Лейбница вытекает, что функционал (6) принимает минимальное значение, если точки M и G совпадают. Поскольку центроид G — это точка пересечения медиан, то это означает, что среди всех точек плоскости точка пересечения медиан является точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника имеет наименьшее значение.

Нетрудно показать, что координаты точки M определяются как среднее арифметическое координат вершин треугольника

$$M = \frac{1}{3}(A + B + C). \quad (8)$$

Обычно точки U и M достаточно близки. Поэтому вторую из них можно использовать в методе итераций в качестве начального приближения к первой.

Пример 3.1. Найдем точку U для треугольника с вершинами $A = (0, 0)$, $B = (4, 3)$, $C(6, 0)$. Минимизируя $J(P)$ методом итераций, получаем $U = (3.8329, 1.6310)$, при этом

$$d_1 = 4.1655, \quad d_2 = 1.3791, \quad d_3 = 2.7123, \quad J(U) = 8.2569.$$

Значения $J(U)$, полученные численно и согласно (5), совпадают. Для точки пересечения медиан в той же задаче соответственно получаем $M = (10/3, 1)$ и

$$d_1 = 3.4801, \quad d_2 = 2.1082, \quad d_3 = 2.8480, \quad J(M) = 8.4363.$$

Отсюда видим, что $J(M) > J(U)$. \square

3.2 Задача Лемуана

Точка Лемуана K минимизирует сумму квадратов расстояний d_i от нее до сторон треугольника ABC , т.е.

$$J(K) = \arg \min_{P \in ABC} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2). \quad (9)$$

Поиск точки K назовем задачей Лемуана.

Пусть $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ — длины сторон треугольника ABC и

$$\mathcal{L}_i : A_i x + B_i y + C_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

— уравнения прямых, проходящих через стороны BC , AC и AB соответственно. Очевидно,

$$\begin{aligned} \rho_1 &:= a = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \\ \rho_2 &:= b = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \quad \rho_3 := c = \sqrt{A_3^2 + B_3^2}. \end{aligned}$$

Поскольку расстояния до прямых \mathcal{L}_i (взяты со знаком минус или плюс в зависимости от того, с какой стороны от прямой лежит искомая точка) вычисляются как

$$d_i = \frac{A_i x + B_i y}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = \frac{A_i x + B_i y}{\rho_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

то решение задачи Лемуана (9) сводится к методу наименьших квадратов, а сама точка Лемуана $K = (u_1, u_2)$ определяется по формуле

$$u = (F^T F)^{-1} F^T y, \quad (10)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} A_1/\rho_1 & B_1/\rho_1 \\ A_2/\rho_2 & B_2/\rho_2 \\ A_3/\rho_3 & B_3/\rho_3 \end{pmatrix}, \quad y = - \begin{pmatrix} C_1/\rho_1 \\ C_2/\rho_2 \\ C_3/\rho_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

т.е. F — матрица, составленная из двух столбцов $f_j \in R^3$ и трех строк $g_i \in R^2$:

$$\begin{aligned} f_1 &= (A_i/\rho_i)_{i=1}^3, \quad f_2 = (B_i/\rho_i)_{i=1}^3, \\ g_i &= (A_i/\rho_i, B_i/\rho_i), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Как показано в [8, с. 103], значение функционала $J(K)$ в (9) равно

$$J(K) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (12)$$

В задачах нелинейного оценивания и планирования эксперимента (ПЭ) матрица F называется матрицей Якоби, а матрица $M = F^T F$ — информационной матрицей Фишера. В ПЭ элементы F считаются “управляемыми”, т.е. функциями плана эксперимента или, что эквивалентно, конфигурационных параметров планируемой измерительной системы (системы сейсмических, метеорологических и т.п. станций).

В задаче Лемуана матрица Якоби F характеризуется тем, что длины ее строк равны, т.е. $|g_i| = 1$ (F — разновидность матрицы Колмогорова–Мальцева [6]). Это приводит к тому, что

$$\text{tr} M^{-1} = \frac{2}{|M|},$$

т.е. это означает эквивалентность D - и A -критериев оптимальности размещения объектов [9], в нашем случае — вершин треугольника ABC .

Пример 3.2. Найдем точку Лемуана K для треугольника с вершинами $A = (0, 0)$, $B = (4, 3)$, $C(6, 0)$. Согласно (10) получаем $K = (3.9729, 1.4594)$, при этом

$$d_1 = 0.8770, \quad d_2 = 1.4594, \quad d_3 = 1.2162, \quad J(K) = 4.3784.$$

Легко проверить, что значения $J(K)$, полученные согласно (10) и $J(K) = (y - Fu)^T (y - Fu)$, совпадают. \square

3.3 Постановка навигационной задачи размещения

Одной из задач навигации является задача определения места судна. Существуют разные ее постановки

и способы решения [6], [12]. Задача дальномерного позиционирования, или дальномерная задача (ДЗ), в простейшей постановке состоит в решении системы n уравнений

$$|\beta - a_i| = D_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

где $a_i \in R^m$ — заданные маяки, $\beta \in R^m$ — неизвестный объект, D_i — дальности до объекта. Рассмотрим плоскую ($m = 2$) ДЗ в случае измерения двух величин $r_i = D_i^2$ — квадратов дальностей от объекта до маяков. Модель измерений имеет вид

$$\begin{aligned} Mr_i &= \eta(a_i, \beta) = (\beta_1 - x_i)^2 + (\beta_2 - y_i)^2, \\ \mathbb{D}r_i &= \sigma^2, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\eta(x, y; \beta)$ — функция отклика, $a_i = (x_i, y_i)$ — заданные маяки, σ^2 — дисперсия измерений. Нас интересует такое размещение

$$\xi = \{a_i = (x_i, y_i) \in R^2 : i = 1, 2\} \quad (15)$$

маяков a_i , при котором оно будет оптимальным в определенном статистическом смысле. Более точно, наша цель — показать, что существуют D - и A -оптимальные размещения ξ^* , которые допускают ветвления, т.е. имеют точки бифуркации.

Согласно (14) и (15) получаем

$$F(\xi; \beta) = \frac{\partial \eta(a, \beta)}{\partial \beta} = 2 \begin{pmatrix} \beta_1 - x_1 & \beta_1 - y_1 \\ \beta_1 - x_2 & \beta_1 - y_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

и, следовательно, определена информация Фишера $M(\xi, \beta) = F^T F$. Так как всякий определитель — это ориентированный объем, натянутый на строки соответствующей матрицы, то $|M(\xi, \beta)|$ и $\text{tr} M^{-1}(\xi, \beta)$ являются функциями векторов g_i — строк матрицы Якоби F , и угла ω между ними. Функционалы

$$|M(\xi; \beta)| = \sigma^{-4} |F(\xi; \beta)|^2, \quad (17)$$

$$\text{tr} M^{-1}(\xi; \beta) = \frac{|g_1|^2 + |g_2|^2}{\sigma^2 |M(\xi; \beta)|} \quad (18)$$

соответствуют критериям D - и A -оптимальности, используемым в планировании эксперимента при построении оптимальных планов.

Пусть область $\Omega \subset R^2$, в которой могут быть размещены маяки, является дугой эллипса:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in R^2 : x = a \cos \varphi, \\ & y = b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad a \geq b > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим $\lambda = 1 - e^2$, где $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ — эксцентриситет эллипса Ω . Первый маяк разместим в точке $a_1 = (a, 0)$. Требуется найти размещения ξ_D и ξ_A , для которых

$$|M(\xi_D; \beta)| = \max, \quad \text{tr} M^{-1}(\xi_A; \beta) = \min.$$

3.4 D -размещения в дальномерной задаче

Для размещения ξ согласно (17) получаем

$$\begin{aligned} |M(\omega; \lambda)| &= a^4 (\cos^2 \omega + \lambda \sin^2 \omega) \sin^2 \omega, \\ \lambda &= e^2 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда

$$\frac{\partial |M(\omega; \lambda)|}{\partial \omega} = \cos \omega \sin \omega (1 - 2 \cos^2 \omega - 2 \lambda \sin^2 \omega). \quad (21)$$

Исследование уравнения $\frac{\partial |M(\omega; \lambda)|}{\partial \omega} = 0$ показывает, что при $\lambda < \frac{1}{2}$ значения $\omega \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ соответствуют минимуму функционала $|M(\omega; \lambda)|$, а третий сомножитель в (21) имеет два корня $\omega_1 = k_1 \pi$, $\omega_2 = k_2 \pi$, симметричные относительно $\omega = \frac{\pi}{2}$. Именно они соответствуют максимуму $|M(\omega; \lambda)|$, при этом

$$k_1 + k_2 = 1, \quad |M(\omega_1; \lambda)| = |M(\omega_2; \lambda)|.$$

Решая относительно ω уравнение

$$1 - 2 \cos^2 \omega - 2 \lambda \sin^2 \omega = 0, \quad (22)$$

находим

$$\omega(\lambda) = \begin{cases} \omega_1 = \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}, \quad \omega_2 = \pi - \omega_1, & \lambda < \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \lambda \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, точка $\lambda = \frac{1}{2}$ является точкой ветвления кратности два функции $\omega = \omega(\lambda)$, заданной неявно уравнением разветвления

$$F(\omega; \lambda) := 1 - 2 \cos^2 \omega - 2 \lambda \sin^2 \omega = 0. \quad (23)$$

Данное уравнение разрешимо не только относительно ω , но и относительно $\lambda = \lambda(\omega)$, а именно:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{2} (1 - \text{ctg}^2 \omega), \quad \frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4}. \quad (24)$$

График функции (24) представлен на рис. 3. Функция $\lambda(\omega)$ является вогнутой унимодальной и достигает максимума в точке $\omega = \frac{\pi}{2}$, при этом $\lambda(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$. Поэтому, задавая конкретное значение $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, как графически и численно легко находим искомые значения ω_1 и ω_2 .

3.5 A -размещения в дальномерной задаче

Перейдем к рассмотрению A -критерия. Для размещения ξ двух маяков на эллипсе (19) получаем

$$\text{tr} M^{-1}(\omega; \lambda) = \frac{1 + \cos^2 \omega + \lambda \sin^2 \omega}{a^2 (\cos^2 \omega + \lambda \sin^2 \omega) \sin^2 \omega}, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (25)$$

Далее, без потери общности, полагаем $a = 1$.

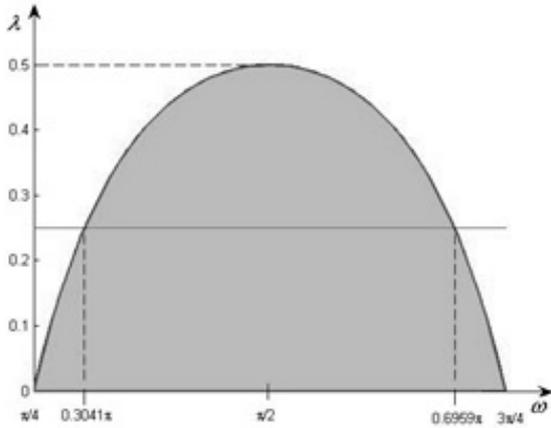


Рис. 3: D -критерий (24). Функция $\lambda(\omega)$.

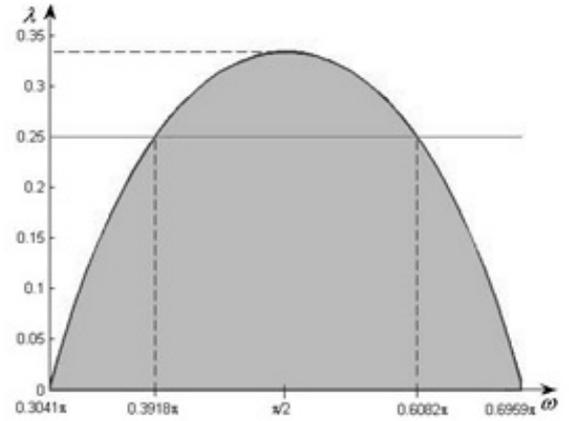


Рис. 4: A -критерий (28). Функция $\lambda(\omega)$.

Дифференцируя (25) по ω приходим к неявно заданной функции $\omega = \omega(\lambda)$:

$$F(\omega; \lambda) = \cos \omega (\cos^2 \omega + \lambda \sin^2 \omega - \sqrt{2} + 1) = 0. \quad (26)$$

Анализ (26) показывает, что при $\lambda < \lambda^* = \sqrt{2} - 1$ значение $\omega = \frac{\pi}{2}$ соответствует максимуму функционала $\varphi(\omega; \lambda) = \text{tr} M^{-1}(\omega; \lambda)$, а второй сомножитель в (26) имеет два корня $\omega_1 = k_1\pi$, $\omega_2 = k_2\pi$, симметричные относительно $\omega = \frac{\pi}{2}$ и соответствующие минимуму $\text{tr} M^{-1}(\omega; \beta)$, при этом

$$k_1 + k_2 = 1, \quad \text{tr} M^{-1}(\omega_1; \beta) = \text{tr} M^{-1}(\omega_2; \beta).$$

Таким образом, в данном случае всегда имеем два равнозначных решения.

В случае $\lambda \geq \lambda^*$ значение $\omega = \frac{\pi}{2}$ соответствует единственному максимуму функционала $\varphi(\omega; \lambda) = \text{tr} M^{-1}(\omega; \lambda)$. Таким образом, точка $\lambda^* = \sqrt{2} - 1$ является точкой ветвления функции $\omega = \omega(\lambda)$, заданной неявно уравнением разветвления

$$F(\omega; \lambda) := \cos^2 \omega + \lambda \sin^2 \omega - \lambda^* = 0. \quad (27)$$

Отсюда

$$\lambda(\omega) = \lambda^* - (1 - \lambda^*) \text{ctg}^2 \omega, \quad \omega_1 \leq \omega < \omega_2, \quad (28)$$

где

$$\omega_i = \begin{cases} \arccos(\sqrt{2} - 1) = 0.8716, & i = 1, \\ \pi - \arccos(\sqrt{2} - 1) = 2.2699, & i = 2. \end{cases} \quad (29)$$

График функции (28) представлен на рис. 4. Она является вогнутой унимодальной и достигает максимума в точке $\omega = \frac{\pi}{2}$, при этом $\lambda(\pi/2) = \sqrt{2} - 1 = 0.4142$. Задавая конкретные значения $\lambda \in [0, \lambda^*]$, численно легко находим искомые значения k_1 и k_2 .

3.6 Основной результат

Объединяя результаты размещения маяков для критериев D - и A -оптимальности, заключаем, что имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

(1) $\lambda^* \in (0, 1)$ — точка ветвления, имеющая вид

$$\lambda^* = \begin{cases} \frac{1}{2}, & D\text{-критерий}, \\ \sqrt{2} - 1 = 0.4142, & A\text{-критерий}; \end{cases}$$

(2) $\lambda = 1 - e^2$, $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ — эксцентриситет эллипса (19).

Тогда

(1) оптимальный угол засечки $\omega(\lambda)$ определяется выражением

$$\omega(\lambda) = \begin{cases} \omega_1 = \arctg \sqrt{\frac{1-\lambda^*}{\lambda^*-\lambda}}, \quad \omega_2 = \pi - \omega_1, & \lambda < \lambda^*, \\ \frac{\pi}{2}, & \lambda \geq \lambda^*. \end{cases} \quad (30)$$

(2) функция $\lambda(\omega) = \omega^{-1}(\lambda)$ определяется выражением

$$\lambda(\omega) = c - (1 - c) \text{ctg}^2 \omega, \quad \omega_- \leq \omega < \omega_+, \quad (31)$$

где

$$\omega_{\mp}(D) = \begin{cases} \pi/4, \\ 3\pi/4, \end{cases} \quad \omega_{\mp}(A) = \begin{cases} \arccos(\sqrt{2} - 1), \\ \pi - \arccos(\sqrt{2} - 1). \end{cases} \quad (32)$$

Пример 3.3. В табл. 1 и табл. 2 представлены D - и A -оптимальные углы $\omega(\lambda)$ для эллипсов с различными значениями $\lambda = 1 - e^2$. При $\lambda = 1$ ($e = 0$) получаем частный случай эллипса — окружность. \square

4 Ветвление в задачах планирования эксперимента

В работах по планированию эксперимента многие авторы на ряде эмпирических примеров отмечали, что с ростом неопределенности априорной информации (в частности, с ростом дисперсии априорного распределения, априорного интервала неопределенности и т.д.) количество опорных точек соответствующего оптимального плана также увеличивается. Строго говоря, данный эффект отличается от рас-

Таблица 1: D -оптимальные размещения маяков на эллипсе, $\omega_i = k_i\pi$, $\|a_1\| = 1$.

λ	Углы ω_i , $i = 1, 2$, [град]		Критерий $ M(\omega^*; \lambda) $
	ω_1	ω_2	
0.01	45.2880°	134.7120°	0.2525
0.04	46.1880°	133.8120°	0.2604
0.09	47.8440°	132.1560°	0.2747
0.16	50.4900°	129.5100°	0.2976
0.25	54.7380°	125.2620°	0.3334
0.36	62.1180°	117.8820°	0.3906
0.49	81.9540°	98.0460°	0.4902
$\lambda = \frac{1}{2}$	90°	90°	0.5000
$\lambda > \frac{1}{2}$	90°	90°	λ

Таблица 2: A -оптимальные размещения маяков на эллипсе, $\omega_i = k_i\pi$, $i = 1, 2$, $\|a_1\| = 1$, $\lambda^* = \sqrt{2} - 1$.

λ	Углы $\omega = k_i\pi$, $i = 1, 2$, [град]		Критерий $\text{tr}M^{-1}(\omega^*; \beta)$
	ω_1	ω_2	
0.01	50.2842°	129.7158°	5.7701
0.04	51.3659°	128.6341°	5.5953
0.09	53.3525°	126.6475°	5.3039
0.16	56.6246°	123.3754°	4.8959
0.25	62.1004°	117.8996°	4.3713
$\lambda = \lambda^*$	90°	90°	3.4142
$\lambda > \lambda^*$	90°	90°	$1 + \lambda^{-1}$

смотренных выше примеров тем, что в точке бифуркации возникают не различные новые ветви решений, а меняется структура самого решения в целом. Таким образом, речь идет о своеобразном ветвлении в пространстве вероятностных мер, а не в некотором функциональном пространстве.

Впервые эффект ветвления решений в задачах байесовского планирования обнаружен в работе [16]. Из последующих исследований, в том числе для критериев максиминного типа, отметим, в частности, работы [13], [2] — [18]. Теоретическое обоснование данного феномена осуществлено в работе [15]. Кроме того, там же показано, почему максимин D -эффективные планы содержат большее число точек, чем байесовские D -эффективные планы.

Байесовской и максиминной критерии оптимальности исходят из возможности задания априорной информации о параметрах модели регрессии. Мы рассмотрим соответствующие оптимальные планы для нелинейных регрессионных моделей на конкретных примерах, заимствованных с небольшими уточнениями из [15] и [1].

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное по параметрам уравнение регрессии

$$\mathbb{M}(y/x) = \eta(x, \theta), \quad (1)$$

параметры θ которого необходимо оценить по результатам эксперимента. Качество оценок $\hat{\theta}$ параметров θ принято характеризовать значением некоторого функционала Φ от дисперсионной матрицы $D(\xi, \theta) = M^{-1}(\xi, \theta)$, где ξ — план эксперимента и

$$M(\xi, \theta) = \int_X f(x, \theta) f^T(x, \theta) \xi(dx). \quad (2)$$

— информационная матрица Фишера, определяемая вектором базисных функций

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta} \\ &= \left(\frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta_m} \right)^T, \quad \theta \in \Theta \subset R^m. \end{aligned}$$

Полагаем, что $f(x, \theta)$ обладает достаточной гладкостью.

При нелинейной параметризации функции отклика (1) матрица $M(\xi, \theta)$, а, следовательно, и функционал $\Phi[M(\xi, \theta)]$, зависят от истинного значения параметра $\theta_0 \in \Theta \subset R^m$.

В последнее время большое внимание уделяется байесовскому критерию D -оптимальности

$$\Phi(\xi) = -\mathbb{M}_\pi \log |M(\xi, \theta)| = - \int_\Theta \log |M(\xi, \theta)| \pi(d\theta). \quad (3)$$

План, оптимальный относительно этого критерия, приближенно максимизирует ожидаемый прирост информации Шеннона, доставляемой экспериментом, см., например, [16]. План эксперимента

$$\xi_B = - \arg \min_{\xi \in \Xi} \int_\Theta \log |M(\xi, \theta)| d\pi(\theta). \quad (4)$$

называется байесовским D -оптимальным. Построение байесовских планов (4) ничем не отличается от построения обычных локально D -оптимальных планов.

Наиболее важным инструментом для проверки оптимальности байесовских планов является теория эквивалентности, которая является обобщением результатов линейной теории. В случае критерия (3) можно показать [14], что план ξ_B является байесовским D -оптимальным тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\int_\Theta d(x, \xi_B, \theta) \pi(d\theta) \leq m, \quad (5)$$

где m — число неизвестных параметров $\theta \in \Theta \subset R^m$ и

$$d(x, \xi_B, \theta) = f^T(x, \theta) M^{-1}(\xi_B, \theta) f(x, \theta) \quad (6)$$

— функция дисперсии предсказания.

Разновидностью байесовского подхода к планированию эксперимента, на примере которого мы покажем эффект ветвления, является байесовское D -эффективное планирование. Введем величину

$$\text{eff}(\xi, \theta) = \left(\frac{|M(\xi, \theta)|}{|M(\xi_0, \theta)|} \right)^{1/m}, \quad \theta \in \Theta \subset R^m. \quad (7)$$

Величина (7) называется эффективностью плана ξ относительно локально D -оптимального плана ξ_0 .

Пусть $\pi(\theta)$ — априорное распределение информации о θ и

$$Q(\xi, \theta) = \text{eff}^{-1}(\xi, \theta) = \left(\frac{|M(\xi_0, \theta)|}{|M(\xi, \theta)|} \right)^{1/m}. \quad (8)$$

План эксперимента

$$\xi_B = \arg \min_{\xi \in \Xi} \int_{\Theta} Q(\xi, \theta) \pi(d\theta), \quad (9)$$

минимизирующей величину $Q(\xi, \theta)$ относительно распределения $\pi(\theta)$, называется байесовским D -эффективным планом.

Аналогично, если априорная информация о параметре θ задана лишь в виде априорной области Θ , то опираясь на ту же величину $Q(\xi, \theta)$, можно рассмотреть максимум D -эффективные планы

$$\xi_M = \arg \max_{\xi \in \Xi} \min_{\theta \in \Theta} Q(\xi, \theta). \quad (10)$$

Далее в качестве примеров ветвления приводятся ξ_B - и ξ_M -эффективные планы для конкретных моделей регрессии.

4.2 Байесовские D -эффективные планы

Для проверки байесовской D -эффективности плана эксперимента ξ используется критерий оптимальности являющийся обобщением классической теоремы эквивалентности Кифера–Вольфовица [17]. Приведем его к форме, представленной в [13]. Пусть

$$\eta(x, \theta) = \sum_{i=1}^k \mu_i \omega_i(x, \lambda), \quad (11)$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in R^k$ — линейные параметры, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-k}) \in \Omega \subseteq R^{m-k}$ — нелинейно входящие параметры, $\theta = (\mu, \lambda) \in \Theta \subset R^m$, $\omega_i(x, \lambda)$ — функции, зависящие только от нелинейных параметров λ . Положим также $\Omega = \text{supp } \pi(\lambda)$ — носитель априорного распределения нелинейных параметров λ , ξ_0 — локально D -оптимальный план для $\lambda_0 \in \Omega$. Справедливо следующее утверждение: план ξ является байесовским D -эффективным относительно распределения $\pi(\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \varphi(x, \xi, \Omega) &= \int_{\Omega} [d(x, \xi, \lambda) - m] Q(\xi, \lambda) \pi(d\lambda) \\ &= \varphi_1(x, \xi, \Omega) - m \int_{\Omega} Q(\xi, \lambda) \pi(d\lambda) \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

По аналогии с (6), функция $\varphi(x, \xi, \Omega)$ называется экстремальной функцией.

Рассмотрим задачу построения планов ξ_B для дробно-рациональной модели Михаэлиса–Ментен

$$\eta(t; \mu, \lambda) = \mu \omega(t; b) = \frac{\mu t}{\lambda + t}, \quad \mu, \lambda > 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

Локально D -оптимальный план ξ_0 для модели Михаэлиса–Ментен имеет вид

$$\xi_0 = \left\{ t_1 = \frac{\lambda T}{2\lambda + T}, t_2 = T \right\}. \quad (14)$$

Поэтому для равномерного насыщенного плана $\xi = \{t_1 = t, t_2 = T\}$ со свободной опорной точкой $t_1 = t$ получаем

$$Q(\xi, \lambda) = \frac{T^2}{4} \frac{(\lambda + t)^2}{\lambda t (T + \lambda) (T - t)}, \quad 0 < a \leq \lambda < b < \infty.$$

Используя параметризацию Меласа, определим область задания

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= [a, b] \\ &= \{ \lambda : 0 < \lambda_0(1 - z) \leq \lambda \leq \lambda_0/(1 - z) \}, \\ &0 \leq z < 1, \end{aligned}$$

априорного равномерного распределения

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda}(x) &= \mathbb{P}\{\lambda < x\} \\ &= \begin{cases} (x - a)/(b - a), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, $a = \lambda_0(1 - z)$, $b = \lambda_0/(1 - z)$. Область $\Omega(0) = \{\lambda_0\}$ соответствует вырожденному распределению и приводит к локально оптимальному планированию. Область $\Omega(1) = (0, \infty)$ соответствует несобственному распределению π_{λ} , являющееся предельным при $z \rightarrow \infty$.

Обозначим

$$S = \sqrt{(b - a) - T \log \frac{b + T}{a + T}}, \quad U = \sqrt{(b - a) + T \log \frac{b}{a}}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- (1) функция регрессии $\eta(x, \theta)$ имеет вид (14);
- (2) $\Omega = [a, b]$ — носитель распределения (15);
- (3) $t_2 = T$ — точка плана $\xi_B = \{t_1 = t, t_2 = T\}$.

Тогда точка t_1 насыщенного плана ξ_B имеет вид

$$t_1(z) = \frac{T}{1 + U/S}. \quad (16)$$

Доказательство теоремы 1 проводится прямой минимизацией по t функционала

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{\Omega} Q(\xi, \lambda) \pi(d\lambda) = \frac{T}{4t(T - t)(b - a)} \\ &\times \left\{ (b - a)T - (T - t)^2 \log \frac{b + T}{a + T} + t^2 \log \frac{b}{a} \right\} \end{aligned}$$

Поскольку условие $(\partial/\partial t)\Phi(t) = 0$ приводит к квадратному уравнению относительно t , то это и дает требуемый результат. Отметим также, что поскольку $\lim_{z \rightarrow 1} U/S = 1$, то $\lim_{z \rightarrow 1} t_1(z) = T/2$. Поведение опорной точки t_1 и функционала Φ как функций $z \in [0, 1]$, показано на рис. 5 и 6.

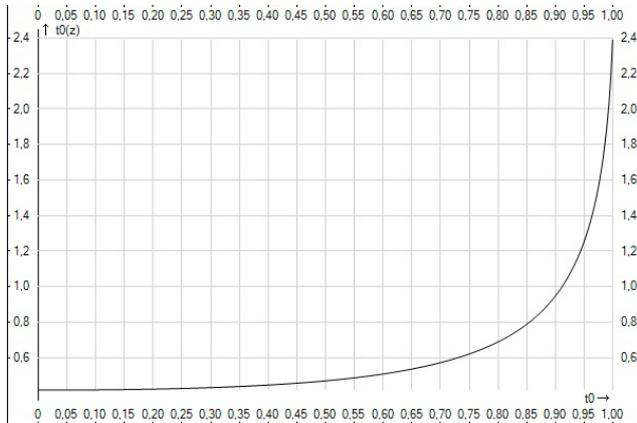


Рис. 5: Точка t_1 двухточечного байесовского D -эффективного плана.

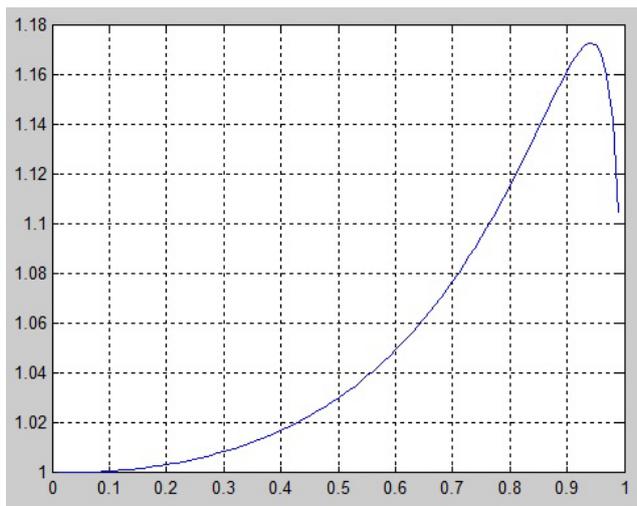


Рис. 6: Эффективность двухточечного байесовского D -эффективного плана.

Пример 4.1. Положим $T = 5$, $\lambda_0 = 0.5$. Узлы $t_1(z)$, значение функционала $\Phi(t_1)$ и дисперсия $\mathbb{D}\pi_\lambda$, как функции z , представлены в табл. 3. \square

Характерное поведение функционала $\Phi(\xi_B)$, который начинает резко убывать при $z \rightarrow 1$, является индикатором того, что при $z \rightarrow 1$ имеют место бифуркации узла $t_1(z)$ насыщенного плана ξ_B .

Пример 4.2. Модель Михаэлиса–Ментен. Отыскание точек бифуркации z_k проводится, в общем случае, с помощью необходимого и достаточного условия оптимальности (12). Численно находим первую точку $z_1 = 0.835$, при этом для плана $\xi_1 = \xi_B(z_1; 2)$

Таблица 3: Байесовские D -эффективные насыщенные планы $\xi_B(z; 2) = \{t_1(z), t_2 = T\}$, $\lambda_0 = 0.5$ — истинное значение параметра λ , $T = 5$ — верхняя граница изменения λ , $t_1(0) = \lambda_0 T / (2\lambda_0 + T) = 0.4166$ — опорная точка локально D -оптимального плана, $\Phi(z; 2)$ — значение функционала, $\mathbb{D}\pi_\lambda = (b - a)^2 / 12$ — дисперсия априорного распределения π_λ .

z	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$t_1(z)$	0.4179	0.4307	0.4691	0.5718	0.9487
$\Phi(z; 2)$	1.0008	1.0085	1.0302	1.0771	1.1617
$\mathbb{D}\pi_\lambda$	0.0009	0.0110	0.0469	0.1917	2.0419

имеем $\Phi(\xi_1) = 1.1313$. При $z_1 < z \leq z_2$ D -эффективный план $\xi_B(z; N)$ является трехточечным. В частности, при $z = 0.9 \in (0.835, z_2]$ получаем

$$\xi_B(0.9; 3) = \begin{pmatrix} t_1 = 0.162, & t_2 = 1.055, & t_3 = 5.000 \\ p_1 = 0.028, & p_2 = 0.472, & p_3 = 0.500 \end{pmatrix}.$$

при этом $\Phi(0.9; 3) = 1.1507$. Насыщенный план $\xi_B(0.9; 2)$ дает большее, чем $\Phi(0.9; 3)$, значение $\Phi(0.9; 2) = 1.1617$, что и указывает на его неоптимальность. С другой стороны, на это указывает и поведение экстремальной функции $\varphi(x, \xi_B(z; 2), \Omega)$, для которой не выполняется условие (12): это отражает рис. 7, где показан график функции $y = \varphi_1(x, \xi_B(z; 2), \Omega)$, которая в определенной области $X \subset [0, 5]$ превышает величину $y_0 = 2 \times \int_{\Omega} Q(\xi, \lambda) \pi(d\lambda)$.

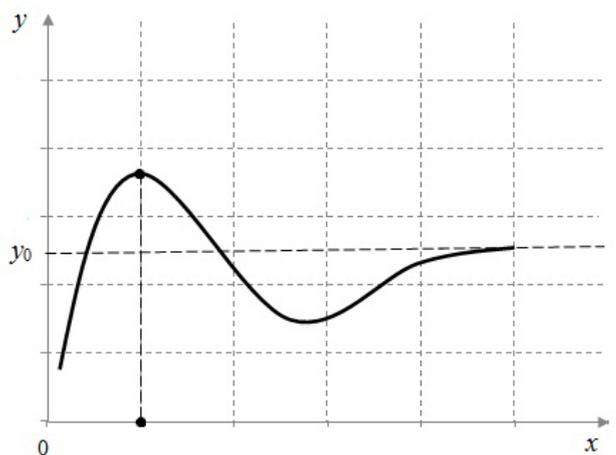


Рис. 7: Экстремальная функция двухточечного байесовского D -эффективного плана, $T = 5$.

Отметим, что указанная в [1] точка бифуркации $z_1 = 0.67$ определена неточно, поэтому и указанный трехточечный план

$$\xi_B(0.8; 3) = \begin{pmatrix} t_1 = 0.18, & t_2 = 1.04, & t_3 = 5.000 \\ p_1 = 0.02, & p_2 = 0.48, & p_3 = 0.500 \end{pmatrix},$$

для которого $\Phi(0.8; 3) = 1.1276$, не является оптимальным. Действительно, для насыщенного $\xi_B(0.8; 2)$ и трехточечного $\xi_B(0.8; 3)$ планов при $z = 0.8$ имеем $\Phi(0.8; 2) = 1.1153 < 1.1276 = \Phi(0.8; 3)$.

С другой стороны, в той же работе отмечается следующий эмпирический факт: при ветвлении опорных точек их совокупный вес сохраняется, т.е. все последующие поколения точек плана сохраняют вес породивших их точек бифуркации. В рассмотренном примере этот феномен подтверждается. \square

4.3 Максимин D -эффективные планы

Пусть ξ — план на $X \subset R^1$ с массами p_k опорных точек x_k , $k = 1, \dots, n$. Тогда информационная матрица плана ξ задается выражением

$$M(\xi, \lambda) = \sum_{k=1}^n p_k M(x_k, \lambda),$$

где $M(x, \lambda)$ — информация о λ в точке плана $x \in \xi$. Величина

$$Q(\xi, \lambda) = \left(\frac{|M(\xi(\tilde{\lambda}), \lambda)|}{|M(\xi^*(\lambda), \lambda)|} \right)^{1/m}, \quad \lambda \in \Lambda \subset R^m, \quad (17)$$

показывает потерю информации в случае, если $\xi^*(\lambda)$ — локально D -оптимальный план для истинного значения параметра λ , в то время как экспериментатор использует план $\xi := \xi(\tilde{\lambda})$ для предполагаемого значения $\tilde{\lambda}$. Таким образом, $Q(\xi, \lambda) := \text{eff}(\xi)$ — D -эффективность плана ξ , аналогичная (7).

План ξ_M называется (стандартизованным) максимин D -оптимальным, если

$$\min_{\lambda \in \Lambda} Q(\xi_M, \lambda) = \max_{\xi \in \Xi} \min_{\lambda \in \Lambda} Q(\xi, \lambda). \quad (18)$$

В работе [15] показано, что для данного критерия число опорных точек в плане ξ_M может быть сколь угодно большим. Оптимальность n -точечных планов $\xi_M(n)$ может быть проверена с помощью теоремы эквивалентности, сформулированной в [20].

Идею ветвления решений проиллюстрируем на примере однопараметрической экспоненциальной модели

$$\eta(x, \lambda) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda \in [1, \infty), \quad x \in [0, 1], \quad (19)$$

рассмотренной в работе [15]. В ней представлены n -точечные планы $\xi_M(n)$ для $n = 2, 3, 4, 5, 6$, но не указаны точки бифуркаций Λ_k , $k = 1, 2, \dots$, в которых количество опорных точек максимин D -оптимальных планов возрастает на единицу. Наша цель — опираясь на конкретный план $\xi_M(2)$, указать верхнюю оценку для первой точки бифуркации Λ_1 .

Поскольку информация о λ в точке x для модели (19) имеет вид

$$M(x, \lambda) = \frac{\partial \eta(x, \lambda)}{\partial \lambda} = x^2 e^{-2\lambda x}, \quad (20)$$

то локально D -оптимальный план ξ^* сосредоточен в точке $x^* = \lambda^{-1}$, при этом $M(x^*, \lambda) = (\lambda e)^{-2}$. Отсюда для произвольного одноточечного плана $\xi = \{x\}$ согласно (17) получаем

$$Q(\xi, \lambda) = (\lambda x)^2 e^{2(1-\lambda x)}, \quad x \in [0, 1]. \quad (21)$$

Обозначим Λ_1, Λ_2 — точки ветвления планов ξ_M , $[\Lambda_0, \Lambda] \subset [1, \Lambda_2]$ — область изменения параметра λ . Положим также

$$Q(\xi, \lambda_{k-1}) = \min_{\lambda \in [\Lambda_{k-1}, \Lambda_k]} Q(\xi, \lambda), \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$Q_{k-1} = \max_{\xi \in \Xi} Q(\xi, \lambda_{k-1}) = Q(\xi_M(k), \lambda_{k-1}), \quad k = 1, 2$$

— эффективность плана $\xi_M(k)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

- (1) функция регрессии имеет вид (19);
- (2) $\lambda \in [\Lambda_0, \Lambda] \subset [1, \Lambda_2]$, $x \in [0, 1]$;
- (3) $\xi_M(1) = \{x_0\}$;
- (4) Q_1 — эффективность плана $\xi_M(2)$.

Имеют место следующие утверждения:

- (1) если $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \subset [\Lambda_0, \Lambda_1]$, то

$$x_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} Q(x, \lambda_0) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \log \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right), \quad \lambda_0 \in \{\lambda_1, \lambda_2\}; \quad (22)$$

- (2) если $\lambda \in [\Lambda_0, \Lambda]$, $Q_1 = (\xi_M(2), \lambda_1)$, то наилучшим одноточечным планом $\xi_M(1) = \{x_0\}$ является точка $\{x_0\}$, удовлетворяющая уравнению

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_1} \left(1 + \log \frac{\lambda_1}{\sqrt{Q_1}} + \log x_0 \right); \quad (23)$$

- (3) если $\lambda \in [\Lambda_0, \Lambda]$, $Q_1 = (\xi_M(2), \lambda_1)$ и x_0 удовлетворяет уравнению (23), то верхняя оценка точки ветвления Λ_1 удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_1 = \frac{1}{x_0} \left(1 + \log \frac{x_0}{\sqrt{Q_1}} + \log \Lambda_1 \right). \quad (24)$$

Утверждение (1) теоремы 2 следует из того, что для одноточечного плана эффективность $Q(x, \lambda)$ является унимодальной функцией по $x \in [0, 1]$. Утверждение (2) очевидно. Утверждение (3) вытекает из следующих рассуждений.

Пусть Λ — верхняя граница изменения λ , для которой вычислен двухточечный план $\xi_M = \{(x_1, p_1), (x_2, p_2)\}$, Q_1 — его D -эффективность. Если $\Lambda_1 < \Lambda$, то для значений $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda]$ одноточечный план $\{x_0\}$ будет хуже двухточечного, т.е. $Q_0(x_0, \lambda) =: Q_0 < Q_1$. В случае $\Lambda < \Lambda_1$ план $\{x_0\}$ будет лучше любого двухточечного. На этом соображении строится алгоритм вычисления точки ветвления Λ_1 , а, следовательно, и последующий ход рассуждений, из которых вытекает утверждение (3).

Пример 4.3. Экспоненциальная модель. В работе [15] приводится двухточечный план

$$\xi_M(2) = \left(\begin{array}{cc} x_1 = 0.142, & x_2 = 0.771 \\ p_1 = 0.553, & p_2 = 0.447 \end{array} \right), \lambda \in [1, 10].$$

Пусть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Согласно (22) получаем $\xi_M(1) = \{x_0\} = 0.4023$, $Q_0(x_0, \lambda_0) = 0.5349$, где $\lambda_0 = 1$ или 5. Является ли план $\xi_M(1)$ в точке $x_0 = 0.4023$ наилучшим? Другими словами, выполняется ли неравенство $\Lambda_1 > 5$ или для $\lambda \in [1, 5]$ найдется более оптимальный, чем $\xi_M(1)$, двухточечный план $\xi_M(2)$, что означало бы $\Lambda_1 < 5$?

Для представленного плана $\xi_M(2)$ имеем $Q_1 = 0.4821$. Отсюда согласно (23) находим $x_0 = 0.2558$, $Q_0 = 0.2899$. Неравенство $Q_0 < Q_1$ свидетельствует о том, что план $\xi_M(1)$ в точке $x_0 = 0.2558$ менее эффективен плана $\xi_M(2)$. Следовательно, $\Lambda_1 < 10$. Решая уравнение (24), находим $\Lambda_1 = 5.7154$. Таким образом, при $\lambda \in [1, 5]$ D-эффективными являются однотоочечные планы $\xi_M(1)$.

Полученное с помощью данного алгоритма значение Λ_1 является оценочным. Используя его в качестве начального приближения, прямыми вычислениями эффективностей одно- и двухточечных планов $\xi_M(1)$ и $\xi_M(2)$ можно найти "точное" значение точки ветвления Λ_1 . Оно оказывается равным $\Lambda_1 = 5.1355$, при этом $\xi_M(1) = \{x_0 = 0.3956\}$ и

$$Q(\xi_M(1), 5.1355) = Q(\xi_M(2), 5.1355) = 0.5242.$$

Однако значение $\Lambda_1 = 5.1355$ снова является лишь оценкой, поскольку точное значение Λ_2 нам неизвестно. \square

5 Заключение

В представленной работе дан краткий обзор примеров ветвления решений, возникающих в задачах размещения и планирования эксперимента. Круг соответствующих примеров подобного типа, возникающих в рассмотренных предметных областях, может быть существенно расширен. Однако вычислительные трудности по поиску точек ветвления таких решений пока трудно разрешимы. Поэтому следует ожидать, что основные усилия по развитию теории ветвления в теории размещения и планирования эксперимента будут направлены именно в эту сторону.

Список литературы

- [1] Старосельский Ю. М. Исследование оптимальных планов эксперимента для нелинейных по параметрам регрессионных моделей. Автореферат ... канд. ф.
- [2] Мелас В. Б. Старосельский Ю. М. . Исследование максиминно-эффективных планов для модели Михаэлиса - Ментен. *Вестн. С.-Петербург. ун-та*, 1 (2):41–50, 2007.
- [3] Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений. Том 1.* Наука, М., 1966.
- [4] Вайнберг М. М., Треногин В. А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* Наука, М., 1969.
- [5] Забудский Г. Г., Нежинский И. В. Решение задачи размещения в евклидовом пространстве с запрещенной областью. *Вестник ОмГУ*, Вып. 2:17–19, 1999.
- [6] Барабанов О. О., Барабанова Л. П. *Математические задачи дальномерной навигации.* Физматлит, М., 2007.
- [7] Келлер Дж. Б., Антман С. *Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения.* Мир, М., 1974.
- [8] Зетель С. И. *Новая геометрия треугольника.* Учпедгиз, М., 1962.
- [9] Федоров В. В. . *Теория оптимального эксперимента.* Наука, М., 1971.
- [10] Рейсс Э. Л. Потеря устойчивости колонны — элементарный пример бифуркации. In *В кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Ред. Дж. Б. Келлер, С. Антман.* Мир, М., 1974.
- [11] Аоки М. *Введение в методы оптимизации.* Наука, М., 1977.
- [12] Барабанова Л. П. Оптимизация конфигурации четырех маяков в разностном диапазоне, определяющем навигационную систему в пределах конуса видимости. *Известия РАН. Теория и системы управления*, Вып.4:90–96, 2008.
- [13] Старосельский Ю. М. Исследование байесовских D-оптимальных планов для дробно-рациональных моделей. *Вестн. С.-Петербург. ун-та*, Серия 10. Вып. 3:98–105, 2008.
- [14] Лейтер Е. Метод планирования эксперимента для случая нелинейной параметризации. *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statist.*, 5 (7/8):625–636, 1974. (in Russian).
- [15] Brass, D. and Dette H. On the number of support points of maximin and bayesian d-optimal designs in nonlinear regression models. *Annals of Statistics*, 35 (2):772–792, 2007.
- [16] Chaloner, K. and Larntz, K. Optimal bayesian experimental design applied to logistic regression experiments. *J. Statist. Plann. Infer.*, 21:191 – 208, 1989.
- [17] Kiefer, J. and Wolfowitz, J. The equivalence of two extremum problems. *Can. J. Math.*, 12:129–132, 1960.
- [18] Muller, Ch. H. and Pazman A. Application of necessary and sufficient conditions for maximum efficient design. *Metrika*, 48:1–19, 1998.
- [19] Kurn H. W. A note on fermat's problem. *Mathematical Programming*, pages 98–107, 1973.
- [20] Wong, W. K. A unified approach to the construction of minimax designs. *Biometrika*, 79:611–619, 1992.

Об одной теореме Г.Крамера

Абдусуннат Абдурахмонович Джамирзаев

Национальный Университет Узбекистана,

Ташкент

djamirzaev@rambler.ru

Аннотация. В работе обобщается теорема Г. Крамера о сходимости распределений сумм и произведений двух последовательностей случайных величин.

Ключевые слова. Случайные величины, функция распределения, сходимость.

1 Введение

В различных вероятностных задачах успешно используется следующая теорема Г. Крамера о сходимости последовательностей случайных величин (с.в.).

Теорема 1. (Г. Крамер [1]). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность с.в. с функциями распределения (ф.р.) $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$. Предположим, что при $n \rightarrow \infty$

$$F_n(x) \rightarrow F(x), \quad \forall x \in C(F),$$

где $C(F)$ - множество точек непрерывности ф.р. $F(x)$. Пусть далее $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ — другая последовательность с.в.. Предположим, что η_n сходится по вероятности к некоторой постоянной c . Положим

$$X_n = \xi_n + \eta_n, \quad Y_n = \xi_n \cdot \eta_n, \quad Z_n = \frac{\xi_n}{\eta_n}.$$

Тогда ф.р. величины X_n сходится к $F(x-c)$. Далее, если $c > 0$ то ф.р. величины Y_n сходится к $F\left(\frac{x}{c}\right)$, а ф.р. величины Z_n сходится к $F(x \cdot c)$.

Изменения в формулировке, необходимые в случае $c < 0$ очевидны.

Важно отметить, что в этой теореме не требуется независимости входящих в ней с.в..

2 Основные результаты

В настоящей работе доказывается следующая теорема, которая обобщает теорему 1 на случай, когда последовательность с.в. $\{\eta_n\}$ может сходится по вероятности к некоторой с.в. η_0 , отличной от постоянной.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ две последовательности с.в., определенные на одном и том же вероятностном

пространстве $\{\Omega, F, P\}$ такие, что при $n \rightarrow \infty$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta_0$ и для любого $A \in \sigma(\eta_0)$, $P(A) > 0$,

$$P\{\eta_n < x / A\} \rightarrow F_0(x), \quad \forall x \in C(F_0),$$

где $\sigma(\eta_0)$ - сигма алгебра порожденная с.в. η_0 .

Если $g(x, y)$ непрерывная функция двух переменных, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P\{g(\xi_n, \eta_n) < x\} \rightarrow P\{g(\xi_0, \eta_0) < x\},$$

где ξ_0 - некоторая с.в. независимая от η_0 и

$$P\{\xi_0 < x\} = F_0(x).$$

Ясно, что

$$\psi(x) = P\{g(\xi_0, \eta_0) < x\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{g(\xi_0, y) < x\} dP\{\eta_0 < y\}.$$

При доказательстве теоремы 2 используются следующие леммы, которые представляют и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ две последовательности с.в. таких, что при $n \rightarrow \infty$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta_0$ и существует ф.р. $F_0(x)$ такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$P\{\xi_n < x\} \rightarrow F_0(x), \quad \forall x \in C(F_0).$$

Если $g(x, y)$ непрерывная функция двух переменных, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$g(\xi_n, \eta_n) - g(\xi_n, \eta_0) \xrightarrow{p} 0.$$

Литература

[1] Крамер Г. Математические методы статистики. Москва. 1975, 281 с.

Компьютерная реализация операций над случайными величинами

**Борис Станиславович
Добронец**

Институт космических и информационных технологий,
Сибирский Федеральный Университет,
Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия
BDobronets@sfu-kras.ru

**Артём Михайлович
Кранцевич**

Институт математики
Сибирский Федеральный Университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия
akrantsevich@gmail.com

**Николай Михайлович
Кранцевич**

Институт математики
Сибирский Федеральный Университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия
krantsevich@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрена компьютерная реализация операций над различными видами случайных величин. Представлены алгоритмы арифметических операций над случайными величинами, заданными своими функциями плотности вероятности. Приведены оценки точности построенных операций. Произведено сравнение точности реализованных операций с методом Монте-Карло.

Ключевые слова. Численные операции над случайными величинами, гистограммная арифметика, Монте Карло, интервальная математика.

1 Введение

Статистические методы все более широко применяются при решении различных прикладных задач. Область приложений довольно широка. Они используются при обработке данных экспериментов, при решении экономических задач.

Неопределённость, которая является неотъемлемым атрибутом случайных событий, называют элитерной (aleatory) неопределённостью. Теория вероятностей предназначена для моделирования, оценки и оперирования именно элитерными неопределённостями. В свою очередь, неопределённость самих вероятностных оценок называют эпистемической неопределённостью (epistemic uncertainty). Эпистемическая неопределённость непосредственно связана с объёмом и достоверностью информации, на основании которой получают эти оценки. В случае полного отсутствия объективной исходной информации единственным способом получения интересующих нас вероятностных оценок является экспертное оценивание.

Наличие информации о плотности вероятности случайных величин приводит к возможности при расчетах учитывать и получать результаты в виде случайных величин с построенной плотностью вероятности.

Аналитические методы вероятностного анализа носят ограниченный характер и не могут быть использованы для большинства прикладных задач. Методы Монте-Карло [7, 6] — мощный и универсальный подход, они широко используются для стохастического моделирования, но наряду со своими положительными

качествами обладают рядом недостатков. Один из самых существенных — низкая скорость сходимости.

В качестве альтернативы методам Монте-Карло в ряде случаев можно рассматривать интервальную математику [1, 8], подходы, основанные на численных операциях над случайными величинами [3, 9, 10, 11, 5]. методы численного вероятностного анализа [4].

В круг проблем численного вероятностного анализа попадают не только численные арифметические операции над плотностями случайных величин, но численное построение плотностей вероятности функций от случайных аргументов, решение систем линейных и нелинейных уравнений, задачи интерполяции и т. п.

Предыдущие пакеты, численно реализующие операции над плотностями случайных величин (1988, Герасимов & Добронец [2]; 1993, Berleant [9]; 2004 Li W., Num J. [10]), имели некоторые недостатки. В первую очередь стоит отметить тот факт, что ранее расчеты операций над случайными величинами основывались на картезианском произведении подинтервалов, что ощутимо сказывалось на точности результатов.

2 Виды плотностей случайных величин

Стоит более подробно остановиться на классификации плотностей случайных величин, над которыми могут осуществляться операции.

Дискретные случайные величины. Дискретная случайная величина ξ принимает значения x_1, x_2, \dots, x_n и существует такая функция $p(x)$, значение которой в каждой точке x_i есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_i .

Гистограммы. Гистограммой называется случайная величина, плотность распределения которой представлена гистограммой. Гистограмма P — кусочно-постоянная функция — определяется сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$, на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ гистограмма принимает постоянное значение p_i .

Интервальные гистограммы. Зачастую в прикладных задачах нет возможности получить точную функцию распределения случайной величины. В та-

ких случаях задаются оценки плотности распределения сверху и снизу. Такие оценки удобно аппроксимировать интервальными гистограммами. Гистограмму будем называть интервальной, если ее функция распределения $P(x)$ принимает интервальные значения.

Гистограммы второго порядка. В случае эпистемической неопределённости наряду с интервальными гистограммами возможно использование *гистограмм второго порядка*, т. е. таких гистограмм каждый столбец которой — гистограмма [4].

Кусочно-линейные функции. Кусочно-линейные функции также могут рассматриваться как инструмент аппроксимации функции плотности распределения случайной величины. Кусочно-линейной называется функция, определённая на множестве вещественных чисел, линейная на каждом из интервалов, составляющих область определения.

Сплайны. Под сплайном обычно понимают кусочно-заданную функцию, совпадающую с функциями более простой природы на каждом элементе разбиения своей области определения. Сплайны имеют многочисленные применения как в математической теории, так и в разнообразных вычислительных приложениях. В частности, сплайны двух переменных интенсивно используются для задания поверхностей в различных системах компьютерного моделирования.

Аналитически заданные случайные величины. Случайные величины, плотность распределения которых задана аналитически, наиболее точно описывают входные данные, однако их обработка является наиболее сложной в сравнении с другими типами данных.

3 Операции над случайными величинами

Также стоит рассмотреть особенности операций над случайными величинами в зависимости от того, над какими двумя типами данных осуществляется операция.

3.1 Операция над двумя дискретными величинами

В случае если нам необходимо произвести некоторую арифметическую операцию над двумя дискретными величинами, то мы можем просто совершить эту операцию над всеми парами чисел содержащих одно число из вероятностного пространства первой величины и одно — из вероятностного пространства второй величины, перемножая соответствующие вероятности. В таком случае мы получим точный ответ. Однако, в прикладных задачах такая ситуация встречается крайне редко, либо она осложняется огромным

числом вариантов и, как следствие, требует больших вычислительных мощностей.

3.2 Операция над двумя гистограммными величинами

Главная причина недостатка точности предыдущих пакетов операций заключается в том, что при формировании искомой гистограммы вычисления осуществляются, будто значения на интервалах, полученных при картезианском произведении входных гистограмм, распределены равномерно — это, вообще говоря, неверно. Наша реализация принципиально отличается от указанных выше, так как она основана на работе с совместной плотностью вероятности двух гистограммных величин.

Пусть p_z — гистограмма плотности вероятности арифметической операции над двумя случайными величинами $x * y$, где $*$ $\in \{+, -, \cdot, /, \uparrow\}$. Тогда вероятность попадания величины z в интервал $[z_i, z_{i+1}]$ определяется по формуле

$$P(z_i < z < z_{i+1}) = \iint_{\Omega_i} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где $\Omega_i = \{(x_1, x_2) | z_i \leq x_1 * x_2 \leq z_{i+1}\}$

Наша численная реализация этого метода заключается в следующем. Так как мы производим операции с гистограммами, носитель совместной вероятности $p(x_1, x_2)$ — прямоугольник $[a_0, a_n] \times [b_0, b_n]$ \square разбит на n^2 прямоугольников $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, вероятность попадания в которые является постоянной величиной $p_i \times p_j$.

Для вычисления искомой плотности вероятности мы совершаем обход по всем этим прямоугольникам, для каждого из них проверяя какой вклад и в какие подинтервалы итоговой гистограммы он вносит. С этой целью мы определяем область Ω'_i , по которой рассматриваемый прямоугольник пересекается с Ω_i и вычисляем по этой области интеграл

$$p_{zi} = \iint_{\Omega'_i} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 / (z_{i+1} - z_i). \quad (1)$$

Заметим, что в нашем (гистограммном) случае $p(x_1, x_2)$ является константой, и поэтому этот интеграл равен отношению площади Ω'_i к площади прямоугольника $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$. Перебрав подобным образом все прямоугольники, мы вычислим искомую плотность вероятности (а точнее, ее гистограммное приближение). Такое вычисление будет иметь лишь погрешности, вызванные приближением плотности вероятности гистограммами.

3.3 Операция над плотностями вероятности гистограммной и дискретной случайных величин

Рассмотрим операции вида $c * x$, где c — константа, x — случайная величина с плотностью вероятности f_x и $[a, b]$ — ее носитель. Тогда плотность вероятности случайной величины $c * x$ — $f_{c*x} = \alpha f_x(c * \xi)$, $\alpha = (b - a) / (c * b - c * a)$.

В случае осуществления операции над дискретной и гистограммной случайными величинами мы имеем вместо прямоугольников $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ отрезки $A_i \times [b_j, b_{j+1}]$. Далее аналогично, перебирая все подобные отрезки, вычисляем вклад каждого в итоговую гистограмму. Разница в численной реализации — поиск не соотношения площадей, а соотношение длин отрезков. Однако, если число значений, принимаемых дискретной случайной величиной, велико, то подобные вычисления могут спровоцировать существенное увеличение временных затрат. В такой ситуации дискретная случайная величина представляется в виде гистограммы, и далее производятся действия над гистограммами, как описано в предыдущем пункте.

3.4 Операция над гистограммной величиной и аналитически заданной функцией

В данном случае алгоритм вычислений аналогичен случаю с двумя гистограммными величинами, с той лишь разницей, что в данном случае совместная плотность вероятности не будет являться константой, и потребуются численные вычисления интегралов вида (1).

В качестве ответа получаем гистограмму, приближающую плотность распределения искомой случайной величины.

4 Процедуры пакета

Пакет операций был разработан на языке программирования C++, в среде MS Visual Studio 9.0. Данный пакет позволяет осуществлять следующие действия над плотностями вероятностей случайных величин:

1. Сложение двух величин
2. Сложению величины и числа
3. Вычитание одной величины из другой
4. Произведение двух величин
5. Произведение величины на число
6. Деление одной величины на другую

7. Возведение величины в степень (в том числе отрицательную или дробную)
8. Вычисление дисперсии величины
9. Вычисление математического ожидания величины
10. Нормировка величины

Также пакет позволяет осуществлять расчет нормы l_2 , генерировать псевдослучайно плотности вероятностей для нормального, равномерного и треугольного распределений, а также осуществлять расчеты посредством метода Монте-Карло.

В данный момент пакет позволяет работать с гистограммными и дискретными случайными величинами, а также с кусочно-линейными функциями. В дальнейшем планируется включить в число инструментов сплайны и аналитически заданные функции.

Также в ходе работы над пакетом в среде Qt было реализовано консольное приложение, позволяющее производить операции над гистограммными и дискретными случайными величинами. Величины могут быть сгенерированы в самом приложении или могут быть поданы в программу из txt-документа.

5 Пример расчетов

В качестве примера использования численных операций над гистограммными переменными рассмотрим задачу сложения четырех случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Для аппроксимации распределений были использованы гистограммные переменные.

Заметим, что плотность вероятности суммы n равномерно распределенных величин есть

$$p_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} (x^{n-1} - C_n^1(x-1)^{n-1} + C_n^2(x-2)^{n-1} - \dots) \quad (2)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, и при каждом фиксированном значении аргумента x суммирование в скобках осуществляется только по тем слагаемым, для которых значение $(x - k)$, $k = 1, 2, \dots$ неотрицательно [8].

Таким образом, при $n=4$ мы имеем:

$$p_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3, & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3}, & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 10x - \frac{22}{3}, & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \\ -\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 8x + \frac{32}{3}, & \text{при } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

В сравнительной таблице результатов указаны погрешности в норме l_2 , возникшие при вычислении

суммы четырех равномерно распределенных случайных величин посредством численных операций гистограммной арифметики и метода Монте-Карло с различным числом повторов. Результаты приведены при разном количестве разбиений исходных величин.

n	10^4	10^5	10^6	H.arith.
10	0.00587	0.00168	0.000374	0.00416
20	0.00554	0.00198	0.00041	0.00054
50	0.00255	0.00103	0.00026	0.000035
100	0.00234	0.00062	0.00018	0.0000044
150	0.0016	0.00055	0.00016	0.0000013
200	0.0014	0.00044	0.00014	0.00000054

Рис. 1: Сравнительная таблица результатов

Из таблицы следует, что, например, при $n=100$ расчеты показали, что ошибка при использовании численных операций гистограммной арифметики в норме l_2 составляет 0.0000044. Ошибка метода Монте-Карло при числе бросаний $N = 10^4$ равна 0.00234, а при числе бросаний $N = 10^6$ — 0.00018, что превосходит погрешность при использовании численных операций. При этом число арифметических операций гистограммной арифметики определяется порядком 100^2 или, 10^4 , а число операций метода Монте-Карло непосредственно числом бросаний[4].

Известно, что метод Монте-Карло имеет сходимость $O(1/\sqrt{N})$, где N — число повторов, гистограммные операции в приведенном примере имеют скорость сходимости $O(1/n^\alpha)$, $\alpha \approx 3$. Пусть необходимо достигнуть точности ε , число операций метода Монте-Карло при этом $\approx \varepsilon^{-2}$ в сравнении с гистограммными расширениями $\approx \varepsilon^{-2/\alpha}$. Таким образом, получается, что подход, основанный на построении гистограммных расширений, эффективней метода Монте-Карло примерно в $\varepsilon^{-2(1-1/\alpha)}$ раз.

6 Точность

С целью увеличения точности имеет смысл представлять искомую плотность вероятности в виде кусочно-линейной функции или сплайна. Этого можно добиться двумя способами.

Получившуюся в результате работы гистограмму сглаживать. Например, соединив середины столбцов гистограммы, мы получим кусочно-линейную функцию, приближающую искомую плотность вероятности.

Можно искать значение плотности распределения вероятности искомой случайной величины в конкретных точках, которые на графике совместной плотности вероятности величин, над которыми осуществляется операция, будут представлены кривыми (прямыми Π для сложения, вычитания и деления, гипер-

болами Π для умножения). Вычислив интеграл по этим кривым, мы получим вероятность попадания в конкретные точки, и, нормализовав полученный результат, сможем построить по этим точкам кусочно-линейную функцию либо сплайн. Как альтернативу вычислению интеграла по кривой можно рассматривать вычисление вероятности попадания в полосу (аналогично гистограммному случаю), в качестве полосы взяв достаточно малую окрестность рассматриваемой кривой.

Список литературы

- [1] Б. С. Добронец. *Интервальная математика*. Красноярск: КГУ.
- [2] Б. С. Добронец В. А. Герасимов. Гистограммная арифметика в задачах управления производственными процессами. Информационно-оперативный материал (интервальный анализ). *Препринт №6*. Красноярск: ВЦ СО АН СССР.
- [3] М. Ю. Шустров В. А. Герасимов, Б. С. Добронец. Численные операции гистограммной арифметики и их применения. *АиТ*, 2:83–88, 1991.
- [4] О. А. Попова Б. С. Добронец. Гистограммные временные ряды. *Труды X международной ФАМЭБ 2011 конференции*, Красноярск: КГТЭИ, СФУ:130–133, 2011.
- [5] О. А. Попова Б. С. Добронец. Численные операции над случайными величинами и их приложения. *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 4:2 (2011):229–239, 2011.
- [6] И. М. Соболев. *Численные методы Монте-Карло*. М.:Наука, 1973.
- [7] А. В. Лукашов. Метод Монте-Карло для финансовых аналитиков: краткий путеводитель. *Управление корпоративными финансами*, 01 (19):22–39, 2007.
- [8] С.П. Шарый. Интервальный анализ или метод Монте-Карло? *«Вычислительные технологии»*, Том 12, №1:103–112, 2007.
- [9] D. Berleant. Automatically verified reasoning with both intervals and probability density functions. *Interval Computations*, No. 2:48–70, 1993.
- [10] J. Hym W. Li. Computer arithmetic for probability distribution variables. *Reliability Engineering and System Safety*, 85.
- [11] R. Williamson. *Probabilistic arithmetic*. University of Queensland.

Численный вероятностный анализ для оценки инвестиционных проектов

**Борис Станиславович
Добронец**

Сибирский Федеральный Университет,
Институт космических и информационных
технологий,
Красноярск
BDobronets@sfu-kras.ru

**Ольга Аркадьевна
Попова**

Сибирский Федеральный Университет,
Институт космических и информационных
технологий,
Красноярск
olgaarc@yandex.ru

**Елена Васильевна
Головчанская**

Сибирский Федеральный Университет,
Институт космических и информационных
технологий,
Красноярск
nyx09@yandex.ru

Аннотация. В работе рассмотрено использование численного вероятностного анализа для оценки рисков инвестиционных проектов.

Ключевые слова. Численный вероятностный анализ, инвестиционные проекты, оценки рисков, интегральная математика.

1 Введение

Оценка инвестиционных проектов представляет собой сложный процесс, в основе которого лежат определенные методики расчета финансово-экономических показателей привлекательности проекта на основе количественной и качественной информации, представленной в бизнес-плане. Оценка этих показателей осуществляется по определенным расчетным формулам и как, правило, без учета анализа неопределенностей, содержащихся во входной информации. Данные, включаемые в бизнес-план, представляют собой, в большей степени, усредненные значения показателей, которые в дальнейшем используются в расчетных формулах.

Основной проблемой бизнес планирования в настоящее время является прогноз существенных факторов внешней и внутренней экономической среды, и их влияние на ход реализации и результаты проекта. Данная задача осложняется тем, что параметры проекта не могут быть определены однозначно в условиях недостаточной информации и, как следствие, результаты реализации проекта могут значительно отличаться от ожидаемых. При принятии решения о реализации проекта предприятию (при принятии решения о выдаче кредита банком или оказания поддержки административными органами) необходимо оценивать возможные риски, который несет с собой реализация проекта с целью планирования мер по их предупреждению и минимизации и стоимостной оценки данных мероприятий.

Расчетные методы, используемые планировщиками не включают в себя современный математический аппарат, направленный на оценку вероятностных факторов по причине сложности их реализации. В итоге оценка рисков часто на практике ограничивается тремя составляющими:

1. Качественный анализ всех возможных рисков, с которыми может столкнуться предприятие в ходе реализации проекта.
2. Анализ безубыточности проекта, включающий определение точки безубыточности.
3. Анализ чувствительности финансовых результатов предприятия к изменению основных параметров проекта (цена реализации продукции, цена на сырье и материалы и т.д.) на момент выхода на полную мощность.

2 Расчет NPV и IRR

Приведем пример формул, которые используются для оценки инвестиционных проектов предприятия производящий товары.

Это прежде всего оценка денежных потоков CF_z , далее чистый дисконтированный доход NPV и внутренняя норма доходности IRR .

$$CF_z = \sum_i G_i P_i (1 - AV_{G_i}) - \sum_j E_j (1 - AV_{E_j}) - \sum_k S_k W_k T_{W_k} - \sum_p H_p (A_p + T_{H_p}) - \sum_q T_q - \sum_n C_n R_n + Fin_z - Fout_z, \quad (1)$$

где G_i — количество продаж i -го товара; P_i — цена i -го товара; AV_{G_i} — налог на добавленную стоимость на i -ый товар; E_j — расходы j -го вида; AV_{E_j} — налог на добавленную стоимость на приобретаемые товары по j -му виду расходов; S_k — численность персонала k -ой категории; W_k — средняя заработная плата работников k -ой категории; T_{W_k} — коэффициент отчислений во внебюджетные фонды по k -ой категории работников; H_p — основные фонды p -го вида; A_p — норма амортизации по p -му виду основных фондов; T_{H_p} — ставка налога, базой для расчета которого выступает p -ый вид основных фондов (налог на имущество); T_q — сумма q -го налога; C_l — сумма l -го кредита; R_l — процент по l -ому кредиту; TPr_z — ставка налога на прибыль в z -ом году; Fin_z — прочие операционные, финансовые и инвестиционные поступления.

ния средств; $Fout_z$ — прочие операционные, финансовые и инвестиционные выплаты средств.

NPV — это сумма приведенных к текущему моменту времени чистых денежных потоков по инвестиционному проекту. Данный показатель определяется по следующей формуле:

$$NPV = \sum_{z=1}^T \frac{CF_z}{(1+d)^z},$$

где T — расчетный срок инвестиционного проекта в годах; d — ставка дисконтирования. Инвестиционный проект признается эффективным в случае, если $NPV > 0$.

IRR — расчетная ставка дисконтирования, при которой чистый дисконтированный доход (NPV) равен нулю. IRR определяется из уравнения

$$\sum_{z=1}^T \frac{CF_z}{(1+IRR)^z} = 0.$$

Инвестиционный проект признается эффективным в случае, если $IRR > d$.

Как правило, для оценки инвестиционных проектов необходимо рассчитывать показатели на несколько лет вперед. В условиях высокой рыночной неопределенности такие показатели, например, как G_i , P_i имеют существенно стохастический характер. Однако при расчетах, как правило, используют только детерминированные оценки.

Такая методика расчета, как на теоретическом, так и на практическом уровне не учитывает вероятностный характер входных и результирующих показателей инвестиционного проекта, делает невозможным управление проектом в ходе его реализации, и соответственно затрудняет принятие эффективных управленческих решений.

Как было показано в [6] учет стохастических неопределенностей и использование численного вероятностного анализа позволяют существенно поднять качество оценки проектов.

В статье предлагается алгоритм оценки показателей инвестиционного проекта на основе использования численного вероятностного анализа. Алгоритм включает следующие этапы.

Этап 1. Подготовка входной информации на основе анализа данных с целью выявления характера неопределенности и описания показателей, имеющих четко выраженный случайный характер.

Подготовка входной информации включает разработку системы входных и результирующих показателей, необходимых для оценки инвестиционного проекта, а также подготовку базы данных для работы. Подготовка базы данных включает не только тра-

диционные шаги, такие, как сбор, хранение информации, но и этапы связанные с такими процедурами как очистка, трансформация, агрегирование данных. Далее на основе статистического и экспертного анализа внутренней и внешней среды объекта исследования осуществляется процедура выявления характера неопределенности данных и описание показателей, имеющих устойчивый случайный характер.

Этап 2. Построение функции плотности вероятности. Для работы со случайными характеристиками важна информация о законе распределения и функции плотности вероятности случайной величины. Для большинства практических задач функция плотности распределения неизвестна. Поэтому актуальной является задача определения функции плотности вероятностей. Существуют различные методы построения функции плотности. Если класс, к которому принадлежит распределение (с точностью до численных значений конечного числа параметров) неизвестен, то для восстановления функции распределения или функции плотности вероятностей используют непараметрические методы [3].

Рассмотрим оценку совместной плотности вероятности переменных G , P (индекс для простоты опустим). Предположим, что для этих целей нам известны аналогичные реализации этих случайных величин для похожих проектов

$$(G_1, P_1), (G_2, P_2), \dots, (G_n, P_n). \quad (2)$$

В случае, когда G , P — независимые случайные переменные можно использовать *метод гистограмм*. Гистограмма H — кусочно-постоянная функция определяется сеткой $\{x_i | i = 0, \dots, N\}$, на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ гистограмма принимает постоянное значение h_i .

Рассмотрим построение гистограммы H для случайной величины G . Обозначим n_j количество членов G_i выборки (1), попавших в интервал $[x_{j-1}, x_j]$, тогда

$$h_j = \frac{n_j}{n(x_j - x_{j-1})}.$$

В случае, когда G и P — зависимые случайные переменные, оценим их совместную плотность вероятности кусочно-постоянной функцией H , которая принимает на каждом прямоугольнике $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ постоянное значение h_{ij}

$$h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})},$$

где n_{ij} — количество членов выборки (1), попавших в прямоугольник $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Случай функциональной зависимости $P = f(G)$ рассмотрен в [6, 1]

Неопределенность, которая является неотъемлемым атрибутом случайных событий, называют элитерной (aleatory) неопределенностью. Теория вероятностей

предназначена для моделирования, оценки и оперирования именно элитерными неопределённостями. В свою очередь, неопределённость самих вероятностных оценок называют эпистемической неопределённостью (epistemic uncertainty). Эпистемическая неопределённость прямо связана с объёмом и достоверностью информации, на основании которой получаются эти оценки. В случае полного отсутствия объективной исходной информации единственным способом получения интересующих нас вероятностных оценок является *экспертное оценивание* [7].

В тех случаях, когда нет возможности получить точную функцию распределения случайной величины задают оценки плотности распределения сверху и снизу. Такие оценки удобно аппроксимировать *интервальными гистограммами* [5]. Гистограмму будем называть интервальной, если значения h_i принимают интервальные значения.

В случае эпистемической неопределённости наряду с интервальными гистограммами возможно использование *гистограмм второго порядка*, т. е. таких гистограмм каждый столбец которой — гистограмма [5].

Решением этой задачи является обращение к опыту и интуиции экспертов. Объективные вероятности не отрицаются в своей основе. Расширение требований вызывает необходимость возврата к экспертным суждениям. Таким образом, возможно нахождение эпистемических вероятностей, источником которых является эксперт или группа экспертов.

Следовательно, наличие различных экспертных оценок плотностей вероятности случайных величин позволит построить для них гистограммы второго порядка, которые можно использовать для оценки NPV , IRR [6].

Этап 3. Для вычисления функции (1) будем использовать численный вероятностный анализ (ЧВА) [1]. Предметом ЧВА является решение различных задач со стохастическими неопределённостями в данных с использованием численных операций над плотностями вероятностей случайных величин и функций со случайными аргументами. Для построения функции плотности (1) будем использовать подход, в основе которого лежат такие понятия как вероятностное и гистограммное расширения [1].

Этап 4. На основе построенной оценки плотности вероятности для функции (1) строятся аналогичные оценки для NPV и IRR [6]. Следовательно, зная оценки плотностей вероятности NPV и IRR в виде гистограмм, интервальных гистограмм или гистограмм второго порядка можно оценить соответствующие риски. Так, если P_{NPV} — гистограмма плотности вероятности NPV , то

$$P_u = \int_{-\infty}^0 P_{NPV}(\xi) d\xi$$

— вероятность того, что инвестиционный проект окажется убыточным.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, ГК №02.740.11.0621.

Список литературы

- [1] О. А. Попова Б. С. Добронев. Численный вероятностный анализ и вероятностные расширения. *Труды XIV Международной ЭМ конференции по эвентологической математике и смежным вопросам*.
- [2] О. А. Попова Б. С. Добронев. Численные операции над плотностями вероятностей случайных величин. *Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», 30 мая — 4 июня, 2011.*, №гос. регистрации 0321101160.
- [3] Г. В. Лукин А. В. Крянев. *Математические методы обработки неопределенных данных. Ч 2-е изд., испр.* ФИЗМАТЛИТ, М., 2006.
- [4] О. А. Попова Б. С. Добронев. Применение гистограммной математики в задачах принятия экономических решений. *Труды IX международной ФАМЭТ 2010 конференции*, Красноярск: КГТЭИ, СФУ:127–130, 2010.
- [5] О. А. Попова Б. С. Добронев. Гистограммные временные ряды. *Труды X международной ФАМЭБ 2011 конференции*, Красноярск: КГТЭИ, СФУ:130–133, 2011.
- [6] О. А. Попова Б. С. Добронев. Численные операции над случайными величинами и их приложения. *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 4:2 (2011):229–239, 2011.
- [7] О. И. Ужга-Ребров. *Управление неопределенностями. Часть 1. Современные концепции и приложения теории вероятностей*. Rēzekne:RA Izdevniecība, 2004.
- [8] А. В. Лукашов. Метод Монте-Карло для финансовых аналитиков: краткий путеводитель. *Управление корпоративными финансами*, 01 (19):22–39, 2007.

Модель управления образовательным процессом на основе компетентностного подхода

Георгий Алексеевич Доррер

Сибирский государственный
технологический университет
Красноярск
g_a_dorrrer@mail.ru

С.С. Москалева

Сибирский государственный
технологический университет
Красноярск

Аннотация. *Рассматривается модель перехода образовательной системы на новый уровень, определяемый государственными образовательными стандартами третьего поколения, ориентированными на приобретение обучающимися комплекса компетентностей. В качестве исходного формализма использована модель динамической системы с двумя равновесными состояниями для описания процессов смены типа политической власти [1].*

Ключевые слова. *Образовательная система, компетентностный подход.*

Происходящий в настоящее время переход высшего профессионального образования на государственные образовательные стандарты (ГОС ВПО) третьего поколения связан с серьезными изменениями в методологии и технологии проведения учебного процесса. В первую очередь это связано с внедрением компетентностного подхода к обучению студентов, когда основное внимание уделяется способности творчески применять приобретенные знания, умения и навыки. Для перевода образовательных систем на новый уровень требуются определенные усилия как изнутри самой системы, так и извне – в виде инвестиций в развитие кадрового потенциала, улучшение материальной базы, информатизацию, совершенствование менеджмента.

В настоящей работе предлагается динамическая модель перехода образовательной системы с одного качественного уровня образовательного процесса на более высокий за счет внешних инвестиций. Эта модель в несколько измененной форме была предложена нами для описания образовательного процесса [2] и, на наш взгляд, может быть использована для описания процессов в других сферах человеческой деятельности. Ключевая проблема при создании указанных моделей состоит в выборе некоторого интегрального показателя, который может достаточно адекватно охарактеризовать уровень системы в целом.

В настоящей работе предлагается безразмерный показатель уровня образовательной системы, динамика которого соответствует сумме накопленных обучающимся компетенций в соответствии с требованиями ГОС ВПО 3-го поколения, возможно, с учетом их экспертно определяемых весов. Этот показатель, по нашему мнению, может использоваться как для оценки уровня образовательной системы в целом, так и для принятия решений по инвестированию ее развития.

Следует отметить, что предложенная в работе модель может быть использована и при других подходах к оценке уровня образовательного процесса.

Модель динамики образовательного процесса

Образовательный процесс в некотором учебном заведении мы будем рассматривать как последовательность некоторых этапов (например, семестров), в течение которых происходит обучение, т.е. повышение компетентности обучаемых.

Введем следующие обозначения.

- $t = 0, 1, 2, \dots, T$ – дискретное время (месяцы, семестры, годы - в зависимости от специфики задачи), T - глубина планирования процесса;
- $x = 0, 1, \dots, N + 1$ – ступени образовательного процесса (например, номера семестров); $x = 0$ соответствует абитуриенту, $x = N + 1$ соответствует выпускнику;
- $p(t, x)$ – текущий уровень компетентности (квалификации) обучаемых - экспертно определяемая величина, зависящая от требований государственных образовательных стандартов, квалификации преподавателей, уровня подготовки абитуриентов, используемых инновационных образовательных технологий, материальной базы учебного заведения и других факторов (этот вопрос рассмотрен в п.7.3);
- $\hat{p}(x)$ – требуемый уровень компетентности обучаемых на каждой ступени;
- $F(t, x, p(x), \hat{p}(x))$ – управляющее воздействие процесса, которое будет рассмотрено ниже;
- $k(t, x, p)$ – коэффициент, учитывающий взаимное влияние уровней компетентности на соседних ступенях образовательного процесса;
- $\xi(t, x, p)$ – случайные помехи, влияющие на образовательный процесс.

С учетом принятых обозначений динамика образовательного процесса может быть описана следующим уравнением:

$$p(t+1, x) = p(t, x) + F(t, x, p(t, x) + k(t, x, p)) \times \\ \times [p(t, x+1) - 2p(t, x) + p(t, x-1)] + \xi(t, x, p),$$

$$t = 0, 1, \dots, T, \quad x = 1, \dots, N.$$

Это уравнение описывает приращение уровня

компетентности на всех ступенях образовательного процесса за один временной шаг. Выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой вторую разность по переменной x величины $p(t, x)$ и может рассматриваться как «диффузия» между ступенями образовательного процесса.

Рассмотрим управляющее воздействие $F(t, x, p(x), \hat{p}(x))$.

При установившемся процессе эта функция должна обеспечивать поддержание заданного уровня компетентности $\hat{p}(x)$, осуществляя отрицательную обратную связь по отклонению от требуемого уровня:

$$F(t, x, p(x), \hat{p}(x)) = K(t, x)(p(t, x) - \hat{p}(x)) \quad (2)$$

где $K(t, x) > 0$ - коэффициент усиления, определяющий скорость, с которой происходит приближение уровня компетентности на всех ступенях образовательного процесса к требуемому уровню $\hat{p}(x)$ при выведении системы из равновесия. Нетрудно видеть, что при малых значениях коэффициентов диффузии и помех и по истечении достаточного времени образовательных процесс «притянется» к требуемому уровню $\hat{p}(x)$ и будет колебаться вокруг него под влиянием помех. Социально-экономический смысл этого коэффициента состоит в том, что он определяет эффективность процесса саморегулирования системы, т.е. уровень менеджмента и управления.

Рассмотрим теперь случай, когда образовательный процесс необходимо перевести с некоторого достигнутого уровня $\hat{p}_1(x)$ на новый, более высокий уровень $\hat{p}_2(x) > \hat{p}_1(x)$.

В этом случае системе нужно преодолеть притяжение уровня $\hat{p}_1(x)$, а затем переместиться в область притяжения уровня $\hat{p}_2(x)$. Тогда по истечении некоторого периода времени процесс установится в районе нового центра притяжения. Таким образом, внутри отрезка $\{\hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x)\}$ имеются две зоны притяжения, соответствующие к первому и второму уровням. Границу между этими зонами обозначим $\hat{p}_3(x)$. Этот уровень соответствует неустойчивому положению: от него процесс уходит либо к $\hat{p}_1(x)$, либо к $\hat{p}_2(x)$. Для описания подобной ситуации можно, как это делается в упомянутой выше работе [1], представить функцию F в виде полинома третьей степени

$$F(t, x, p(x), \hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x)) = \\ = -K(t, x)[p(x) - \hat{p}_1(x)][p(x) - \hat{p}_2(x)][p(x) - \hat{p}_3(x)].$$

Качественный вид графика функции $F(t, x, p(x), \hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x))$ при фиксированных значениях x и t приведен на рисунке 1. На рисунке видны три точки \hat{p}_1 , \hat{p}_2 , \hat{p}_3 , являющиеся корнями полинома (7.3), а также показаны зоны притяжения к точкам \hat{p}_1 , \hat{p}_2 .

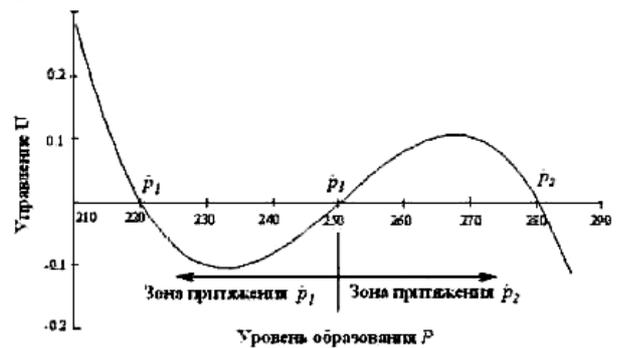


Рис. 1. Характер поведения системы с двумя устойчивыми состояниями

Для перехода на новый уровень процесса необходимо приложить дополнительное внешнее управляющее воздействие $I(t, x, p)$, назовем его инвестициями. Предположим временно, для простоты, что взаимодействием между уровнями и помехой можно пренебречь, т.е. положить $k(t, x, p) = 0$ и $\xi(t, x, p) = 0$. Тогда уравнение динамики процесса (2) с учетом (3) примет вид:

$$p(t+1, x) = p(t, x) + \\ + U(t, x, p(x), \hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x)) \quad (4)$$

где общая движущая сила процесса определяется выражением (3) с учетом дополнительного управляющего воздействия $I(t, x, p)$.

$$U(t, x, p(x), \hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x)) = \\ = -K(t, x)[p(x) - \hat{p}_1(x)][p(x) - \hat{p}_2(x)] \times \\ \times [p(x) - \hat{p}_3(x)] + I(t, x, p) = \\ = F(t, x, p(x), \hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x)) + I(t, x, p).$$

Будем считать, что уровни $\hat{p}_1(x)$, $\hat{p}_2(x)$, $\hat{p}_3(x)$, а также коэффициент усиления $K(t, x)$ заданы для всех, и $t \in [0, \dots, T]$ и не требуют определения. Таким образом, задача состоит в нахождении функции $I(t, x, p)$.

Рассмотрим требования, относящиеся к этой функции.

1. Управление должно перевести систему из области притяжения уровня $\hat{p}_1(x)$ в область притяжения уровня $\hat{p}_2(x)$, поэтому функция $I(t, x, p)$ должна быть определена на интервале $\hat{p}_1(x) - \delta \leq p(x) \leq \hat{p}_3(x) + \delta$ для всех x . Здесь величина $\delta > 0$ - некоторый запас, вызванный возможным влиянием помехи, выводящей систему из равновесия (рисунок 2).

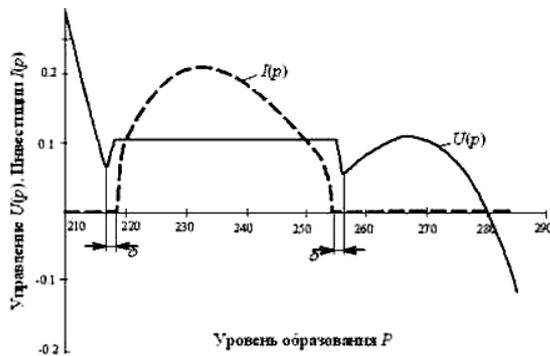


Рис. 2 Качественный характер законов управления и инвестирования при переходе на новый образовательный уровень

2. Движущая сила процесса на определенном выше интервале должна быть всегда направлена в сторону достижения более высокого уровня $\hat{p}_2(x)$, отсюда следует условие:

$$U(t, x, p(x), \hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x)) > 0 \text{ при } t > 0, \\ 1 \leq x \leq N; \hat{p}_1(x) - \delta \leq p(x) \leq \hat{p}_3(x) + \delta.$$

Выполнение неравенства (5) является необходимым условием управляемости процесса.

Если потребовать, чтобы движущая сила процесса $U(t, x, p, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ на рассматриваемом интервале была не меньше некоторой величины $C(x) > 0$, то получим условие для функции, описывающей величину инвестиций:

$$I(t, x, p) \geq C(x) - F(t, x, p(x), \hat{p}_1(x), \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x)), \\ t > 0, 1 \leq x \leq N, \hat{p}_1(x) - \delta \leq p(x) \leq \hat{p}_3(x) + \delta.$$

Качественный вид функций управления

$U(t, x, p, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ и закона инвестирования $I(t, x, p)$ в соответствии с формулами (5) и (6) приведены на рисунке 2. Мы видим, что для перехода на новый уровень инвестиции в начале процесса переходя нарастают, затем постепенно снижаются, а после надежного попадания в зону притяжения нового уровня прекращаются.

Пример оценки процесса приобретения компетенций

Для определения показателя, характеризующего требуемый уровень компетенций, накопленных обучаемым, мы воспользуемся требованиями, содержащимися в ГОС ВПО 3-го поколения по направлению подготовки бакалавров 230100.62 – Информатика и вычислительная техника. В стандарте содержится список общекультурных и профессиональных компетенций, которыми должен обладать выпускник бакалавриата (Таблица 1) и указаны циклы дисциплин, в которых рекомендуется эти компетенции приобретать.

Таблица 1. Перечень компетенций, предусмотренных ГОС ВПО для направления подготовка бакалавров 230100.62

<p>Общекультурные компетенции</p> <p>ОК-1 Владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения</p> <p>ОК-2 Умеет логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь</p> <p>ОК-3 Готов к кооперации с коллегами, работе в коллективе</p> <p>ОК-4 Способен находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готов нести за них ответственность</p> <p>ОК-5 Умеет использовать нормативные правовые документы в своей деятельности</p> <p>ОК-6 Стремится к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства</p> <p>ОК-7 Умеет критически оценить свои достоинства и недостатки, наметить пути и выбрать средства развития достоинств и устранения недостатков</p> <p>ОК-8 Сознает социальную значимость своей будущей профессии, обладает высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности</p> <p>ОК-9 Способен анализировать социально-значимые проблемы и процессы</p> <p>ОК-10 Использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования</p> <p>ОК-11 Сознает сущность и значение информации в развитии современного общества, владеет основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации</p> <p>ОК-12 Имеет навыки работы с компьютером как средством управления информацией</p> <p>ОК-13 Способен работать с информацией в глобальных</p>

компьютерных сетях

ОК-14 Владеет одним из иностранных языков на уровне не ниже разговорного

ОК-15 Владеет основными методами защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий, катастроф, стихийных бедствий

ОК-16 Владеет средствами самостоятельного, методически правильного использования методов физического воспитания и укрепления здоровья, готов к достижению должного уровня физической подготовленности для обеспечения полноценной социальной и профессиональной деятельности

Профессиональные компетенции

Проектно-конструкторская деятельность:

ПК-1 Разрабатывать бизнес-планы и технические задания на оснащение отделов, лабораторий, офисов компьютерным и сетевым оборудованием

ПК-2 Осваивать методики использования программных средств для решения практических задач

ПК-3 разрабатывать интерфейсы «человек- электронно-вычислительная машина»

ПК-4 Разрабатывать модели компонентов информационных систем, включая модели баз данных

Проектно-технологическая деятельность

ПК-5 Разрабатывать компоненты программных комплексов и баз данных, использовать современные инструментальные средства и технологии программирования

Научно-исследовательская деятельность

ПК-6 Обосновывать принимаемые проектные решения, осуществлять постановку и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности

ПК-7 Готовить презентации, научно-технические отчеты по результатам выполненной работы, оформлять результаты исследований в виде статей и докладов на научно-технических конференциях

Научно-педагогическая деятельность

ПК-8 готовить конспекты и проводить занятия по обучению сотрудников применению программно-методических комплексов, используемых на предприятии

Монтажно-наладочная деятельность

ПК-9 Участвовать в настройке и наладке программно-аппаратных комплексов

ПК-10 Сопрягать аппаратные и программные средства в составе информационных и автоматизированных систем

Сервисно-эксплуатационная деятельность

ПК-11 Инсталлировать программное и аппаратное обеспечение для информационных и автоматизированных систем

При составлении рабочего учебного плана по данному направлению указанные компетенции были привязаны к дисциплинам и затем получили свое отражение в рабочих учебных программах дисциплин.

Таблица 2. Распределение упоминаемых общекультурных компетенций по семестрам

Семестр	Общекультурные компетенции ОК																Накопл Σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
1	5	4	1	1	1	2	0	0	2	2	1	1	1	1	0	1	23
2	5	3	0	0	0	1	0	1	0	3	0	0	0	1	1	1	39
3	4	1	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	1	0	1	51
4	4	2	0	0	1	0	0	0	0	6	0	0	0	1	0	1	65
5	3	2	0	1	0	1	0	0	2	2	2	1	4	1	0	1	85
6	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	2	1	3	0	0	1	95
7	3	2	1	0	0	2	1	1	0	6	0	0	2	0	1	0	114
8	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	121
Итого	24	16	3	3	2	6	1	2	4	26	6	5	10	5	2	6	121

Таблица 3. Распределение упоминаемых профессиональных компетенций по семестрам

Семестр	Профессиональные компетенции ПК											Накопл Σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3
2	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	2	11
3	0	1	1	1	1	2	2	0	0	2	2	24
4	0	4	4	4	4	4	2	1	1	1	0	49
5	1	4	4	3	3	3	0	0	2	1	1	71
6	1	0	2	2	2	2	1	2	3	1	1	88
7	1	4	4	3	2	6	1	0	2	1	1	113
8	0	3	6	3	3	3	3	1	4	3	1	143
Итого	3	18	21	16	18	20	8	5	15	10	9	143

Суммарное количество ссылок на соответствующие компетенции во всех дисциплинах в каждом семестре (таблицы 2 и 3) мы принимаем в качестве показателя требуемого уровня образовательного процесса $\hat{p}_2(x)$ в формуле (3).

Процедуры принятия решений по управлению образовательным процессом на основе предложенной модели в данной работе не рассматриваются, они требуют отдельного описания.

Литература

- [1] Дмитриев, М.Г. Моделирование динамики властных полномочий в иерархии. /Моделирование социальной-политической и экономической динамики. – М. РГСУ, 2004. – С. 38 – 75.
- [2] Доррер, Г.А. Управление переходом на новый уровень образовательного процесса / Г.А. Доррер, Г.М. Рудакова, П.А. Осавелюк // Открытое образование. – 2008. - №6 с. 46 – 55.

Определение петель в бизнес-процессе для расчёта топологического уравнения Мейсона

Михаил Георгиевич Доррер
Сибирский государственный технологический университет
Красноярск
mdorrrer@mail.ru

Виталий Валерьевич Курохтин
Сибирский государственный технологический университет
Красноярск
vitaliy.kurokhtin@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается метод определения петель в модели бизнес-процесса. Метод основан на преобразовании исходной модели в сеть Петри, расчёте инвариантов-петель и дальнейшем обратном преобразовании полученных инвариантов сети Петри в модель eEPC. Предлагается оптимизированный метод нахождения инвариантов сети Петри, основанный на определении возможных значений отдельных элементов (и их групп) векторов инвариантов и их дальнейшей комбинации. Полученные петли бизнес-процесса вместе с данными о времени, стоимости и вероятности бизнес могут быть в частности использованы для расчёта выходных характеристик бизнес-процесса при помощи уравнения Мейсона.

Ключевые слова. инвариант, сеть Петри, оптимизация, интеграционное тестирование, преобразование моделей.

1 Введение

Данная работа является логическим продолжением предыдущей и иллюстрирует ещё один способ применения инвариантов бизнес-процесса.

Топологическое уравнение Мейсона позволяет вычислить значение эквивалентной функции для заданной GERT сети, которое в реальных системах в зависимости от целей анализа может характеризовать общее время выполнения процесса, его стоимость или другое свойство.

Сложность задачи определения петель в бизнес-процессе напрямую зависит от сложности модели бизнес-процесса. Следует помнить, что редко бизнес-процесс описывается единственной моделью, чаще он дробится на под процессы, для каждого из которых может быть построена своя модель и т.д. В такой ситуации получение интегральной оценки бизнес-процесса затруднено.

Для упрощения этой задачи предлагается автоматизированный метод определения петель в бизнес-процессе.

Понятно, что при определенных (изложенных также в работе [3]) ограничениях на правила перевода событийной модели (ARIS eEPC, IDEF3) эквивалентная ей сеть Петри может быть использована для исследования топологии модели. В частности, при

использовании специализированных фишек сети Петри – авторы называли их процессными маркерами – последовательность срабатываний переходов такой сети соответствует последовательности выполнения операций бизнес-модели.

Очевидно, что решив задачу нахождения всех инвариантов сети, сформированной таким образом, мы сможем получить, в том числе и инварианты-петли, которые послужат в качестве отправной точки для расчёта эквивалентной функции.

Для анализа в данной работе использовалась модель событийно-управляемых цепочек процессов ARIS eEPC [5].

2 Термины и определения

Алгебраически обыкновенная сеть Петри N может быть представлена следующим образом ([2, 4]):

$$N = \{\Theta, P, T, F, M(0)\},$$

где Θ – дискретное время, $\theta = 0, 1, 2, \dots$;
 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – множество узлов, называемых позициями сети;
 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ – множество узлов, называемых переходами сети;
 $F = F^p \cup F^t$ – функция инцидентности;
 $F^p = \left\| \| f_{ij}^p \right\|$ – $n \times m$ матрица, $F^t = \left\| \| f_{ji}^t \right\|$ – $m \times n$ матрица, $f_{ij}^p \geq 0$ – кратность дуги от p_i к t_j , $f_{ji}^t \geq 0$ – кратность дуги от t_j к p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Каждая позиция p_i в момент времени θ может содержать целочисленный ресурс $m_i(\theta)$, совокупность ресурсов в позициях в момент времени θ определяет вектор маркировки:

$$M(\theta) = [m_1(\theta), m_2(\theta), \dots, m_n(\theta)].$$

Начальная маркировка $M(0)$ определяет наличие ресурсов в позициях в момент запуска системы. Функционирование сети Петри заключается в изменении маркировки $M(\theta)$ путём срабатывания переходов. Переход t_j может сработать (называется разрешённым) если:

$$m_i(\theta) \geq f_{ij}^p, i = 1, 2, \dots, n.$$

При срабатывании перехода t_j происходит изменение маркировки по правилу:

$$m_i(\theta + 1) = m_i(\theta) - f_{ij}^p + f_{ji}^t, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Пусть t_j – разрешённый переход в момент времени θ . Введём -вектор $\tau_j(\theta) = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]$, в котором на j -м месте стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Тогда формула (1) может быть представлена в векторном виде:

$$M(\theta + 1) = M(\theta) + \tau_j(\theta)\Phi,$$

где $\Phi = \left\| f_{ji}^t - f_{ij}^p \right\| = (F^t)^T - F^p$ – $n \times m$ матрица разности ресурсов.

Для сети Петри определены понятия t - и p -инвариантов. t -инвариантом (инвариантом переходов) называется такое множество переходов $\Gamma^t \subset T$, которые, срабатывая последовательно, приводят маркировку сети к начальной. p -инвариантом (инвариантом позиций) называется такое множество позиций $\Gamma^p \subset P$, сумма ресурсов в которых неизменна на протяжении всего функционирования сети.

Известно, что инвариант переходов сети Петри определяется следующим образом [1]:

$$\Phi \times W = 0_m, \quad (2)$$

где W – ненулевой -вектор, состоящий из нулей и единиц, единица в позиции j означает включение перехода t_j в инвариант, нуль – отсутствие одного в инварианте;

0_m – нулевой m -вектор столбец.

3 Алгоритм нахождения инвариантов

Для поиска инвариантов бизнес-процесса преобразуем eEPC модель в сеть Петри при помощи метода описанного в [2], вычислим инварианты полученной сети и преобразуем их обратно в термины исходной модели. В данной статье используется его модификация, заключающаяся в замыкании исходной модели через два ИЛИ правила. Это позволяет рассчитать инварианты для линейных бизнес-процессов.

Необходимым условием наличия инвариантов сети Петри является положительное значение дефекта матрицы Φ [1], т.е. наличия в ней линейно зависимых строк и столбцов.

Алгоритм трансляции модели бизнес-процесса в одноцветную сеть Петри, описанный в [2], предполагает сопоставление перехода каждому

активному элементу (событие и функция в нотации eEPC) и позиции – связям активных элементов. Что приводит к увеличению размера получаемой сети Петри (а соответственно и матрицы Φ) более чем в два раза по сравнению с размером исходной модели.

Первым шагом для расчета инвариантов является построение матрицы разности ресурсов – Φ . Для реальных моделей бизнес-процессов размерность матрицы может составлять многие десятки, а то и сотни строк и столбцов. Учитывая, что при трансляции бизнес-модели в сеть Петри количество составных элементов увеличивается, а так же, что реальные модели процессов могут состоять из большого числа объектов с множеством логических операций, матрица Φ для реальных задач может иметь достаточно большую размерность. К примеру, для модели из 50 элементов и 25 правил матрица Φ будет иметь размерность близкую к 100×100 .

В рамках поставленной задачи матрица Φ и вектор W обладают следующими свойствами:

1. Элементы матрицы Φ могут принимать только значения -1, 0 и 1. Данное свойство обусловлено алгоритмом трансляции, предполагающим создание ветвей с весом равным единице.
2. Матрица Φ является разреженной матрицей, ввиду того, что сеть Петри получена из модели бизнес-процесса, для которых свойственно малое число связей элементов модели по сравнению с количеством самих элементов в модели.
3. Элементы вектора W могут принимать только значения 0 и 1.

Однако, даже несмотря на эти ограничения, пространство возможных решений достаточно велико (2^n), что препятствует применению метода полного перебора. Ввиду этого для поиска инвариантов был применён алгоритм, приведённый на Рис. 1.

Определение вариантов вектора W производится по признаку равенства нулю скалярного произведения данного вектора на анализируемую строку матрицы Φ . В силу специфики задачи матрица Φ сильно разрежена, соответственно в части элементов строки содержатся нули. Это означает, что на соответствующих позициях вектора W могут находиться любые значения. Таким образом, получим векторы, у которых часть значений определена, а часть – обозначена знаком вопроса. Полученные векторы назовем частичными.

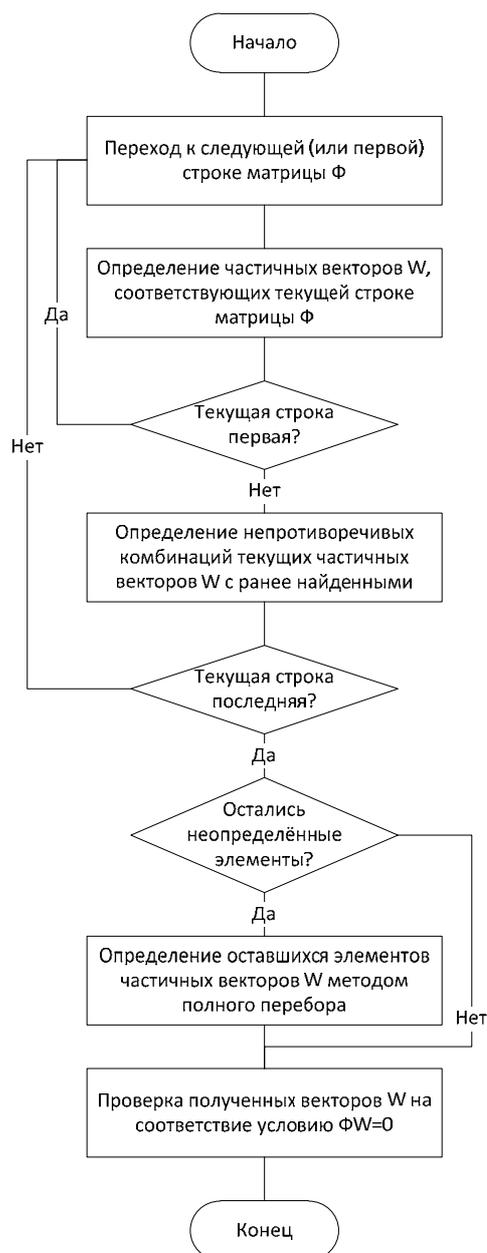


Рис. 1. Алгоритм расчета инвариантов.

Определение непротиворечивых сочетаний частичных векторов производится по следующему правилу: определённые значения одного частичного вектора равны или соответствуют неопределённым значениям другого.

Подобный подход не всегда позволяет получить конечное решение – получить из частичных векторов полные. После окончания обработки последней строки матрицы F в частичных векторах могут остаться неопределённые значения. Это говорит о том, что исходная матрица недоопределена. Однако т.к. требуется найти только вектора из нулей и единиц,

недостающие элементы можно определить, методом полного перебора.

На основе полученных инвариантов определим соответствующие им наборы переходов, приводящих анализируемую сеть Петри к стартовой разметке. Проводя соответствие между каждым переходом и соответствующим ему символом на модели бизнес-процесса легко построить соответствующие данному инварианту сценарий выполнения бизнес-процесса. Идентификация связей, входящих в инвариант бизнес-процесса, производится путём определения позиций, сопоставленных со связями бизнес-модели.

Таким образом будут получены инварианты исходного бизнес-процесса – наборы элементов исходной модели и рёбер связывающих их. Из полученного множества инвариантов достаточно просто выделить петли, основываясь на приведённом выше определении. Дополнительно для каждого инварианта-петли легко определить порядок петли, найдя количество несвязанных «кластеров» в инварианте.

Стоит заметить, что данный метод эффективен только на определённых входных данных, специфичных для рассматриваемого класса задач. Ввиду того, что количество связей в сети Петри, описывающей бизнес процесс, сравнимо с количеством вершин, матрица приращения ресурсов имеет разряжённый характер. Допустим, что в исходной матрице размерности $n \times m$ в каждой строке не более чем k ненулевых элементов, $k \leq m$.

Для каждой из n строк матрицы приращения ресурсов решается задача полного перебора по ненулевым элементам. Для каждого из 2^k вариантов выполняется k умножений и $k - 1$ сложений:

$$T = n2^k(k + k - 1) = n2^k(2k - 1).$$

Для рассматриваемых задач k не зависит от n и m , таким образом, результирующая вычислительная сложность алгоритма имеет порядок $O(n)$. На более общих входных данных, где значение k близко к n , вычислительная сложность алгоритма имеет порядок $O(n^2 2^n)$. К примеру, метод Гаусса имеет вычислительную сложность порядка $O(n^3)$ и более чем в два раза эффективен уже при $n = 3$.

4 Результат расчета

Рассмотрим алгоритм поиска инвариантов бизнес-процесса на примере. В качестве исходной модели возьмём диаграмму, описывающую простой процесс приведённую на Рис. 2.

$$\Phi^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Определим возможные варианты вектора W. Для первой строки матрицы Ф определяются следующие частичные векторы:

$$W_0^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, W_0^{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ ? \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, W_0^{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ ? \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, W_0^{14} = \begin{bmatrix} 1 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}.$$

$$W_0^{21} = \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, W_0^{22} = \begin{bmatrix} ? \\ 1 \\ 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ 1 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}, W_0^{23} = \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ 1 \\ ? \\ ? \\ ? \\ 1 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}.$$

Сопоставляя каждый вектор из набора $W_0^{11}, W_0^{12}, W_0^{13}, W_0^{14}$ с каждым вектором из набора $W_0^{21}, W_0^{22}, W_0^{23}$, определим непротиворечивые сочетания частичных векторов. Так, например, сочетание W_0^{11} и W_0^{21} непротиворечно: определённые значения одного частичного вектора равны или соответствуют неопределённым значениям другого, в

Повторим операцию для второй строки:

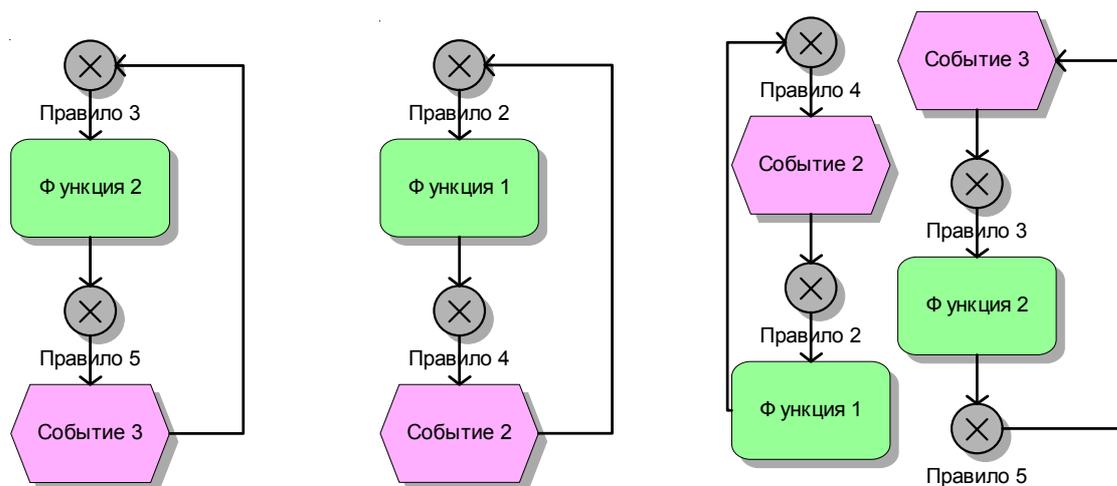


Рис. 4. Инварианты исходного бизнес-процесса.

5 Заключение

Таким образом, предложен алгоритм расчёта инвариантов сети Петри, эффективный на задачах больших размерностей. Алгоритм реализован в виде программного средства, обеспечивающего поиск петель в исходной бизнес-модели в нотации ARIS eEPC. Данный алгоритм показал высокую скорость работы – сценарии для моделей реально применяющейся на практике размерностей (20 – 30 элементов на модели) рассчитываются за время, ограничивающееся единицами минут. Таким образом, помимо научной значимости результат обладает и чисто практической значимостью, снижая трудоемкость разработки сценариев интеграционного тестирования и исключая риск неполноты полученных тестов.

Литература

- [1] K. Jensen *Coloured Petri Nets - Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use, Vol. 2: Analysis Methods*. Springer, New York, 1997.
- [2] Г. А. Доррер *Моделирование вычислительных систем. Учебное пособие для студентов направлений 552800 и 654600*. СибГТУ, Красноярск, 2003.
- [3] М. Г. Доррер. Алгоритм преобразования моделей бизнес-процессов в одноцветные сети Петри. *Моделирование и анализ информационных систем. Т. 17*, 5–16, 2010.
- [4] В. Е. Котов. *Сети Петри*. Наука, Москва, 1984.
- [5] А. В. Шеер. *Бизнес-процессы. Основные понятия. Теория. Методы*. Весть-МетаТехнология, Москва, 1999.

Использование воды для заводнения пластов в целях пожаротушения

Е.В. Замахаев

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

С. А. Калистратов

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Д.С. Ивахов

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Аннотация. В работе рассмотрена современная технология добычи нефти в месторождениях, которые разрабатываются при помощи искусственного заводнения.

Ключевые слова. Добыча нефти

Одним из условий тушения пожара является наличие гарантированного объема воды для целей пожаротушения, поэтому даже кратковременная остановка подачи воды приводит к первоначальной, до тушения, площади пожара. Обеспечение надежного источника противопожарного водоснабжения объектов Ванкорского месторождения, особенно в условиях крайне низких температур, является сложной инженерной задачей, требующей достаточно больших финансовых затрат. Предложен вариант использования воды для заводнения пластов в целях пожаротушения. Данное решение позволяет в большей степени отказаться от строительства специальных сетей противопожарного водоснабжения, снизить численность персонала на обслуживание, обеспечить большую надежность пожаротушения при отрицательных температурах, сократить численность пожарных и пожарной техники на месторождении.

В нашей работе будет рассмотрена современная технология добычи нефти в месторождениях, которые разрабатываются при помощи искусственного заводнения - возведение водоснабжающей системы с насосными станциями.

Объекты Ванкорского месторождения используют данную технологию и оснащены соответствующим оборудованием и трубопроводами. Данные объекты, как и любые многие нефтедобывающие, перерабатывающие, хранящие нефть объекты, весьма опасны с точки зрения пожарной безопасности. Соответственно должна присутствовать и надежная работающая система пожаротушения, но в условиях вечной мерзлоты довольно проблематично ее организовать и тем более содержать в постоянной готовности и исправности. Поэтому нами предлагается более надежный и экономически выгодный способ по обеспечению пожарной безопасности, основанный на использовании технологии искусственного заводнения пластов.

Надежный источник противопожарного водоснабжения в условиях крайне низких температур требует достаточно больших финансовых затрат. В таких

условиях крайне трудно и накладно содержать трубопровод с постоянным давлением и положительной температурой. Изучив проблемы, связанные с географическим положением рассматриваемых объектов, нами предлагается следующий вариант использования воды для заводнения пластов в целях пожаротушения:

Почему бы не отказаться от строительства специальных сетей противопожарного водоснабжения, и задействовать уже готовую систему трубопроводов на нужды тушения пожаров.

Рассмотрим трубопровод системы заводнения пластов. В нем постоянно поддерживается положительная температура, высокое давление (>10 МПа), происходит фильтрация воды.

В стандартных сетях противопожарного водоснабжения рабочие давление равно 2 - 4 МПа. При использовании пожарных гидрантов требуется повышение давления до 6 МПа. Следовательно, для повышения давления появляется нужда в насосах, пожарных автомобилях и персонале, обслуживающем данную технику.

Суть предлагаемого метода состоит во "врезании" элементов пожаротушения в сети искусственного заводнения в целях увеличения надежности, удешевления в строительстве и обслуживании, возможности отказа от использования дорогостоящей пожарной техники, снижения численности персонала на обслуживания, а также возможности в будущем упразднения пожарных частей при условии переобучения обслуживающего персонала указанного объекта защиты специальным навыкам и умениям пожарного.

Очевидно, что к выбору подобной технологии необходим индивидуальный подход. Каждый объект месторождения имеет свою специфику, свои размеры, свои особенности местоположения. Тем самым мы избавляемся от надобности устанавливать дополнительные резервуары для осуществления забора воды из них в систему противопожарного водоснабжения, и производим забор воды напрямую из системы искусственного заводнения пластов, устраняя этим потребность в нагреве воды на цели пожаротушения, потребность в установке насосных станций водоснабжения, а также обеспечиваем большую надежность пожаротушения при отрицательных температурах.

Математическая модель финансовых потоков процедуры пожизненной ренты

Ирина Алексеевна Захорольная
Томский государственный университет
Томск
izax@mail2000.ru

Анатолий Андреевич Назаров
Томский государственный университет
Томск

Аннотация. В работе построена математическая модель финансовых потоков в процедуре пожизненной ренты в виде потоков в системе с неограниченным числом фаз и линий обслуживания. Получена характеристическая функция величины прибыли плательщика ренты и проведен численный анализ влияния на величину прибыли размера рентного платежа.
Ключевые слова. Поток, пожизненная рента, неограниченное число фаз и линий, система массового обслуживания.

1 Введение

Финансовые потоки [1] в процедуре пожизненной ренты можно в общем случае определить тремя различными потоками: входящим потоком владельцев недвижимости, желающих заключить договоры пожизненной ренты, потоком моментов окончания фаз обслуживания, когда происходит выплата рентных платежей и потоком моментов окончания договоров пожизненной ренты.

2 Математическая модель

Владельцы недвижимости принимают решение заключить договор пожизненной ренты независимо друг от друга и их количество достаточно велико. Поэтому случайный поток событий, означающих моменты заключения договоров пожизненной ренты с отдельными владельцами недвижимости, можно считать простейшим с параметром λ .

Заключив договор, клиент на протяжении некоторого интервала времени, определяемого договором для регулярной выплаты ренты (ежемесячно), обслуживается компанией, с которой был заключен договор. Этот временной период будем называть фазой обслуживания.

Будем полагать, что продолжительность обслуживания на каждой фазе случайная (в частности детерминированная) с функцией распределения $B(x)$.

Завершив обслуживание на k -ой фазе, то есть по истечении указанного временного периода, клиенту, если он продолжает обслуживаться в данной компании, что произойдет с вероятностью r_k , выплачивается рента и он переходит на следующую $(k + 1)$ -ую фазу обслуживания.

Вероятности r_k определяются функцией дожития [2] в виде:

$$r_k = S(k)/S(k - 1), \quad (1)$$

где $S(k)$ - функция дожития, то есть вероятность того, что человек доживет до возраста, определяемого номером k рассматриваемой фазы обслуживания, а $S(0) = 1$.

Соответственно, с вероятностью $1 - r_k$, клиент на следующую фазу не переходит по причине своей кончины, то есть действие договора пожизненной ренты заканчивается, и недвижимость, указанная в договоре, реализуется компанией.

Таким образом, в качестве математической модели процедуры пожизненной ренты предлагается рассмотреть систему массового обслуживания (рис. 1) с неограниченным числом линий и бесконечным числом фаз обслуживания в каждой линии.

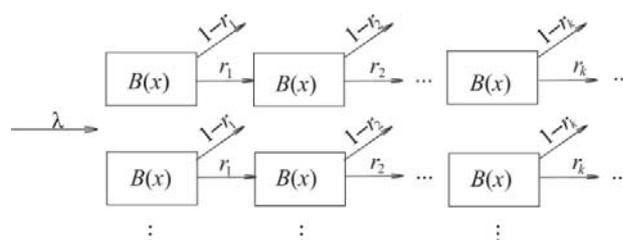


Рис.1: СМО с неограниченным числом фаз и линий обслуживания

Рассмотрим случайные процессы, формируемые математической моделью, определяющие основные финансовые потоки процедуры пожизненной ренты:

$v(t)$ - число заявок входящего потока, поступивших в систему за время t , то есть число заключенных компанией договоров пожизненной ренты за указанный промежуток времени;

$n(t)$ - число фаз, завершенных всеми заявками за время t , то есть количество выплаченных компанией рентных платежей по всем договорам за время t ;

$m(t)$ - число заявок, завершивших обслуживание и покинувших систему за время t , то есть количество случаев реализации отошедшей компании недвижимости.

Распределение вероятностей трехмерного случайного процесса $\{v(t), n(t), m(t)\}$ необходимо для определения процесса изменения прибыли компании, а также оптимального размера рентных платежей, удовлетворяющего обе стороны договора.

3 Совместная производящая функция потоков заявок в системе с неограниченным числом фаз и линий.

Проведем теперь исследование случайного процесса $\{v(t), n(t), m(t)\}$.

Теорема. Производящая функция $G(x, y, z, t)$ трехмерного случайного процесса $\{v(t), n(t), m(t)\}$ в системе массового обслуживания с неограниченным числом фаз и линий имеет вид:

$$G(x, y, z, t) = \exp \{ (x-1)\lambda t + \lambda x \sum_{k=1}^{\infty} \{ (z-1)S(k-1) + (y-z)S(k) \} * y^{k-1} \int_0^t B^{(k)}(\tau) d\tau \}$$

где $B^{(k)}(t)$ – k -кратная свертка распределений $B(t)$, а $S(k)$ в силу равенства (1) имеет вид

$$S(k) = \prod_{i=1}^k r_i.$$

Функцию $S(k)$ в демографии называют функцией дожития, ее аналитическим выражением, наиболее адекватно соответствующим статистическим данным, является функция Гомперца–Майкхама

$$S(k) = \exp\{-Ak - B(e^{ak} - 1)\},$$

в которой параметры A , B и a определяются из статистических данных.

Для мужчин Российской Федерации известны [3] следующие статистические данные для безусловной функции дожития (табл. 1).

Таблица 1. Безусловная функция дожития для мужчин возраста x лет.

x	60	70	80	90
$S(x)$	0.651	0.434	0.188	0.003

Здесь x – возраст мужчины в годах; $S(x)$ – значения функции дожития для мужчин возраста x . Поэтому для условной функции дожития $S_{60}(x)$ для мужчин старше 60 лет эти значения будут следующими (табл. 2).

Таблица 2. Функция дожития до k -го месяца для мужчин старше 60 лет.

k	0	120	240	360
$S_{60}(k)$	1	0.6667	0.2888	0.0046

Здесь k определяется продолжительностью выплат рентных платежей в месяцах, а $S_{60}(x)$ – значение условной функции дожития до k -го месяца мужчин

старше 60 лет. следовательно, для численных расчетов функцию $S_{60}(x)$ можно брать в виде

$$S(k) = \exp\{-0.0028k - 0.0097(e^{0.017k} - 1)\}.$$

Аналогично определяются значения параметров для условных функций дожития мужчин других возрастов, а также женщин.

Например, для мужчин старше 70 лет, условная функция дожития приобретает вид:

$$S(k) = \exp\{-0.0067k - 0.0012(e^{0.028k} - 1)\}.$$

Будем полагать, что при заключении договора пожизненной ренты издержки плательщика ренты, связанные с привлечением клиента, составляют значение величины ρ . При переходе клиента на следующую фазу издержки компании, связанные с реализацией рентных платежей, составляют значение случайной величины η .

В момент закрытия договора в связи с исполнением обязательств, компания получает доход равный значению случайной величины ζ .

Обозначим $W(t)$ – прибыль, накопленную плательщиком ренты за время t коммерческой деятельности по предоставлению услуг пожизненной ренты.

Так как прибыль равна разности доходов и расходов, то

$$W(t) = \zeta_1 + \dots + \zeta_{m(t)} + \eta_1 + \dots + \eta_{n(t)} + \rho_1 + \dots + \rho_{v(t)},$$

следовательно, полагая стохастическую независимость величин ζ_i , η_i , ρ_i , принимающих свои значения в различные моменты времени наступления платежей для различных получателей ренты, а также их одинаковые по всем i распределения, характеристическая функция величины прибыли $W(t)$ имеет вид

$$G1(a, t) = G(x(-a), y(-a), z(a), t),$$

где функция $G(x, y, z, t)$ определяется теоремой 1.

Пусть $M\zeta = 1$ – стоимость квартиры, например 2 миллиона рублей, $M\eta = \delta$ – доля от стоимости квартиры, которую следует выплатить клиенту за один месяц в качестве ренты, $M\rho = \delta_1$ – доля от стоимости квартиры, которую может потратить фирма на привлечение клиента.

Следовательно, $W_1(t)$ – средняя прибыль плательщика ренты, имеет вид:

$$W_1(t) = \lambda \sum_{k=1}^{[t]} \{S(k-1) - S(k)\}(t-k) - \lambda \delta \sum_{k=1}^{[t]} S(k)(t-k) - \lambda \delta_1 t. \quad (2)$$

4 Численный анализ математической модели пожизненной ренты

Подставляя найденную функцию дожития $S_{60}(x)$ в (2) и полагая $\delta_1=0$ – затраты на привлечение новых получателей ренты учтены в остаточной стоимости недвижимости, определяющей величину ренты, выполним численный анализ среднего значения $W_1(t)$ величины прибыли плательщика ренты при $\lambda=1$ (один новый клиент в месяц) и среднем значении остаточной стоимости квартиры в 2 млн р.

Изменение во времени величины прибыли $W_1(t)$ для некоторых значений δ показано на рис. 2, где по оси абсцисс откладывается время в годах, а по оси ординат значение прибыли плательщика ренты в млн р.

Становится очевидно, что назначение рентных платежей в размере $\delta > 0.003$ от стоимости недвижимости для плательщика ренты экономически нецелесообразно. При $\delta=0.003$ и стоимости квартиры в 2 млн р. величина ренты составляет 6 тыс р. в месяц, но в среднем эти выплаты покрывают лишь половину стоимости квартиры, что вряд ли может заинтересовать владельца недвижимости. Поэтому процедуру пожизненной ренты необходимо реализовывать для людей более старших возрастов для увеличения скорости оборота денежных средств [4].

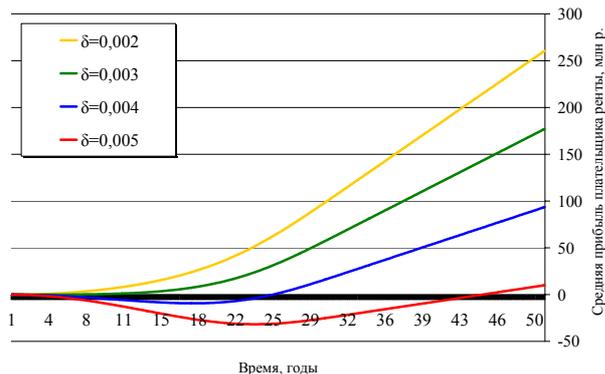


Рис. 2. Процесс изменения средней величины прибыли при заданном размере рентных платежей

На рис. 3 изображены графики изменения прибыли для клиентов старше 70 лет. Теперь компания не терпит убытков при $\delta=0.006$, рентный платеж составит 12 тыс р., стоимость квартиры покрывается такими выплатами приблизительно на 70%, прибыль компании уже через 10

лет работы составит 470 тыс р. в год, а через 50 лет составит 140 млн р. в год. Очевидно, что договор на таких условиях может оказаться взаимовыгодным для обеих сторон. Если такую деятельность осуществляет государственная компания, то ее функционирование способствует накоплению так называемых «длинных» денег, что весьма актуально для стабильного развития экономики.

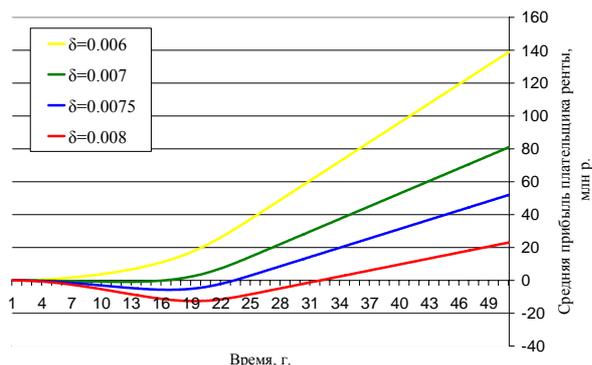


Рис. 3. Процесс изменения средней величины прибыли при заданном размере рентных платежей клиентам старше 70 лет

Литература

- [1] Четыркин Е.М. *Методы финансовых и коммерческих расчетов* – М.: «Дело Лтд.», 1995.
- [2] Валентий Д.И., Кваша А.Я. *Основы демографии*. – М.: Мысль, 1989.
- [3] Четыркин Е.М. *Пенсионные фонды. Зарубежный опыт для отечественных предприятий, актуарные расчеты*. – М.: АО «Арго», 1993.
- [4] Назаров А.А., Ананина И.А. Математическая модель процедуры пожизненной ренты // *Известия Томского политехнического университета*. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – Т. 318. – №5. – С. 160-165.

Трансляция модели бизнес-процессов в нотации ARIS eEPC в GERT-сеть

Антон Александрович Зырянов

Сибирский государственный технологический университет
Красноярск
ZyryanovAntonA@gmail.com

Михаил Георгиевич Доррер

Сибирский государственный технологический университет
Красноярск
mdorrier@mail.ru

Аннотация. *Предлагается алгоритм трансляции модели бизнес-процессов в нотации ARIS eEPC в модель GERT-сети. Рассматривается модель узла GERT-сети, моделирующая разветвление хода процесса по логическому правилу OR.*

Ключевые слова. *Бизнес-процесс, трансляция модели, ARIS EPC, GERT, вероятность, сетевой анализ.*

1 Введение

Использование процессного подхода в конкурентной экономической среде обеспечивает важные преимущества для предприятия – обоснованное фактами принятие решений, высокий уровень делегирования ответственности, рациональная, «плоская» организационная структура, восприимчивость к изменениям.

Процессный подход к управлению включает в себя как один из этапов формализацию и описание бизнес-процессов, которые позволяют показать деятельность организации в виде цепочек создания ценности для конечного потребителя.

Совершенствование деятельности организации связано с совершенствованием бизнес-процессов. Для этого необходимо проводить моделирование и анализ бизнес-процессов с целью: обнаружения «узких мест», оценки структуры и показателей бизнес-процессов и т.п. В настоящее время для моделирования и анализа бизнес-процессов используются различные подходы и средства. В первую очередь следует отметить методологии описания бизнес-процессов IDEF, ARIS, BPM. Отметим также, что для анализа бизнес-процессов могут применяться непосредственно программные продукты для имитационного моделирования – AnyLogic, GPSS и др. Также при моделировании и анализе бизнес-процессов используется аппарат сетей Петри [1], [2], аппарат цепей Маркова и др.

Однако при анализе числовых показателей бизнес-процессов аналитики неизбежно сталкиваются с дилеммой: либо обеднение функциональности анализа путем исследования лишь детерминированных показателей времени и стоимости процесса (подобно тому, как это делается в методике функционально-стоимостного анализа), либо получение вероятностных данных процесса, но ценой очень высокой трудоемкости решения при имитационном моделировании.

Однако имитация является случайным экспериментом. Поэтому любой результат, полученный путем

имитационного моделирования, подвержен экспериментальным ошибкам и, следовательно, как в любом статистическом эксперименте, должен основываться на результатах соответствующих статистических проверок [3].

За последние годы для моделирования и оптимизации технических систем все большее распространение получают GERT-сети (GERT – graphical evaluation and review technique). Классическое описание GERT-сетей приведено в декларации Прицкера [6], на русском языке описание GERT-сетей можно найти в книге Филлиппа и Гарсиа-Диаса [4].

GERT-сети являются вариантом полумарковских моделей, но случайные величины в них характеризуется не только дисперсией, но и законом распределения. При использовании GERT-сетей, как правило, определяют значения переменных, связанных с первыми моментами распределения выходной величины относительно начала координат (математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса).

Таким образом, актуальной становится задача замены имитационного моделирования бизнес-процессов более точным и менее трудоемким методом. В качестве такого метода авторы предлагают использовать аппарат GERT-сетей.

2 Описание бизнес-процессов

Для описания бизнес-процессов в статье будет использоваться нотация ARIS eEPC. Она принадлежит к классу событийных моделей деятельности. По изобразительной мощности она примерно соответствует IDEF3 и UML State-Chart Diagram, обладая над ними рядом преимуществ, главное из которых – большее количество символов модели, специально адаптированных для предметных областей – офисные процессы, производственные процессы.



Рис. 1: Объекты модели ARIS eEPC.

Модель в нотации ARIS eEPC может быть описана графом D .

$$D = (S_0, L_0),$$

где $S_0 = \{s_1, \dots, s_q\}$ – множество символов модели eEPC (процессы, события, перекрестки) Рис. 1, q – количество символов;

$L_0 = \{l_1, \dots, l_a\}$ – множество связей (дуг) модели eEPC; a – количество дуг; $\forall l_a$, соединяющая объекты модели eEPC, характеризуется атрибутом p_{la} – вероятность выполнения дуги l_a ;

$F_0^L = \|f_{ij}^L\|$ – $a \times q$ матрица, $F_0^S = \|f_{ji}^S\|$ – $q \times a$ матрица, f_{ij}^L – инцидентность l_i с s_j , f_{ji}^S – инцидентность s_j с l_i .

$X_0, B_0, R_0 \in S_0$, где $X_0 = \{x_1, \dots, x_u\}$ – множество объектов типа «событие», u – количество событий; $B_0 = \{b_1, \dots, b_m\}$ – множество объектов типа «функция», m – количество функций; каждая функция характеризуется рядом атрибутов, значимым из которых является t_{bm} – время работы функции b_m ;

Кроме времени, для функции могут быть заданы другие параметры работы (стоимость, количество необходимых ресурсов и т.п.).

$R_0 = \{r_1, \dots, r_k\}$ – множество объектов типа «правило» (AND, OR, XOR), задающих логику ветвления/слияния бизнес-процесса, k – количество правил. Множество правил ветвления R_0 состоит из элементов множества R_{And} , R_{Or} , R_{Xor} , где R_{And} – множество правил ветвления типа AND (И), где R_{Or} –

множество правил ветвления типа OR (ИЛИ), где R_{Xor} – множество правил ветвления типа XOR (исключающее ИЛИ).

3 GERT-сеть

Математическая модель GERT-сети может быть описана направленным взвешенным графом G .

$$G = (V, E),$$

где $V = \{v_1, \dots, v_h\}$ – множество вершин (узлов), h – количество узлов; $E = \{e_1, \dots, e_c\}$ – множество направленных ребер (дуг), c – количество дуг; Res – множество источников (начальная вершина графа), такое что $Res \in V$; Src – множество стоков (конечная вершина графа), такое что $Src \in V$; $F_0^E = \|f_{ij}^E\|$ – $c \times h$ матрица, $F_0^V = \|f_{ji}^V\|$ – $h \times c$ матрица, f_{ij}^E – инцидентность e_i с v_j , f_{ji}^V – инцидентность v_j с e_i .

Узлы GERT-сети интерпретируются как состояния системы, а дуги как переходы из одного состояния в другое. Такие переходы связываются с выполнением обобщенных операций, характеризующихся плотностью распределения и вероятностью выполнения.

Направленное ребро (дуга) ассоциируется с тем, из какого узла i оно выходит и в какой узел j входит, и обозначается как дуга $\langle i, j \rangle$. Дуга $\langle i, j \rangle$ в рамках GERT-сетей рассматривается как «работа на дуге» и имеет вес некоторого аддитивного параметра (например, время выполнения работы). Для GERT-сети весом дуги $\langle i, j \rangle$ является вектор $[p_{ij}, F_{ij}]$, где p_{ij} – условная вероятность выполнения дуги $\langle i, j \rangle$ при условии активации узла i , а F_{ij} – условная функция распределения времени выполнения дуги $\langle i, j \rangle$, при условии, что $\langle i, j \rangle$ выполняется. При этом дуга $\langle i, j \rangle$, для которой $F_{ij} = 0$, называется «холостой» дугой или дугой, на которой работа не выполняется.

Каждый узел сети имеет входную и выходную функции активации. Входная функция определяет условие, при котором узел может быть активирован. Выходная функция определяет совокупность условий, связанных с результатом активизации узла.

Виды входных функций:

1. AND-функция – узел активируется, если выполнены все дуги, входящие в него.

2. IOR-функция – узел активируется, если выполнена любая дуга или несколько дуг, входящих в него.
3. EOR-функция – узел активируется, если выполнена любая дуга, входящая в него, при условии, что в данный момент времени может выполняться только одна дуга, входящая в данный узел.

Виды выходных функций:

1. Детерминированная функция (DT) – все дуги, выходящие из узла, выполняются, если узел активирован.
2. Стохастическая функция (ST) – только одна дуга, выходящая из узла, выполняется с заданной вероятностью, если узел активирован.

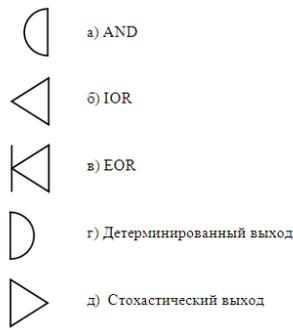


Рис. 2: Входные и выходные функции узлов GERT-сети.

Комбинируя все входные и выходные функции, получаем шесть различных типов узлов Рис. 3.

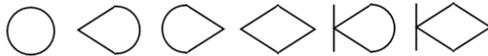


Рис. 3: Типы узлов.

Узел с входной AND-функцией и стохастической выходной функцией называется STEOR-узел.

Активация узла означает, что система перешла в некоторое состояние и определяет множество дальнейших работ (операций). Одна или несколько работ (операций) начинают свое выполнение сразу после активации узла, являющегося их началом. Активация узла происходит, если его входная функция выполнена. После выполнения выходной функции активированного узла он становится неактивным.

Результаты функционирования графа G могут быть представлены в виде набора параметров выполняемой сети: вероятность активации стока сети, функция распределения стока и др.

Таким образом, GERT-сеть – это сеть с источниками Res и стоками Src вида «работа на дуге», в которой каждый узел принадлежит одному из шести типов узлов, для каждой дуги $\langle i, j \rangle$ определен вес вида $[p_{ij}, F_{ij}]$ с вышеуказанным значением и задано начальное распределение источников сети.

4 Алгоритм трансляции

Для трансляции модели бизнес-процесса из нотации ARIS eEPC в соответствующую GERT-сеть необходимо выполнить следующие действия.

Сопоставим каждому символу модели eEPC вершину (узел) GERT-сети. Для каждого s_i создается соответствующий ему v_i , таким образом $q = h$. На данном этапе каждый узел GERT-сети имеет EOR-функцию на входе и стохастическую функцию на выходе, тем самым мы сохраняем условие, что в каждый символ (объекты: событие, функция) модели eEPC входит только одна связь и только одна связь с $p_{ij} = 1$ выходит из объекта.

После этого сопоставления первоначальный вариант функции инцидентности GERT-сети может быть задан простым приравнением $F_0^E = F_0^L$ и $F_0^V = F_0^S$.

Для $\forall s_j, s_j \in R_0$ и существует n связей $l_i, n > 1$, для которых $f_{ij}^L = 1$, определим (возьмем) соответствующий ему узел v_j и сопоставим $\forall v_j$ входную функцию по следующим принципам:

Таблица 1: Преобразование операторов на разветвление.

Оператор eEPC	Узел GERT-сети
$s_j \in RAnd$	v_j с входной AND-функцией
$s_j \in ROr$	v_j с входной IOR-функцией
$s_j \in RXor$	v_j с входной EOR-функцией

Для правил из $RAnd, ROr, RXor$, соответствующие узлы v_j имеют стохастическую функцию выхода.

Для $\forall s_j, s_j \in R_0$ и существует n связей $l_i, n > 1$, для которых $f_{ji}^S = 1$, определим (возьмем) соответствующий ему узел v_j и сопоставим $\forall v_j$ выходную функцию по следующим принципам:

Таблица 2: Преобразование операторов на слияние.

Оператор eEPC	Узел GERT-сети
$s_j \in RAnd$	v_j с детерминированной выходной функцией DT
$s_j \in ROr$	Нет прямого решения в аппарате GERT, предлагаемое авторами решение приведено ниже
$s_j \in RXor$	v_j со стохастической выходной функцией ST

Для правил из $RAnd$, ROr , $RXor$, соответствующие узлы v_j имеют EOR-функцию входа.

Определим вероятность выполнения дуг GERT-сети. Для $\forall l_i$, для которой $f_{ji}^S = 1$, возьмем соответствующую ей дугу e_i и определим вектор $[p_{ji}, F_{ji}]$ в соответствующей позиции $f_{ji}^S = 1$ матрицы F_0^V . Для каждого определенного вектора $[p_{ji}, F_{ji}]$ приравняем значение вероятности p_{ji} к атрибуту p_{li} соответствующей дуги eEPC модели. Таким образом, каждый вектор $[p_{ji}, F_{ji}]$ в позиции f_{ji}^V матрицы F_0^V описывает параметры GERT-сети, взятые из матрицы F_0^S .

Определим функции распределения для дуг GERT-сети. Для $\forall s_j, s_j \in B_0$, возьмем атрибут t_{bj} . Согласно [5], вероятностное поведение системы бизнес-процессов адекватно описывает бета распределение. Так как t_{bj} является средним значением времени выполнения функции b_j , то примем данное значение за математическое ожидание функции распределения времени выполнения дуги, выходящей из узла GERT-сети, соответствующего объекту «функция» модели eEPC.

Возьмем определенный на предыдущем этапе вектор $[p_{ji}, F_{ji}]$ в позиции f_{ji}^V матрицы F_0^V . Для каждого вектора, где соответствующий s_j из F_0^S принадлежит B_0 , определим F_{ji} как функцию, описывающую бета распределение с математическим ожиданием равным t_{bj} .

Для каждого вектора, где соответствующий s_j из F_0^S

не принадлежит B_0 , функция $F_{ji} = 0$, то есть дуга e_i является «холостой».

Таким образом, получены матрицы F_0^E и F_0^V , полностью отображающие GERT-сеть, соответствующую бизнес-процессу, описанному моделью ARIS eEPC.

5 Моделирование узла, описывающего разветвление хода процесса по правилу OR

Для правила OR, описывающего разветвление хода бизнес-процесса в модели eEPC, нет соответствующего узла в понятиях GERT-сети – существует только детерминированная и стохастическая функции выхода, поэтому смоделируем данное правило. В GERT-сеть к узлу v_j , сопоставленного с символом s_j , где $s_j \in ROr$

и существует $n > 1$ значений $f_{ji}^S = 1$, вводится набор узлов и связей между ними структурой, представленной на Рис. 4, а также соответствующим образом дополняются матрицы инцидентности F_0^E и F_0^V . При этом выходная функция узла v_j меняется на детерминированную.

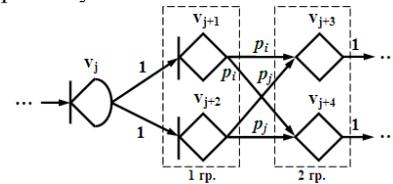


Рис. 4: Модель узла OR.

После первоначального сопоставления модели eEPC, включающей правило разветвления процесса по OR, соответствующий фрагмент GERT-сети выглядит так, как показано на Рис. 5.

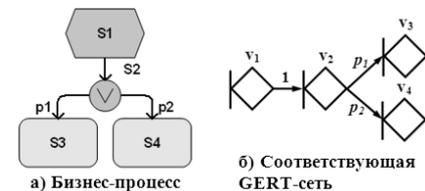


Рис. 5: Первоначальное сопоставление моделей.

Пусть есть n веток разветвления процесса по OR, при этом p_i – вероятность выполнения ветки i , тогда к существующему узлу GERT-сети добавим $2n$ узлов и $(n^2 + n)$ дуг по принципу, визуальнo изображенному на Рис. 4.

Узлы из первой группы Рис. 4, состоящей из n узлов, имеют EOR-функцию активации и вероятностную выходную функцию. Узлы второй группы, состоящей из

n узлов, имеют IOR-функцию активации и вероятностную выходную функцию. В каждый узел второй группы входят дуги из всех узлов первой группы. При этом вероятности дуг, выходящих из узлов первой группы, распределяются так, чтобы в один узел второй группы входили дуги с одинаковой вероятностью p_i . Из каждого узла второй группы выходит с $p_i = 1$ по одной дуге, которая входит в соответствующий узел ветки процесса Рис. 6.

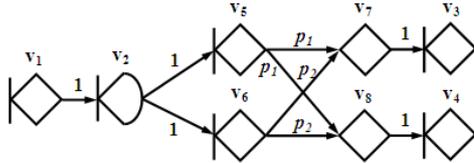


Рис. 6: Полностью сопоставленная GERT-сеть.

Таким образом, при срабатывании всех веток с заданной вероятностью p_1 произойдет активация узла v_5 Рис. 6, при срабатывании всех веток с заданной вероятностью p_2 – узла v_6 , а при срабатывании веток с вероятностями p_1 и p_2 – узлов v_5 и v_6 одновременно, что соответствует таблице истинности оператора OR.

Введем матрицы инцидентности T_M^V и T_M^E подобно матрицам F_0^V и F_0^E между узлами и дугами GERT-сети, соответствующим логике разветвления процесса по OR. T_M^V – $h_T \times c_T$ матрица, где h_T – количество строк матрицы, соответствующее числу узлов, дополнительно введенных для моделирования развилки, $h_T = 2n$, c_T – количество строк матрицы, соответствующее числу дуг, соединяющих введенные узлы, $c_T = n^2 + n$. T_M^E – $c_T \times h_T$ матрица.

Так, для примера, приведенного на Рис. 6, матрицы

$$\text{равны } T_M^V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } T_M^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица F_0^V дополняется T_M^V – матрицей инцидентности узлов, матрица F_0^E дополняется T_M^E – матрицей инцидентности дуг.

Моделирование узла, показанное на Рис. 4, может быть легко перенесено на случай с тремя и более ветками разветвления хода процесса по OR. Предлагаемая

матричная формула адекватно описывает построение узла GERT-сети, описывающего разветвление хода процесса по правилу OR для общего случая N ветвей процесса.

6 Пример трансляции бизнес-процесса в GERT-сеть
Рассмотрим пример по трансляции бизнес-процесса «Изготовление детали» Рис. 7 в GERT-сеть.

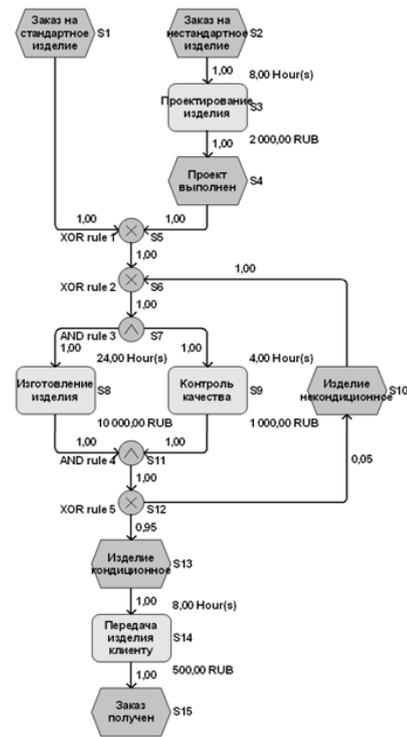


Рис. 7: Модель бизнес-процесса.

В соответствии с алгоритмом трансляции выполним первичные преобразования моделей, данные преобразования приведены в Табл. 3.

Таблица 3: Преобразования объектов моделей.

Объект eEPC модели	Тип объекта eEPC модели	Узел GERT-сети	Тип узла GERT-сети
S1	Событие	V1	STEOR
S2	Событие	V2	STEOR
S3	Процесс	V3	STEOR
S4	Событие	V4	STEOR
S5	Перекресток	V5	STEOR
S6	Перекресток	V6	STEOR
S7	Перекресток	V7	[EOR, DT]
S8	Процесс	V8	STEOR
S9	Процесс	V9	STEOR
S10	Событие	V10	STEOR
S11	Перекресток	V11	[AND, ST]
S12	Перекресток	V12	STEOR
S13	Событие	V13	STEOR

S14	Процесс	V14	STEOR
S15	Событие	V15	STEOR

Приравняем матрицы $F_0^E = F_0^L$ и $F_0^V = F_0^S$.

$$F_0^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

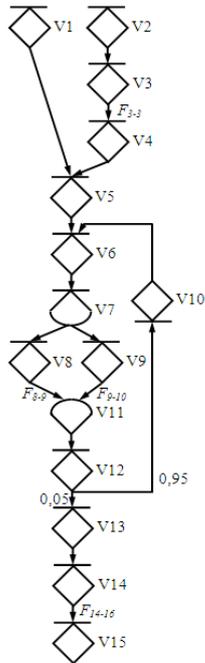
$$F_0^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$


Рис. 9: GERT-сеть.

Таким образом, получена сеть Рис. 9, структура которой соответствует модели исходного бизнес-процесса. Для полной трансляции модели необходимо сопоставить параметры дуг GERT-сети с параметрами процесса модели eEPC.

Таблица 4: Параметры GERT-сети.

f_{ij}	p_{ij}	F_{ij}
f_{3-3}	1	F_{3-3}
f_{8-9}	1	F_{8-9}
f_{9-10}	1	F_{9-10}
f_{14-16}	1	F_{14-16}
f_{12-14}	0,95	-
f_{12-12}	0,05	-

7 Заключение

Таким образом, предложен алгоритм, позволяющий однозначно конвертировать матричную форму описания модели бизнес-процессов в формате ARIS eEPC в матричную форму описания GERT-сети. Кроме того, предложена модель узла GERT-сети, моделирующая разветвление хода процесса по OR.

Полученная GERT-сеть позволяет исследовать и анализировать вероятностное поведение бизнес-процессов и получать их вероятностные характеристики: математическое ожидание и дисперсию времени выполнения. Результаты по исследованию и анализу бизнес-процессов на основе математического аппарата GERT-сетей будут рассмотрены в отдельной статье.

Литература

- [1] Аалст Вил ван дер, Хей Кейс ван. Управление потоками работ: модели, методы и системы. Физматлит, М., 2007.
- [2] М. Г. Доррер. Алгоритм преобразования моделей бизнес-процессов в одноцветные сети Петри. Моделирование и анализ информационных систем, 2:2-16, 2010.
- [3] Таха Хемди А. Введение в исследование операций. Издательский дом "Вильямс", М., 2005.
- [4] Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. Методы анализа сетей. Мир, М., 1984.
- [5] Д. И. Голенко-Гинзбург. Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками. Научная книга, Воронеж, 2010.
- [6] А. А. В. Pritsker. GERT: graphical evaluation and review technique. RAND Corporation, 1966.

Расчет вероятностных характеристик бизнес-процессов на основе GERT-сетей

Антон Александрович Зырянов

Сибирский государственный технологический университет
Красноярск
ZyryanovAntonA@gmail.com

Михаил Георгиевич Доррер

Сибирский государственный технологический университет
Красноярск
mdorrer@mail.ru

Аннотация. Рассматривается подход к оценке вероятностных характеристик бизнес-процессов на основе GERT-сетей. Полученные характеристики сравниваются с результатами имитационного эксперимента.

Ключевые слова. Бизнес-процесс, имитационная модель, ARIS EPC, GERT, вероятность, сетевой анализ.

1 Введение

В работе по совершенствованию бизнес-процессов предприятий и организаций нередко используются имитационные модели совершенствуемых процессов. Компьютерные имитационные модели изображают «образ будущего», модель «Как будет» (To-Be). Затем эту модель запускают, чтобы выявить потенциальные проблемы, связанные с предлагаемым улучшением.

Процесс моделирования позволяет представить в рамках компьютерной модели действия людей и применение технологий, используемых в изучаемых при реинжиниринге процессах. Проведение моделирования предполагает осуществление четырех основных этапов: 1) построение модели, 2) запуск модели, 3) анализ полученных показателей эффективности, 4) оценка альтернативных сценариев.

Имитационное моделирование является мощным инструментом исследования поведения реальных систем. Методы имитационного моделирования позволяют собрать необходимую информацию о поведении системы путем создания ее компьютеризированной модели. Эта информация используется затем для проектирования системы. Имитационное моделирование не решает оптимизационных задач, а скорее представляет собой технику оценки значений функциональных характеристик моделируемой системы, позволяя выявлять проблемные места в системе [1].

В случае использования имитационных моделей они копируют текущую деятельность организации. Это достигается путем прохождения через возможные события в режиме сжатого времени.

Однако имитация является случайным экспериментом. Поэтому любой результат, полученный путем имитационного моделирования, подвержен экспериментальным ошибкам и, следовательно, как в любом статистическом эксперименте, должен основываться на результатах соответствующих статистических проверок [1].

Следовательно, актуальной является задача замены всюду, где возможно, имитационных экспериментов аналитическими моделями.

За последние годы для моделирования и оптимизации технических систем все большее распространение получают GERT-сети (GERT – graphical evaluation and review technique). Они являются вариантом полумарковских моделей, но случайные величины в них характеризуется не только дисперсией, но и законом распределения. Выполнение отдельных операций в технической системе связывается с ветвями (дугами) GERT-сети, которые характеризуются аддитивными случайными величинами. Для расчета производных характеристик GERT-сетей используются производящие функции моментов случайных величин. Выбор каждой следующей ветви в общем случае – вероятностный. При использовании GERT-сетей, как правило, определяют значения переменных, связанных с первыми моментами распределения выходной величины относительно начала координат (математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса).

Особенность событийных моделей бизнес-процессов (к ним относятся ARIS eEPC, IDEF3, UML StateChart) заключается в том, что процедурная последовательность функций в рамках бизнес-процессов отображается в виде цепочки процесса, где для каждой функции могут быть определены начальное и конечное событие. События не только перекрывают функции (передают управление от одной функции к другой), но и являются их результатом.

GERT-сеть имеет стохастическую структуру и может быть выполнена только при выполнении некоторого подмножества дуг. В подобных сетях для выполнения узла не является необходимым выполнение всех дуг, входящих в него, поэтому в них допускается существование циклов и петель. Для решения задачи оценки статистических параметров модели бизнес-процессов при помощи GERT-сети необходимо выполнить сопоставление между бизнес-моделью и моделирующей её GERT-сетью.

Представление бизнес-процессов в виде GERT-сети позволит провести исследования, связанные с расчетом статистических параметров сети. В частности, можно определить функцию плотности вероятности выполнения стока по времени и ресурсам, а также требуемые центральные моменты распределения – математическое ожидание, дисперсию и т.п.

2 Математический аппарат GERT-сетей

GERT-сеть может быть описана направленным взвешенным графом G

$$G = (V, E), \quad (1)$$

где V – множество вершин (узлов); E – множество направленных ребер (дуг);

Узлы GERT-сети интерпретируются как состояния системы, а дуги как переходы из одного состояния в другое. Такие переходы связываются с выполнением обобщенных операций, характеризуемых плотностью распределения и вероятностью выполнения.

Таким образом, GERT-сеть – это сеть с источниками R и стоками S вида «работа на дуге», в которой каждый узел принадлежит одному из шести типов узлов, для каждой дуги $\langle i, j \rangle$ определен вес вида $[p_{ij}, F_{ij}]$ и задано начальное распределение источников сети [4]. p_{ij} – условная вероятность выполнения дуги $\langle i, j \rangle$, при условии активации узла i , F_{ij} – условная функция распределения некоторой случайной величины.

Подробное описание GERT-сетей представлено в работах Притцкера [3], Филиппа и Гарсия-Диаса [2], Neumann[4].

3 Расчет параметров GERT-сетей

Расчет параметров GERT-сети представляет нахождение первых центральных моментов распределения случайной величины сети. В частности, находят первый и второй центральные моменты случайной величины – соответственно математическое ожидание и дисперсию. Кроме этого, для ряда задач имеет значение нахождение вероятности выполнения стока сети и функции распределения случайной величины всей сети.

Дуга $\langle i, j \rangle$ GERT-сети характеризуется распределением некоторой случайной величины Y_{ij} (время выполнения работы, затраты ресурсов и т.д.). Для целей статьи в качестве случайной величины возьмем стоимостные затраты на выполнение соответствующей операции и всего процесса в целом. Также можно рассматривать любой параметр, обладающий аддитивностью по дугам сети.

Алгоритм расчета GERT-сети включает следующие шаги:

1. Представить исследуемую систему в виде GERT-сети;
2. Для каждой дуги сети определить условную вероятность и производящую функцию моментов и вычислить W-функцию;
3. Преобразовать сеть в потоковый граф и замкнуть его относительно стока к источнику;

4. Рассчитать параметры сети на основе уравнения Мейсона.

Пусть F_{ij} – условная функция распределения случайной величины Y_{ij} при выполнении дуги $\langle i, j \rangle$. Условная производящая функция моментов случайной величины Y_{ij} определяется как $M_{ij}(s) = E[e^{sY_{ij}}]$. В частности, $M_{ij}(s) = E[e^{sa}] = e^{sa}$ при $Y_{ij} = a = const$. Если $a = 0$, то $M_{ij}(s) = 1$.

Пусть p_{ij} – вероятность выполнения дуги $\langle i, j \rangle$. Для случайной величины Y_{ij} определим W-функцию как

$$W_{ij}(s) = p_{ij}M_{ij}(s) \quad (2)$$

На основе (2) можно определить сеть G' , структура которой идентична структуре исходной сети G , и вместо двух параметров дуг p_{ij} и Y_{ij} присутствует один параметр $W_{ij}(s)$ Рис. 1.

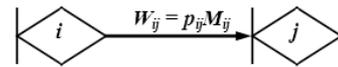


Рис. 1: GERT-сеть G' .

GERT-сеть $G_1(V_1, E_1)$ эквивалентна сети $G_2(V_2, E_2)$, если вероятности активации и функции распределения случайной величины Y соответствующих стоков совпадают. Таким образом, существуют стандартные преобразования участков GERT-сети, позволяющие получить эквивалентную сеть, состоящую из одной-единственной дуги. Данные стандартные преобразования применяются для трех случаев: последовательные дуги, параллельные дуги, дуга и петля.

Рассмотрим сеть, представленную на Рис. 2. Данная сеть состоит из двух последовательных дуг. Эти две дуги могут быть заменены одной эквивалентной им дугой.



Рис. 2: Последовательные дуги и их эквивалентное представление.

Исходные дуги имеют $W_{ij}(s) = p_{ij}M_{ij}(s)$ и $W_{jk}(s) = p_{jk}M_{jk}(s)$. W-функция для эквивалентной ветви $\langle i, k \rangle$ равна $W_{ik}(s) = p_{ik}M_{ik}(s)$. Так как, $p_{ik} = p_{ij}p_{jk}$ и $M_{ik}(s) = [M_{ij}(s)][M_{jk}(s)]$, то

$$W_{ik}(s) = W_{ij}(s)W_{jk}(s) \quad (3)$$

Рассмотрим сеть, представленную на Рис. 3.

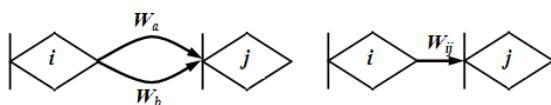


Рис. 3: Параллельные дуги и их эквивалентное представление.

Данная сеть состоит из двух параллельных дуг. Эти две дуги могут быть заменены одной эквивалентной им дугой по следующей формуле

$$W_{ij}(s) = W_a(s) + W_b(s) \quad (4)$$

Рассмотрим сеть, представленную на Рис. 4. Данная сеть состоит из одной петли и одной дуги и может быть преобразована в эквивалентную сеть, состоящую из одной дуги.



Рис. 4: Сеть с петлей и ее эквивалентное представление.

W-функции для эквивалентной дуги равна

$$W_{ij}(s) = W_b(s) / [1 - W_a(s)] \quad (5)$$

Необходимо отметить, что эквивалентные преобразования для последовательных и параллельных дуг могут быть обобщены на случай N ветвей. А формула (5) может быть использована для контуров, поскольку по формуле (3) контур сводится к петле.

Далее для расчета необходимо привести GERT-сеть к потоковому графу [2]. И замкнуть его, введя дополнительную дугу $W_A(s)$, соединяющую сток сети с источником, как изображено на Рис. 5.

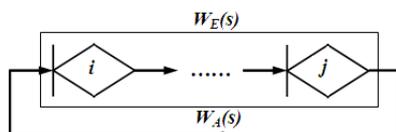


Рис. 5: Замкнутая стохастическая сеть.

Для использования уравнения Мейсона необходимо найти все петли графа.

Петлей называется связная последовательность ориентированных дуг, каждый узел которых является общим ровно для двух дуг. Петля называется петлей первого порядка. Петлей порядка n называется множество n не связанных между собой петель первого порядка.

Для каждой петли L_{k1} первого порядка коэффициент пропускания T_k равен произведению коэффициентов пропускания ветвей, принадлежащих этой петле.

Для петли порядка n эквивалентный коэффициент пропускания $T(L_n)$ равен

$$T(L_n) = \prod_{k=1}^n T_k \quad (6)$$

Топологическое уравнение Мейсона для замкнутых потоковых графов имеет вид:

$$H = 1 + \sum_{j=1}^n (-1)^j \sum T(L_j) = 0 \quad (7)$$

Функция $W_A(s)$ содержится в топологическом уравнении, поскольку она является элементом, по крайней мере, одной петли первого порядка. Выразим из полученного уравнения дугу $W_A(s)$. Заменяв $W_A(s)$ на $1/W_E(s)$ и решив уравнение относительно $W_E(s)$, будет получена эквивалентная W-функция для исходной стохастической сети.

По определению функции $M_{ij}(0)$, $M_{ij}(s) = 1$ при $s = 0$. Поскольку $W_E(s) = p_E M_E(s)$, то $p_E = W_E(s)$, откуда следует, что

$$M_E(s) = W_E(s) / p_E = W_E(s) / W_E(0) \quad (8)$$

Вычисляя k-ю частную производную по s функции $M_{ij}(s)$ при $s = 0$, находим k-ый момент

$$\mu_{kE} = \frac{\partial^k}{\partial s^k} [M_E(s)]_{s=0} \quad (9)$$

В частности, первый момент μ_{1E} относительно начала координат есть математическое ожидание для случайной величины Y_{ij} сети, а дисперсия величины Y_{ij} равна разности между μ_{2E} и квадратом величины μ_{1E}

$$\sigma^2 = \mu_{2E} - (\mu_{1E})^2 \quad (10)$$

4 Исследование бизнес-процессов на основе GERT-сетей

Рассмотрим бизнес-процесс «Изготовление изделия» Рис. 6 и GERT-сеть, соответствующую данному бизнес-процессу. Задача трансляции модели бизнес-процесса в модель GERT-сети будет рассмотрена в отдельной статье.

В Табл. 1 представлено сопоставление элементов модели бизнес-процессов и GERT-сети.

Таблица 1: Сопоставление объектов моделей.

Объект eEPC модели	Тип объекта eEPC модели	Узел GERT-сети	Тип узла GERT-сети
S1	Событие	V1	STEOR
S2	Событие	V2	STEOR
S3	Процесс	V3	STEOR
S4	Событие	V4	STEOR
S5	Перекресток	V5	STEOR
S6	Перекресток	V6	STEOR
S7	Перекресток	V7	[EOR, DT]
S8	Процесс	V8	STEOR
S9	Процесс	V9	STEOR
S10	Событие	V10	STEOR
S11	Перекресток	V11	[AND, ST]
S12	Перекресток	V12	STEOR
S13	Событие	V13	STEOR
S14	Процесс	V14	STEOR
S15	Событие	V15	STEOR

В Табл. 2 представлены параметры, характеризующие дуги GERT-сети, по аддитивному параметру – стоимостные затраты на выполнение функции. Для упрощения записи введен индекс k , который заменяет индексы ij для характеристик p_{ij} , $M_{ij}(s)$, $W_{ij}(s)$, соответствующей дуги $\langle i, j \rangle$.

Таким образом, получена модель GERT-сети, полностью отображающая модель исследуемой системы, а также для каждой дуги сети определены условная вероятность и производящая функция моментов.

Таблица 2: Параметры GERT-сети.

Дуга $\langle i, j \rangle$	k	p_k	$M_k(s)$
$\langle V0, V1 \rangle$	1	0,6	1
$\langle V0, V2 \rangle$	2	0,4	1
$\langle V1, V5 \rangle$	3	1	1
$\langle V2, V3 \rangle$	4	1	1
$\langle V3, V4 \rangle$	5	1	$(1 - 2s)^{-1}$
$\langle V4, V5 \rangle$	6	1	1
$\langle V5, V6 \rangle$	7	1	1
$\langle V6, V7 \rangle$	8	1	1
$\langle V7, V8 \rangle$	9	1	1
$\langle V7, V9 \rangle$	10	1	1
$\langle V8, V11 \rangle$	11	1	$\exp(10s + 0.0003125s^2)$
$\langle V9, V11 \rangle$	12	1	$\exp(s + 0.00005s^2)$
$\langle V11, V12 \rangle$	13	1	1
$\langle V12, V10 \rangle$	14	0,05	1
$\langle V10, V6 \rangle$	15	1	1
$\langle V12, V13 \rangle$	16	0,95	1
$\langle V13, V14 \rangle$	17	1	1
$\langle V14, V15 \rangle$	18	1	$\exp(0.5s + 0.0001125s^2)$
$\langle V15, V1 \rangle$	W_A	1	1

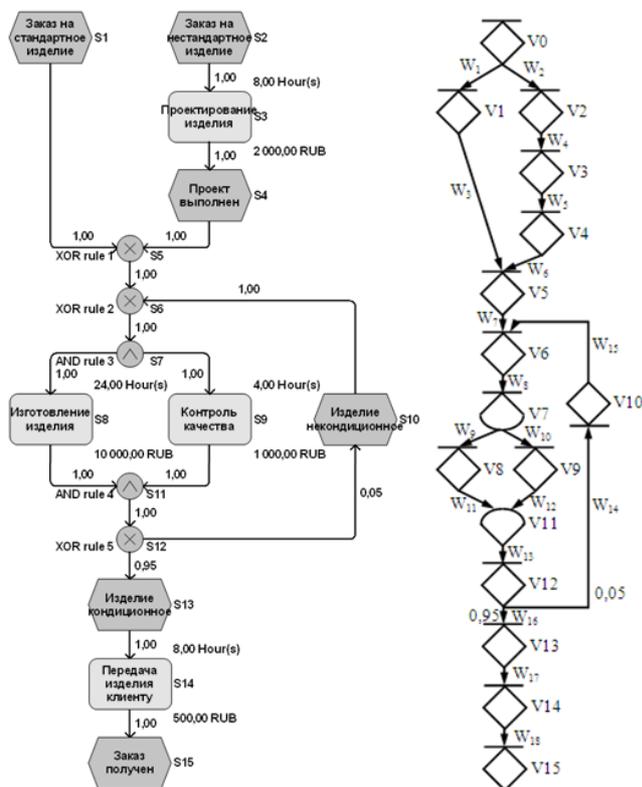


Рис. 6: Бизнес-процесс и соответствующая ему GERT-сеть.

Отметим, что в рассматриваемом бизнес-процессе два начальных события. Каждое из событий инициирует запуск процесса с некоторой вероятностью – “Заказ на стандартное изделие” 60%, “Заказ на нестандартное изделие” 40%. Поэтому для модели GERT-сети введем источник сети $V0$ и дуги, соединяющие источник с вершинами $V1$ и $V2$.

Далее, необходимо замкнуть GERT-сеть дугой, ведущей из узла $V15$ в узел $V1$ Рис. 7.

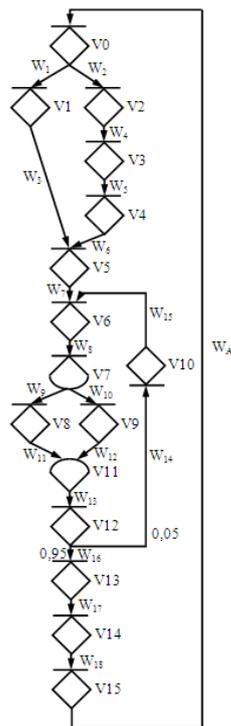


Рис. 7: Замкнутая GERT-сеть.

Заменяя $W_A(s)$ на $1/W_E(s)$, получим для петель сети следующие коэффициенты пропускания.

Петли первого порядка: $W_8(W_9W_{11} + W_{10}W_{12})W_{13}W_{14}W_{15} \cdot (W_1W_3 + W_2W_4W_5W_6)W_7W_8(W_9W_{11} + W_{10}W_{12})W_{13}W_{16}W_{17}W_{18}(1/W_E)$

Петель порядка больше первого в данной GERT-сети нет.

Используя топологическое уравнение Мейсона, получаем

$$H = 1 - W_8(W_9W_{11} + W_{10}W_{12})W_{13}W_{14}W_{15} - (W_1W_3 + W_2W_4W_5W_6) \times W_7W_8(W_9W_{11} + W_{10}W_{12})W_{13}W_{16}W_{17}W_{18}(1/W_E) = 0$$

Преобразовывая данное выражение, получаем

$$W_E(s) = (W_1W_3 + W_2W_4W_5W_6)W_7W_8(W_9W_{11} + W_{10}W_{12}) \times W_{13}W_{16}W_{17}W_{18} / (1 - W_8(W_9W_{11} + W_{10}W_{12})W_{13}W_{14}W_{15})$$

что является эквивалентной W-функцией для GERT-сети, изображенной на Рис. 7.

Подставляя значения вероятностей и производящих функций моментов из Табл. 2, найдем значение $W_E(0)$ и далее найдем первый момент относительно начала координат.

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия стока GERT-сети найдены, их значения равны $\mu = 12.879$, $\sigma^2 = 9.211$.

5 Анализ результатов

Для анализа результатов, проведем расчет тех же самых параметров – математическое ожидание и дисперсия стоимостных затрат бизнес-процесса, но уже с использованием имитационного моделирования, чтобы сравнить полученные результаты и проанализировать трудоемкость методов.

Для этого построим вероятностную имитационную модель бизнес-процесса, изображенного на Рис. 6, в программном продукте AnyLogic. Параметры данной имитационной модели берутся аналогично параметрам GERT-сети. Имитационная модель в AnyLogic для соответствующей GERT-сети представлена на Рис. 8.

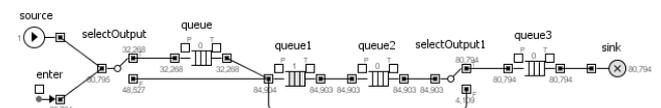


Рис. 8: Имитационная модель в AnyLogic.

Произведем расчет имитационной модели. Полученные параметры равны: $\mu = 12.875$, $\sigma^2 = 9.23$.

Таким образом, были получены значения вероятностных характеристик бизнес-процесса – математическое ожидание и дисперсия стоимостных затрат, на основе расчета GERT-сети и при имитационном эксперименте. Расчет проводился в масштабе, поэтому для применения полученных результатов их необходимо умножить на 1000. Результаты приведены в Табл. 3.

Таблица 3: Сравнение результатов.

Метод расчета	Математическое ожидание	Дисперсия
GERT-сеть	12,879	9,211
Имитационное моделирование	12,875	9,23

Анализируя значения, полученные двумя разными методами – на основе расчета GERT-сетей и на основе имитационной модели, можно сделать вывод, что методы близки по точности, однако результаты имитационного эксперимента носят случайный характер и могут отличаться при следующем запуске эксперимента.

Таким образом, расчет на основе GERT-сетей дает более точные результаты, которые меньше подвержены отклонениям и не изменяются при повторном расчете данным методом. В тоже время, необходимо отметить, что имитационный эксперимент для данной модели бизнес-процесса является трудоемким по сравнению с расчетом GERT-сети – имитационная модель прогонялась порядка 50-100 тысяч раз, для получения точного результата. Отметим, что в примере рассматривалась достаточно простая модель бизнес-процесса с четырьмя функциями распределения. С

ростом числа структурных элементов модели при использовании имитационного эксперимента необходимо будет производить большее число расчетов для получения заданной точности.

Основная сложность расчета GERT-сети заключается в нахождении элементов топологического уравнения Мейсона и вычислении первой и второй производных относительно начальных моментов GERT-сети.

Таким образом, можно сделать вывод, что приведение модели бизнес-процесса к GERT-сети и расчет ее параметров предпочтительнее имитационного эксперимента, вследствие меньшей вычислительной трудоемкости и получении более точного результата.

6 Заключение

Предложен альтернативный подход к расчету вероятностных характеристик – математического ожидания и дисперсии стоимостных затрат, бизнес-процессов на основе GERT-сетей. Данный подход имеет ряд преимуществ по сравнению с имитационным экспериментом – меньшая вычислительная трудоемкость и получение более точного результата, не зависящего от выполнения эксперимента.

Таким образом, подход к расчету вероятностных характеристик бизнес-процессов на основе GERT-сетей должен быть использован везде в качестве замены имитационному эксперименту.

Литература

- [1] Таха Хемди А. Введение в исследование операций. Издательский дом “Вильямс”, М., 2005.
- [2] Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. Методы анализа сетей. Мир, М., 1984.
- [3] A. A. B. Pritsker. GERT: graphical evaluation and review technique. RAND Corporation, 1966.
- [4] K. Neumann. Stochastic project networks: temporal analysis, scheduling and cost minimization. Springer-Verlag, 1990.

Использование воды для заводнения пластов в целях пожаротушения

Т.П. Иванова

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Л.Х. Газеева

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Аннотация. Целью исследований является создание системы эффективного управления подготовки и оценки боеспособности для тушения и ликвидации ЧС индивидуумов и коллективов на предприятиях.

Ключевые слова. Ликвидация пожаров и ЧС.

В настоящее время на большинстве предприятий отсутствуют правовые механизмы привлечения персонала для ликвидации пожаров и ЧС. Предлагается создать систему нормативно правовых актов (стандартов организации утвержденных в установленном порядке) направленных на эффективное управление подготовкой и оценкой боеспособности персонала. На основе международного опыта разработаны основные принципы обеспечения боеспособности персонала, типология, матрица компетенции персонала, схема поддержания боеспособности, инструменты и методы оценки персонала. Ожидаемый экономический эффект составит не менее 150 млн. рублей в год.

Персонал должен быть обучен технике безопасности. Целью данного обучения является ознакомление сотрудников с инструкциями, регламентирующими специфические вопросы безопасности и режимы на опасных производственных объектах, а также предоставление необходимых знаний и навыков по реагированию на чрезвычайные ситуации.

Проанализировав мировой опыт управления персоналом на опасных промышленных объектах, включая нефтяную и газовую промышленность к реагированию на чрезвычайные ситуации, разработана система эффективного управления подготовки и оценки боеспособности персонала в чрезвычайных ситуациях ЗАО «Ванкорнефть» с учетом их физиологического, психологического состояния, социальных и эргономических (бытовых) особенностей.

Аварии и катастрофы на объектах ежегодно уносят десятки жизней и требуют не только экстренных мер по их ликвидации, но, главное, знаний и умений каждого, решительных и осмысленных действий руководящего состава всех уровней в сложившихся чрезвычайных ситуациях.

Рассмотрим определения, которые будут применяться в данной работе. *Компетентность* — может быть определена как обладание необходимыми навыками, опытом, знанием и возможностью применить их в рабочей среде для выполнения задач по предопределен-

ным установленным нормам. *Оценивание* — это суждение, что человек компетентен или не компетентен для исполнения обязанностей реагирования в чрезвычайных ситуациях. *Руководитель объекта* — это сотрудник, который несет ответственность в случае безопасности, принимает меры по предотвращению пожаров и взрывов, по реагированию в чрезвычайных ситуациях и назначает менеджера по опасным промышленным объектам.

Целью исследований является создание системы эффективного управления подготовки и оценки боеспособности для тушения и ликвидации ЧС индивидуумов и коллективов на предприятии. На основании анализа и результатов исследования были сделаны следующие выводы:

1. Разработанный механизм позволяет привлечь персонал для ликвидации пожаров и ЧС;
2. Реализация стратегических задач и краткосрочных планов развития любой организации предполагает выполнение ее персоналом определенных производственных функций. Успешное выполнение этих функций сильно зависит от уровня квалификации и профессиональной компетентности сотрудников компании;
3. Разработанный метод, позволяет изменять и улучшать уровень квалификации и профессиональной компетентности сотрудников - система профессионального обучения персонала;
4. Компетентности персонала в сфере обеспечения пожарной безопасности снижает потребность квалифицированных пожарных. При этом уровень пожарной безопасности остается неизменным, а финансовые затраты на содержание сотрудников значительно сокращаются. Данными действиями мы предлагаем новый способ обеспечения пожарной безопасности объектов.

Благодаря компетентности персонала в сфере обеспечения пожарной безопасности, мы получаем снижение в потребности квалифицированных пожарных. При этом уровень пожарной безопасности остается неизменным, а финансовые затраты на содержание сотрудников значительно сокращаются. Данными действиями мы предлагаем новый способ обеспечения пожарной безопасности объект

Оптимальное размещение клапанов на линейном участке трубопровода полным перебором

Ким Оксана Эрнестовна

Институт математики
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск
kim.oxana.e@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о размещении клапанов, возникающая при строительстве и эксплуатации различных типов трубопроводов. Цель задачи – минимизировать максимально возможный ущерб окружающей среде, возникающий при разгерметизации трубопровода. Приводится алгоритм и программа полного перебора оптимального размещения клапанов на линейном участке трубопровода.

Ключевые слова. Алгоритмы на графах, задача о размещении клапанов, код Грея.

1 Введение

Современным средством транспортировки опасных жидкостей и газов являются сети трубопроводов. Из-за влияния внешних факторов и эрозии труб возникают аварийные ситуации, приводящие к разгерметизации системы и как следствие к попаданию вредных веществ в окружающую среду. Каждая труба обычно оснащена запорной аппаратурой (клапанами) для контроля возможного разлива. Клапаны автоматически разделяют трубопроводную сеть на секции, когда происходит разгерметизация сети. Поэтому количество опасных жидкостей и газов, потенциально покидающих сеть пропорционально общей длине труб в поврежденном секторе сети, разделенной клапанами. В большинстве случаев разгерметизация одновременно происходит только на одном участке, ограниченном с обеих сторон клапанами. Одновременный разрыв нескольких участков трубопровода маловероятен. Возникает следующая задача. Задана сеть трубопроводов и число клапанов для расстановки. Известны также точки соединения участков отдельных труб между собой и веса (длины) этих участков. Считается, что клапаны могут размещаться только в точках соединения труб. Предполагается, что при разгерметизации какого-либо одного участка трубы между клапанами объем утечки опасных жидкостей и газов равен весу соответствующего участка трубы. Требуется найти такое размещение клапанов, которое минимизирует максимально возможный объем разлива нефти.

2 Формулировка задачи о размещении клапанов для линейного участка трубопровода на языке теории графов

Сети трубопроводов обычно имеют довольно сложную структуру, обусловленную географией местности.

Поэтому, возникает интерес рассматривать более простые с точки зрения теории графов участки сети. Наиболее распространенным участком является магистраль – линейный участок сети (в терминах теории графов – цепь). В работе [3] была поставлена задача о размещении клапанов в терминах теории графов для произвольного связного неориентированного графа. Придерживаясь терминов и обозначений работы [3] рассмотрим случай, когда граф является цепью. Пусть $G = (V, E)$ – связный неориентированный граф, изображающий сеть трубопроводов, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множество вершин графа, $n = |V|$ – количество вершин графа, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ – множество ребер графа. Пусть k есть число клапанов, заданных для размещения в трубопроводе, причем $0 \leq k \leq n - 2$. Всякое ребро $e \in E$ задает определенный участок трубы. Вершины степени 1 представляют собой источники и стоки. Вершины степени 2 – точки соединения труб между собой. Предполагается, что каждый из k заданных клапанов может быть установлен в любой вершине степени 2. Полагается, что в вершинах степени 1 (в данном случае их две, одна – источник, другая – сток) клапаны установлены изначально. Обозначим вес участка трубы $e \in E$ через $w_e \in \mathbb{Z}^+$. Требуется найти k -элементный сепаратор $V' \subseteq V$, минимизирующий величину максимального разлива. Напомним, что $V' \subseteq V$ является k -элементным сепаратором связного графа $G = (V, E)$, если $G = (V \setminus V')$ несвязен и $|V'| = k$. Обозначим через

$$V_1, V_2, \dots, V_s$$

области связности графа $G(V \setminus V')$, где $s \geq 1$. Пусть $N_G(V_i)$ определяет окрестность множества вершин V_i и граф G^* построен из $G(V \setminus V')$ добавлением в него всех окрестностей $N_G(V_i)$, $i = 1, \dots, s$. Графы

$$G_i = G(Y_i) = (Y_i, E_i) \quad Y_i = V_i \cup N_G(V_i)$$

($i = 1, \dots, s$) задают компоненты связности в G^* относительно сепаратора V' . Для любых двух таких компонент связности G_i и G_j верно включение

$$Y_i \cap Y_j \subseteq V', \quad 1 \leq i < j \leq s.$$

Тогда функцию, определяющую максимальный разлив, можно выразить следующим образом:

$$W(V') = \max_{1 \leq i \leq s} \sum_{e \in E_i} w_e.$$

Таким образом, задача о размещении клапанов для линейного участка трубопровода состоит в нахождении

k -элементного сепаратора V' , минимизирующего значение величины $W(V')$.

3 Метод полного перебора для решения задачи о размещении клапанов

Наиболее простым методом решения данной задачи является исчерпывающий перебор всех возможных вариантов расстановки клапанов, то есть всех различных k -элементных сепараторов графа $G = (V, E)$. Однако уже при $n \geq 17$ возникает проблема нехватки вычислительной мощности, так как приходится перебирать до C_{n-2}^k комбинаций. Поэтому был разработан алгоритм полного перебора с использованием кода Грея. В ходе исполнения алгоритма генерируются двоичные вектора, где единица соответствует наличию клапана в данной вершине, а ноль – отсутствию. Преимуществом данного алгоритма является последовательность подмножеств множества V , когда каждое следующее подмножество получается из предыдущего добавлением или удалением одного элемента, то есть происходит изменение лишь одного разряда в текущем двоичном векторе. Поэтому, для каждого нового подмножества значение максимального разлива вычисляется на основе предыдущего и тем самым сокращается объем вычислений.

Метод полного перебора, как правило, используется при решении задачи о размещении клапанов для графа произвольной структуры методом динамического программирования на основе дерева декомпозиции [4].

4 Описание алгоритма

Входными данными являются: n – число вершин цепи, k – число клапанов для расстановки, $w[n-1]$ – массив весов ребер, где элемент $w[i]$ при $i = 1, \dots, n-1$ отвечает весу ребра под номером i . Алгоритм сводится к выполнению следующей последовательности шагов.

Шаг 1. В качестве начального взять двоичный вектор $B[n-2] = (0, \dots, 0)$. За оптимальный на данный момент разлив принять сумму весов всех ребер цепи $W_{opt} = \sum_{1 \leq i \leq n-1} w[i]$. Задать начальный вектор разливов, то есть для всех $i = 1, \dots, n-2$ выполнить $R[i] = 0$, а при $i = n-1$ присвоить $R[i] = W_{opt}$.

Шаг 2. Положить $i = 0$, где i – число построенных двоичных векторов.

Шаг 3. Вычислить максимальный элемент массива разливов $W = \max_{1 \leq i \leq n-1} R[i]$ и количество ненулевых элементов двоичного вектора $kol = \sum_{1 \leq i \leq n-2} B[i]$.

Шаг 4. Если $kol \leq k$ и $W = W_{opt}$, то добавить вектор B в список наилучших векторов.

Шаг 5. Если $kol \leq k$ и $W < W_{opt}$, то очистить список наилучших векторов и внести в него вектор B . Принять $W_{opt} = W$.

Шаг 6. Найти p – наибольшую степень двойки, которая делит нацело i .

Шаг 7. Если $p > n-2$, то останов.

Шаг 8. Присвоить $B[p] = 1 - B[p]$.

Шаг 9. Если $B[p] = 1$, то $R[p] = R[p] + w[p]$ и из ближайшего справа ненулевого элемента массива R вычесть значение $w[p]$. Иначе $R[p] = R[p] - w[p]$ и к ближайшему слева ненулевому элементу массива R прибавить значение $w[p]$.

Шаг 10. Вернуться к шагу 3.

Результатом выполнения алгоритма являются: значение минимально максимально возможного разлива W_{opt} , наилучшие векторы B , в которых наличие единицы на i -ой позиции означает наличие клапана в i -ой вершине графа $G = (V, E)$ и ноль – отсутствие.

3 Пример работы алгоритма

Пусть задана цепь, для которой $n = 6$ и множество весов ребер $w = \{1, 3, 2, 4\}$. Пусть $k = 3$. Определим для двоичного вектора $B = \{0, 0, 0\}$ значение оптимального разлива $W_{opt} = 1 + 3 + 2 + 4 = 10$ и вектор разливов $R = \{0, 0, 0, 0, 10\}$. Порожденные алгоритмом последовательность двоичных векторов B и соответствующие им векторы разливов, а так же оптимальный на данном шаге разлив W_{opt} приведены в таблице. Представленные в таблице результаты формируются следующим образом.

При $i = 0$ в список наилучших векторов записываем вектор $B = \{0, 0, 0\}$, $W_{opt} = 10$.

При $i = 1$ имеем $W = 9$, $W < W_{opt}$. Очищаем список наилучших векторов и записываем в него вектор $B = \{1, 0, 0\}$, $W_{opt} = 9$.

При $i = 2$ получаем $W = 6$, $W < W_{opt}$. Очищаем список наилучших векторов и записываем в него вектор $B = \{1, 1, 0\}$, $W_{opt} = 6$.

При $i = 3$ имеем $W = 6$, $W = W_{opt}$. Добавляем в список наилучших векторов вектор $B = \{0, 1, 0\}$, $W_{opt} = 6$.

При $i = 4$ справедливо $W = 4$, $W < W_{opt}$. Очищаем список наилучших векторов и записываем в него вектор $B = \{0, 1, 1\}$, $W_{opt} = 4$.

При $i = 5$ верно $W = 4$, $W = W_{opt}$. Добавляем в список наилучших векторов вектор $B = \{1, 1, 1\}$, $W_{opt} = 4$.

При $i = 6$ получаем $W = 5$, $W > W_{opt}$.

При $i = 7$ верно $W = 6$, $W > W_{opt}$.

В списке наилучших векторов сохранены векторы $B = \{0, 1, 1\}$ и $B = \{1, 1, 1\}$, обеспечивающие оптимальный разлив $W_{opt} = 4$, для количества клапанов не превышающего 3. Им соответствуют сепараторы $V' = \{1, 2, 3\}$ и $V' = \{2, 3\}$.

[4] В.В. Быкова. Вычислительные аспекты древовидной ширины графа // ПДМ.-2011.- №3.-С. 65–79.

Таблица

i – число построенных двоичных векторов	Двоичный вектор B	Вектор разливов R	W_{opt} – оптимальный разлив
0	0 0 0	0 0 0 10	10
1	1 0 0	1 0 0 9	9
2	1 1 0	1 3 0 6	6
3	0 1 0	0 4 0 6	6
4	0 1 1	0 4 2 4	4
5	1 1 1	1 3 2 4	4
6	1 0 1	1 0 5 4	4
7	0 0 1	0 0 6 4	4

4 Заключение

Представленный в работе алгоритм реализован на языке C++ в среде Xcode version 3.2.6, операционная система MacOS SnowLeopard. Ведется разработка алгоритма решения поставленной задачи о размещении клапанов на линейном участке трубопровода методом динамического программирования.

Литература

- [1] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
- [2] В.В. Быкова. Практикум на ЭВМ по дискретной математике (вводный курс): Учеб. пособие; Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 2005.
- [3] О.Э Ким. О размещении клапанов в трубопроводах// Труды XV Международной. ЭМ конференции по эвентологической математике и смежным вопросам. – Красноярск, 2011.– С. 100–101.

Методические подходы преподавания систем быстрого счета и быстрых вычислений в общеобразовательной школе

Анна Алексеевна Кирилук

Институт математики
Сибирский Федеральный Университет
Красноярск
nutik_89@list.ru

Аннотация. *Рассмотрена методика преподавания систем быстрого счета и быстрых вычислений в общеобразовательной школе, а также их актуальность в современном обществе.*

Ключевые слова. *Быстрые вычисления, визуализация информации.*

В последние десятилетия сформировались новые тенденции в подходе к школьному математическому образованию, выявляющие противоречия, формирующиеся и развивающиеся в процессе его изменения. Порожденный бурным развитием науки и техники «информационный бум» повлек за собой необходимость перестройки образования в целом, что породило противоречие между содержанием современного школьного образования и реальными потребностями общества. Профессионально написанные тексты учебников и учебных пособий, ориентированные на вдумчивую работу мысли, сейчас меньше привлекают школьников, чем красочная виртуальная реальность, возникающая на экране телевизора или мониторе ЭВМ, логическая составляющая обучения уступает место визуальному восприятию.

Методы развивающего обучения недостаточно используются в практике преподавания математики, так как требуют для своей реализации гораздо больше учительских усилий и технических средств, чем традиционные способы обучения. В современном обществе высоких технологий и всеобщего использования компьютера умение быстро и правильно производить в уме вычисления не утратило своей актуальности. Поэтому каждый человек должен владеть устным счетом.

Вычислительная культура формируется у учащихся на всех этапах изучения курса математики, но основа ее закладывается в первые 5–6 лет обучения. В этот период школьники обучаются умению осознанно использовать законы математических действий. В последующие годы полученные умения и навыки совершенствуются и закрепляются в процессе изучения алгебры, физики, химии, черчения и других предметов.

Сегодняшние школьники устно считают плохо. Для быстрого счета необходима рациональность. Для этого ученик должен выбрать те из возможных операции, выполнение которых легче других и быстрее приводит к

результату арифметического действия. Приемы рациональных вычислений в учебниках практически отсутствуют. Ученик может применить прием вычисления к большему числу случаев, т.е. он способен перенести прием вычисления на новые случаи. Обобщенность так же, как и рациональность, теснейшим образом связана с осознанностью вычислительного навыка, поскольку общим для различных случаев вычисления будет прием, основа которого – одни и те же теоретические положения. Для этого применяются алгоритмы.

Алгоритм – это последовательности действий (шагов), приводящие к результату. Сейчас, на этапе стремительного развития информатики и вычислительной техники, понятие алгоритма является одним из центральных. Алгоритмизация считается обязательным этапом в процессе разработки программ и решении задач на ЭВМ. Именно для прикладных алгоритмов и программ принципиально важны детерминированность, результативность и массовость, а также правильность результатов решения поставленных задач. Распространенным критерием оценки алгоритмов является время работы и порядок роста продолжительности работы. Вычислять быстро, подчас на ходу – это требование времени. Числа окружают нас повсюду, а выполнение арифметических действий над ними приводит к результату, на основании которого мы принимаем то или иное решение. Понятно, что без вычислений не обойтись в повседневной жизни.

В настоящее время разрабатывается система занятий по быстрому счету для среднего звена общеобразовательной школы. В данный момент уже разработаны занятия для пятого класса, которые рассчитаны на четыре академических часа. Эти занятия охватывают следующие темы: повторение традиционного умножения столбиком, быстрое умножение на 6, 7, 9, 11, 12, признаки делимости. За основу взят материал работы [1]. Каждое правило умножения рассматривается в виде алгоритма, что помогает более быстрому запоминанию. В конце каждого занятия проводится сравнение традиционного и быстрого умножения.

Материал представлен в виде презентаций. Использование мультимедиа позволяет облегчить процесс проведения занятий. Материал может быть изложен не только в устной форме, но и одновременно продемонстрирован. Поэтому помимо визуального

способа представления информации активно задействованы и аудиальный, а также аудиовизуальный способ представления информации, это делает процесс восприятия предоставляемого материала наиболее целостным.

Принцип наглядности в обучении занимает особое положение [2]. Теоретическое обоснование принципа наглядности впервые предложил Ян Коменский, полагавший, что наглядность является одним из важнейших инструментов процесса обучения. Выступая за разгрузку учащихся, великий дидакт боролся не с количеством наук, а с методами их освоения. И.Г. Песталоцци, много занимавшийся вопросами использования наглядности, рассматривал ее как средство развития у детей наблюдательности, умения сравнивать предметы, выявлять их общие и отличительные признаки и соотношения между ними.

Песталоцци первым указал на роль использования наглядности для формирования логического мышления. Большое значение соблюдению принципа наглядности придавал русский педагог К.Д. Ушинский, писавший о наглядности, как об “инструменте”, отвечающем психологическим особенностям детей. Наглядность, по его мнению, делает обучение более доступным, конкретным и интересным, что является фактором, препятствующим образованию перегрузок и возникновению усталости.

Визуальное представление данных должно быть простым и очевидным. Важно осознать, что наглядность есть всего лишь средство, вспомогательный элемент. В силу этого к основным параметрам визуальной среды обучения относятся: лаконичность представления информации; точность воспроизведения ее структуры и элементов; акцент на главные, существенные детали образов. Визуальные образы не должны быть чем-то застывшим, фотографически фиксирующим изучаемые объекты. Внедрение визуальных образов в учебный процесс предполагает не только последовательное восстановление их, но, при необходимости, расчленение, сборку отдельных деталей в единое целое – новое образование.

Простое перенесение учебных текстов в презентации и оболочки обучающих программ было бы непросительной роскошью, имеется еще ряд причин, по которым это становится невозможно. Одна из них – это сама визуальная информация, возникающая на экране монитора и накладывающая особые требования к ее представлениям. С одной стороны, вербальная информация на мониторе воспринимается трудно по многим причинам, поэтому простое копирование его может оттолкнуть ученика и учителя от использования компьютера в процессе обучения. С другой, инструментальные возможности программ типа «Microsoft Word» или «Corel Draw!» позволяют оформить визуально как грамматические, так и смысловые “оттенки” словесной конструкции.

В настоящее время разработанное учебно-методическое обеспечение занятий по быстрому счету проходит апробацию в средней образовательной школе № 141 г. Красноярска.

Литература

- [1] Система быстрого счета по Трахтенбергу / Э. Катлер, Р. Мак-Шейн - М: Просвещение , 1967. – 134 с.
- [2] Резник Н. А. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления. Дисс. канд. пед. наук. Москва, 1997. – 350 с.

Треугольные нормы и конормы

Кочанова Юлия Сергеевна

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярск
kochanova_y@mail.ru

Аннотация. Рассматривается общий класс умножений, известный как треугольные нормы (кратко t -нормы). Они представляют интерес для нечеткой логики потому, что сохраняют основные свойства связки “и” (которые выполняются одновременно), а именно: коммутативность, монотонность, ассоциативность и ограниченность, и, таким образом, они служат естественным обобщением классической конъюнкции для многозначных систем рассуждений. С понятием t -нормы связано понятие треугольной конормы (t -конормы) $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Оно связано с поведением истинностных значений, соединенных связкой “или”. Понятие t -норм и t -конорм пришли в теорию нечетких множеств из теорий функциональных уравнений и вероятностных метрических пространств. Аксиомы этих операций дают возможность построения бесконечного числа логических связей.

Ключевые слова. t -норма, t -конорма, порядковые суммы, ассоциативные функции, копулы, генераторы.

1 Введение

Бинарные операции $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, были предложены К. Менгером в [1] и приведены к современному виду Б. Швейцером и А. Скларом в [2]. Множество t -норм может быть разделено на несколько различных частично пересекающихся групп в соответствии с их специфическими свойствами. Особо мы рассматриваются три класса t -норм: непрерывные, архимедовы и неархимедовы. Понятие порядковой суммы дает возможность построить новые t -нормы [3]. В отличие от остальных оно позволяет доказать, что особое значение имеют непрерывные t -нормы, три основных t -нормы, а именно: произведение, конъюнкция Лукасевича и минимум.

2 Определения

Определение 25. T -норма это функция двух переменных $T : I^2 \rightarrow I$ (то есть, бинарная операция на I), удовлетворяющая следующим условиям:

a) на границе I^2

$$T(x, 0) = T(0, x) = 0, \quad (1)$$

$$T(x, 1) = T(1, x) = x \quad (2)$$

b) T не убывает в любой точке, то есть,

$$T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2), \text{ когда } x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \quad (3)$$

c) T коммутативна, т.е. для всех x, y на I ,

$$T(x, y) = T(y, x) \quad (4)$$

d) T ассоциативна, т.е. для всех x, y, z на I

$$T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z)) \quad (5)$$

Геометрически график t -нормы это поверхность на единице площади, ограниченной четырехугольником, вершинами которого являются $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$, который поднимается по горизонтали и вертикали и является симметричным по отношению к плоскости $x = y$.

Определение 26. S -норма это двухместная функция $S : I^2 \rightarrow I$ которая удовлетворяет условиям монотонности, коммутативности, ассоциативности и граничным условиям: $S(x, 0) = S(0, x) = x$, $S(1, x) = S(x, 1) = 1$.

Определение 27. Диагональю t -нормы T является функция $\delta_T : I \rightarrow I$ которая определяется следующим образом:

$$\delta_T(x) = T(x, x)$$

Определение 28. Пусть J является любым интервалом расширенной числовой прямой R , тогда функция $A : J \times J \rightarrow J$ ассоциативная, непрерывная и ограниченная тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде:

$$A(x, y) = a^{-1}(a(x) + a(y))$$

где $A : J \rightarrow R$ непрерывна и строго монотонна. Кроме того, J должно быть открытым или полуоткрытым.

Определение 29. Двумерная копула – это двухместная функция $C : I^2 \rightarrow I$ которая удовлетворяет граничным условиям $C(x, 0) = C(0, x) = 0$, $C(1, x) = C(x, 1) = x$ и условию монотонности $C(x_1, y_1) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_2, y_2)$ всякий раз, когда $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$.

Определение 30. t -норма T является непрерывной и архимедовой тогда и только тогда, когда существует строго убывающая и непрерывная функция $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $f(1) = 0$ такая, что $T(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$ где f^{-1} – есть псевдообратная функция для f , определяемая как

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}, & \text{если } x \leq f(0), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Здесь f называется аддитивным генератором t -нормы T , о которой, в свою очередь, говорят, что она генерируется с помощью f .

Определение 31. Мультипликативным генератором t -нормы T называется строго возрастающая функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такая, что φ непрерывна справа в 0, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(x) \cdot \varphi(y) \in \text{Ran}(\varphi) \cup [0, \varphi(0)]$ где $\text{Ran}(\varphi)$ – область значений φ и выполняется

$$T(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot \varphi(y)).$$

Определение 32. Пусть $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ семейство t -норм и $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$ – семейство попарно непересекающихся открытых подинтервалов из $[0, 1]$. Тогда функция: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, определенная следующим образом:

$$T(x, y) = \begin{cases} a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right), & \text{если } (x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2, \\ \min(x, y), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является t -нормой. Ее называют порядковой суммой слагаемых $\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha \rangle$, $\alpha \in A$ и обозначают $T \approx (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha \rangle)_{\alpha \in A}$.

Примеры:

- (1) Пустая порядковая сумма t -норм= T_M :

$$T_M \approx (\emptyset) = (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha \rangle)_{\alpha \in \emptyset}$$

- (2) Любую t -норму T можно представить, как порядковую сумму с одним слагаемым $\langle 0, 1, T \rangle$:

$$T \approx (\langle 0, 1, T \rangle).$$

- (3) Порядковая сумма T двух слагаемых $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, T_P \rangle$ и $\langle \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, T_L \rangle$, т.е.,

$$T \approx \left(\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, T_P \rangle, \langle \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, T_L \rangle \right),$$

$$T(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + (4x - 1)(4y - 1)), & \text{если } (x, y) \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]^2, \\ \frac{2}{3} + \max(0, x + y - \frac{17}{12}), & \text{если } (x, y) \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]^2, \\ \min(x, y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

- (4) Порядковые суммы t -норм могут иметь бесконечно много слагаемых. Например,

$$T \approx \left(\langle \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, T_P \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

означает, что

$$T(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}(1 + (2^n x - 1)(2^n y - 1)), & \text{если } (x, y) \in [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]^2, \\ \min(x, y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Все результаты для порядковых сумм t -норм остаются справедливыми для t -конорм с очевидными изменениями, если необходимо. В частности, относительно двойственности порядковых сумм получим следующее:

Определение 33. Пусть $T \approx (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha \rangle)_{\alpha \in A}$ порядковая сумма t -норм, тогда двойственная t -конорма S может быть записана, как порядковая сумма t -конорм:

$$S \approx (\langle 1 - b_\alpha, 1 - a_\alpha, S_\alpha \rangle)_{\alpha \in A},$$

где t -конорма S_α является двойственной к t -норме T_α .

Аппарат порядковых сумм позволяет конструировать новые t -нормы и t -конормы для каждого отдельного случая, исходя из условий конкретной задачи, и тем самым делая решение задачи более эффективным.

3 Примеры T -норм и их генераторов

Рассмотрим примеры некоторых T -норм и генераторов, многие из которых играют заметную роль в приложениях:

- 1 T -норма $(\max[x^{-\alpha} + y^{-\alpha} - 1, 0])^{-\frac{1}{\alpha}}$ (рис. 21) и соответствующий ей генератор $2 \frac{x^{-\alpha}-1}{\alpha}$, где $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $\alpha \neq 0$
- 2 T -норма $\max(1 - [(1-x)^\alpha + (1-y)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}, 0]$ 3 и соответствующий ей генератор (рис. 4) $(1-x)^\alpha$, где $\alpha \in (0, \infty)$.
- 3 T -норма $\frac{xy}{1-\alpha(1-x)(1-y)}$ (рис. 5) и соответствующий ей генератор $6 \log \frac{1-\alpha+\alpha x}{x}$, где $\alpha \in (-\infty, 1)$.

4 Виды T -норм

- 1 Непрерывные - t -норма T называется непрерывной, если ее функция на своей области определения является непрерывной.

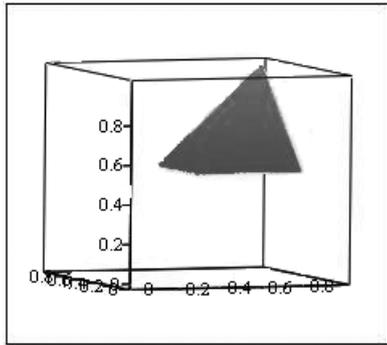


Рис. 1: T -норма 1

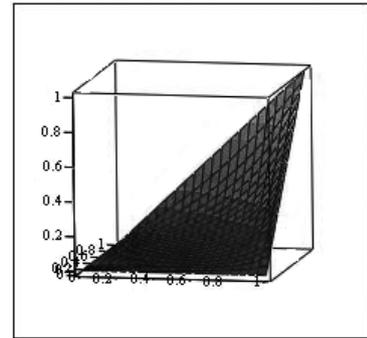


Рис. 5: T -норма 3

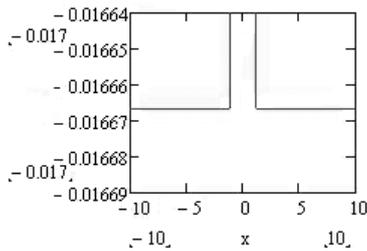


Рис. 2: Генератор для T -нормы 1

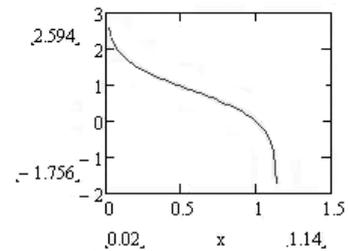


Рис. 6: Генератор для T -нормы 3

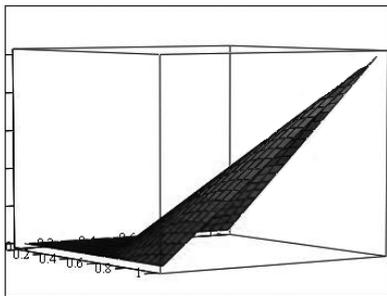


Рис. 3: T -норма 2

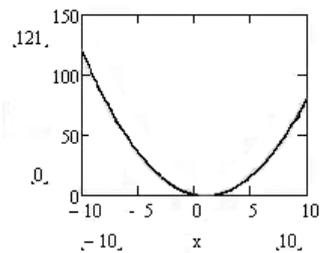


Рис. 4: Генератор для T -нормы 2

2 Говорят, что t -норма T является строго монотонной, если она строго возрастает на $(0, 1]^2$ как функция из $[0, 1]^2$ в $[0, 1]$ или, если выполняется следующее условие

$$T(x, y) < T(y, z)$$

когда $x \in (0, 1), y < z$.

3 t -норма T является архимедовой, если $\forall x \in (0, 1)$ выполняется следующее условие: $T(x, x) < x$.

Рисунок 7 иллюстрирует отношения между четырьмя подмножества, соответствующие следующим условия: непрерывность, монотонность, свойство Архимеда, и отсутствие внутренних идемпотентов.

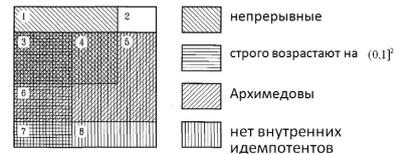


Рис. 7: Отношения подмножеств норм

5 Многомерные T -нормы

Функция $T_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ называется t -нормой на интервале $[0, 1]$, а функция $S_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ t -конормой, если для $a_1, a_2, \dots, a_n, d_1, d_2, \dots, d_n$ указанные функции обладают следующими свойствами:

коммутативность

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = T_n(a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^n),$$

$$S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = S_n(a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^n),$$

где $a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^n$ — это перестановки a_1, a_2, \dots, a_n

ассоциативность

$$\begin{aligned} T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \\ &= T_{i+1}(a_1, a_2, \dots, a_i, T_{n-i}(a_{i+1}, \dots, a_k, \dots, a_n)) = \\ &= T_{n-j+1}(T_j(a_1, a_2, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n), \\ S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \\ &= S_{i+1}(a_1, a_2, \dots, a_i, S_{n-i}(a_{i+1}, \dots, a_k, \dots, a_n)) = \\ &= S_{n-j+1}(S_j(a_1, a_2, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

монотонность

$$\begin{aligned} T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &\leq T_n(d_1, d_2, \dots, d_n), \\ S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &\leq S_n(d_1, d_2, \dots, d_n) \end{aligned}$$

для всех $a_i \leq d_i$.

граничные условия

$$\begin{aligned} T_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) &= \\ &= T_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n), \\ S_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) &= \\ &= S_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n), \\ S_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) &= 1, \\ T_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) &= 0. \end{aligned}$$

Двойственность T и S

$$\begin{aligned} T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &= 1 - S_n(1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n) \\ S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &= 1 - T_n(1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n) \end{aligned}$$

при условии, что операция отрицания задается как $c(a) = 1 - a$.

6 Эвентологический взгляд на нечеткие операции

В теории Заде нечеткое множество определяется функцией принадлежности, вид которой не может быть выведен теоретически из более простых понятий, а задается в каждой задаче, исходя из внешних по отношению к теории соображений. В теории Заде языковые связи не могут быть математически интерпретированы только одним типом операции во всех ситуациях. Например, связка "и" представлена t -нормами, являющимися специальными бинарными операциями на интервале $[0, 1]$. Выбор конкретного вида формулы для связки зависит от взаимного отношения между нечеткими множествами, ведущего таким образом к использованию различных t -норм. Таким образом, существует две основные проблемы: это выбор функции принадлежности нечетких множеств и выбор типа операций над ними. Посмотрим на эти проблемы с эвентологической точки зрения.

С момента появления теории нечеткости в 60-70-х годах прошлого века в литературе не прекращается обсуждение ее взаимоотношений с теорией вероятностей. Дело в том, что функция принадлежности

нечеткого множества напоминает распределение вероятностей. Отличие состоит в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины (или интеграл, если множество возможных значений несчётно) всегда равна 1, а сумма значений функции принадлежности (в непрерывном случае – интеграл от функции принадлежности) может быть любым неотрицательным числом. Возникает искушение пронормировать функцию принадлежности, т.е. разделить все ее значения на сумму, чтобы свести ее к распределению вероятностей (или к плотности вероятности). Однако специалисты по нечеткости справедливо возражают против такого “грубого” сведения, поскольку оно проводится отдельно для каждого нечеткого множества, и определения обычных операций над нечеткими множествами согласовать с ним нельзя.

Математический аппарат нечетких множеств не позволяет в должной мере учитывать различные варианты зависимости между понятиями (объектами), моделируемыми с его помощью, т.е. не является достаточно гибким. Так, для описания “общей части” двух нечетких множеств используется треугольная норма. Чаще всего используют две треугольные нормы – вероятностное произведение и пересечение по Заде. Если применяется первая из них, то фактически предполагается, что множества ведут себя как проекции независимых случайных множеств. Операция пересечения по Заде также накладывает вполне определенные ограничения на вид зависимости между множествами, причем в этом случае найдены даже необходимые и достаточные условия.

Бинарные операции $\beta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которые удовлетворяют четырем аксиомам (монотонности, ассоциативности, коммутативности и граничного условия) и называются *треугольными t и s -нормами*, используются в теории нечетких множеств в качестве обобщения классических операций над нечеткими множествами.

С точки зрения эвентологии, для теории нечетких событий оказывается вполне достаточным более узкий класс бинарных операций над нечеткими событиями, которые определяются как треугольные t и s -нормы, удовлетворяющие еще одной дополнительной аксиоме: *неравенствам Фреше*, и для которых поэтому используются специальные названия.

Границей пересечения называется бинарная операция $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая аксиомам:

- $b \leq c \rightarrow T(a, b) \leq T(a, c)T(b, a) \leq T(c, a)$ – монотонность;
- $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$ – ассоциативность;
- $T(a, b) = T(b, a)$ коммутативность;

- $T(a, 1) = T(1, a) = a$ – граничное условие;
- $\max\{0, a + b - 1\} \leq T(a, b) \leq \min\{a, b\}$ – неравенства Фреше;

Границей объединения называется бинарная операция $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая аксиомам:

- $b \leq c \rightarrow S(a, b) \leq S(a, c)S(b, a) \leq S(c, a)$ – монотонность;
- $S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c))$ – ассоциативность;
- $S(a, b) = S(b, a)$ – коммутативность;
- $S(a, 0) = S(0, a) = a$ – граничное условие;
- $\max\{a, b\} \leq S(a, b) \leq \min\{1, a + b\}$ – неравенства Фреше;

Границы пересечения T и границы объединения S называются дополнительными бинарными операциями, если $T(a, b) + S(1 - a, 1 - b) = 1$ для $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Пользуясь наибольшей популярностью в теории Заде трем парам дополнительных бинарных операций над нечеткими множествами соответствуют следующие эвентологические модификации: три пары дополнительных границ пересечений и границ объединений нечетких событий, соответственно получивших новые эвентологические названия и обозначения.

Все вместе они называются *операциями Фреше*:

1. Правая граница пересечения и левая граница объединения по Фреше (пересечение и объединение по Заде):

$$T_M(a, b) = \min\{a, b\}, \quad S_M(a, b) = \max\{a, b\}$$

2. Левая граница пересечения и правая граница объединения по Фреше (пересечение и объединение по Лукасевичу):

$$T_L(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}, \quad S_L(a, b) = \min\{1, a + b\}$$

3. Вероятностно-независимое пересечение и объединение:

$$T_p(a, b) = ab, \quad S_p(a, b) = a + b - ab$$

Дополнительные бинарные операции пересечения и объединения по Фреше обобщают все три наиболее известные пары дополнительных бинарных операций

$$T_F^\varphi(a, b) = \begin{cases} (1 - \varphi)T_p(a, b) + \varphi T_M(a, b), & \varphi \in [0, 1] \\ (1 + \varphi)T_p(a, b) - \varphi T_L(a, b), & \varphi \in [-1, 0] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T_L(a, b), & \varphi = -1, \\ T_p(a, b), & \varphi = 0, \\ T_M(a, b), & \varphi = 1. \end{cases}$$

$$S_F^\varphi(a, b) =$$

$$= \begin{cases} (1 - \varphi)S_p(a, b) + \varphi S_M(a, b), & \varphi \in [0, 1] \\ (1 + \varphi)S_p(a, b) - \varphi S_L(a, b), & \varphi \in [-1, 0] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} S_M(a, b), & \varphi = -1, \\ S_p(a, b), & \varphi = 0, \\ S_L(a, b), & \varphi = 1. \end{cases}$$

Пусть $X \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ -произвольное подмножество множества избранных событий \mathfrak{X} , выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Арной Фреше-корреляцией подмножества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ называется величина:

$$\text{Kor}_X = \begin{cases} \frac{\text{Kov}_X}{F_X^+}, & \text{Kov}_X \geq 0, \\ \frac{\text{Kov}_X}{F_X^-}, & \text{Kov}_X \leq 0, \end{cases}$$

где

$$F_X^+ = \min_{x \in X} \mathbf{P}(x) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x)$$

– правая граница Фреше,

$$-F_X^- = -\min \left\{ \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x), \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x) + \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) - 1 \right\}$$

– левая граница Фреше для арной ковариации

$$\text{Kov}_X = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in X} x \right) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x).$$

Поскольку для произвольного $X \subseteq \mathfrak{X}$

$$-F_X^- \leq \text{Kov}_X \leq F_X^+,$$

то значения арной Фреше-корреляции произвольного подмножества событий всегда лежат в интервале $[-1, 1]$:

$$-1 \leq \text{Kor}_X \leq 1$$

Лемма 1 (о смысле параметра в операциях Фреше). Параметр φ в операциях Фреше $T_F^\varphi(a, b)$ и $S_F^\varphi(a, b)$ имеет смысл корреляции Фреше событий x и y , вероятности которых равны a и b соответственно: $\varphi = \text{Kor}_{xy}$

Следует отметить, что корреляция равная -1 соответствует непересекающейся структуре зависимостей, 0 – независимый случай, и соответственно 1 – вложенным событиям.

Список литературы

- [1] В. Новак, И. Перфильева, И. Мочкорж . *Математические принципы нечеткой логики / Пер. с англ.; Под ред. Аверкина А.Н.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006.
- [2] Д. В. Семенова и А.И. Ищенко. *Эвентологический взгляд на нечеткую импликацию.* НИИППБ, Красноярск, 2011.
- [3] И.З. Батыршин. *Основные операции нечеткой логики и их обобщения.* Отечество, Казань, 2001.
- [4] И.А. Ходашинский. Технология идентификации нечетких моделей типа сингтон и Мамдани. *Труды VII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08,* Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН:137–163, 2008.
- [5] Т.М.Леденева, А.В.Грибовский. О нечетких импликациях, полученных обобщением булевой функции. *Вестник ВГУ, Серия физика, математика,* 2:189–196, 2003.
- [6] А.Кофман. *Введение в теорию нечетких множеств / Пер. с франц.* Радио и связь, Москва, 1982.
- [7] Г.Э.Яхьяева. *Нечеткие множества и нейронные сети: учебное пособие.* Интернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, Москва, 2006.
- [8] О.Ю.Воробьев. *Эвентология.* Сиб. фед. ун-т., Красноярск, 2007.
- [9] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular Norms.* Springer, 2000.

Интегральные показатели в синтезе оценок рисков потерь жизненного потенциала

**Крупкина Татьяна
Валерьевна**

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
tatiana.krupkina@gmail.com

**Бабенышев Сергей
Валерьевич**

Сибирский институт пожарной безопасности
Университет ГПС МЧС
Санкт-Петербург
sergei.babyonyshev@gmail.com

**Мажаров Владимир
Федорович**

ФГБУ НИИ комплексных проблем
гигиены и профзаболеваний СО РАМН
Новокузнецк
majarov@inbox.ru

Аннотация. Рассматриваются два нижних уровня многоуровневой иерархической модели, описывающей влияние социально-экономических условий на потери жизненного потенциала в Красноярском крае. На нижнем уровне критериями являются значения социально-экономических показателей муниципальных образований Красноярского края, разбитые на 6 групп, приблизительно соответствующих следующим факторам — доходы населения, социально-экономическое развитие региона, потребление, финансовое состояние, инфраструктура, качество жизни. На втором уровне в качестве критериев используются интегральные индексы риска факторов, рассчитанные по показателям, входящим в каждый из этих факторов. Исследуются условия выбора, применимости и возможность адаптации различных интегральных показателей к рассматриваемым факторам.

Ключевые слова. PYLL, социально-экономические показатели, матрица парных сравнений.

1 Введение

Для исследования влияния социально-экономических условий на уровень потерь жизненного потенциала рассматривались 44 социально-экономических показателя муниципальных образований Красноярского края, взятые из официальной статистики. Эти 44 показателя разбиты на 6 групп, характеризующих соответственно 6 факторов — доходы населения, социально-экономическое развитие региона, потребление населения, финансовое состояние, инфраструктуру, качество жизни. В разработанной нами иерархической модели влияния социально-экономических условий на уровень потерь жизненного потенциала в Красноярском крае [1] с социально-экономическим состоянием связаны два уровня. На нижнем уровне критериями являются значения показателей, на следующем уровне критериями должны служить интегральные показатели данных 6 социально-экономических факторов. Таким образом, критерии второго уровня — это 6 видов рисков для общественного здоровья. При идентификации параметров модели возникает проблема, являющаяся достаточно общей: измерение

факторов по известным значениям показателей. В рамках анализа влияния среды на общественное здоровье задачу можно сформулировать как выбор интегральных показателей избранного аспекта среды при установленных показателях избранного аспекта общественного здоровья. В данной работе в качестве индикатора общественного здоровья рассматривается показатель потерь жизненного потенциала (PYLL — potential years of life lost), рассчитываемый по следующей формуле:

$$PYLL = \frac{\sum_i a_i N_i}{N} \cdot 1000,$$

где N_i — число смертных случаев в i -й возрастной группе, a_i — число недожитых лет для i -го возраста смерти, N — численность всего населения. В качестве причин потерь жизненного потенциала рассматривались те, которые, с одной стороны, влекут за собой максимальные потери, а с другой — предположительно имеют социально-экономическую обусловленность, то есть в значительной степени являются устранимыми за счет улучшения социально-экономических условий. У мужчин Красноярского края такими причинами (ранжированными по числу потерянных человеко-лет жизни) являются нижеследующие.

1. Острая ИБС
2. Заболевания, вызванные злоупотреблением алкоголем и отравлениями алкоголем и наркотиками
3. Преднамеренное самоповреждение (самоубийства)
4. Транспортные несчастные случаи
5. Цереброваскулярные болезни

У женщин Красноярского края упорядоченные причины несколько отличаются.

1. Заболевания, вызванные злоупотреблением алкоголем и отравлениями алкоголем и наркотиками
2. Острая ИБС
3. Цереброваскулярные болезни

- 4. Транспортные несчастные случаи
- 5. Злокачественные новообразования органов пищеварения

Всего рассматривалось 10 показателей РYLL ($P_1 - P_{10}$), в зависимости от того, по какой причине происходили потери потенциала.

Первым из испробованных интегральных показателей был индекс Е, предложенный Л.Е. Поляковым и Д.М. Малинским [3] (в интерпретации И.С. Случанко [4]) и использованный В.Б. Колядо и Ф.Г. Захаровым [2] как “индекс здоровья”. Ю.Д. Федотов [5] успешно применил данный индекс при социально-экологической оценке качества жизни региона (на примере Республики Мордовия).

2 Энтропийный индекс

Методика вычисления индекса Е предполагает переход от значения показателя x_i к его “индивидуальной оценке” — числу r_i согласно “нормативной таблице”, построенной для каждого показателя по среднему значению a и среднеквадратическому отклонению s . Все значения показателя разбиваются на интервалы, и если сравниваемые значения показателя принадлежат одному интервалу ряда распределения, то различия между ними считаются несущественными: всем значениям, попавшим в I -й интервал, приписывается одно и то же число $r_i = r_I$. Установлено [5], что оптимальная длина интервала равна половине среднеквадратического отклонения s . В методике вычисления индекса здоровья предлагались для использования числа r_i : 0,01, 0,04, 0,09, 0,20, 0,32, 0,41, 0,46, 0,54, 0,59, 0,68, 0,80, 0,91, 0,96, 0,99 (см. табл. 1, а).

Мы называем индекс Е “энтропийным”, поскольку числа r_i имеют явное выражение, связанное с энтропией:

$$r_i = \begin{cases} -p_i \log p_i, & i \leq 7; \\ 1 + p_i \log p_i, & i > 7. \end{cases} \quad (1)$$

Для оценки показателя, превышающего среднее значение, были принимаются не сами величины $-p_i \log p_i$, а их дополнения до 1, т.е. $1 + p_i \log p_i$.

Более точные значения чисел r_i , вычисленные по формуле (1), равны: 0,0129, 0,0373, 0,0979, 0,1985, 0,3164, 0,4104, 0,4566, 0,5434, 0,5896, 0,6836, 0,8015, 0,9021, 0,9627, 0,9871. Обозначим число показателей k , число районов n , значение показателя X_i в m -м районе — X_{im} . По каждому показателю X_i считается среднее значение a_i и среднее квадратичное отклонение s_i ($i = 1, \dots, k$).

$$a_i = \bar{X}_i = \frac{\sum_{m=1}^n X_{im}}{n},$$

$$s_i = \bar{X}_i = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^n (X_{im} - \bar{X}_i)^2}{n}}.$$

Затем i -му показателю в m -ом районе X_{im} по таблице (1,а) присваивается оценка r_{im} . Энтропийный индекс Е m -ого района рассчитывается по формуле:

$$E_m = 100 - \frac{100 \cdot \sum_{i=1}^k r_{im}}{0,99k}, \quad (2)$$

где 0,99 в знаменателе соответствует максимальному возможному значению r_i .

Оценки (табл. 1, б) подобраны эмпирически с целью сглаживания (см. рис. 1, б).

№	Интервалы	r_{im}	
		а)	б)
1	$(-\infty; a - 3s]$	0,01	0,01
2	$(a - 3s; a - 2,5s]$	0,04	0,02
3	$(a - 2,5s; a - 2s]$	0,09	0,04
4	$(a - 2s; a - 1,5s]$	0,20	0,08
5	$(a - 1,5s; a - s]$	0,32	0,16
6	$(a - s; a - 0,5s]$	0,41	0,28
7	$(a - 0,5s; a]$	0,44	0,46
8	$(a; a + 0,5s]$	0,54	0,56
9	$(a + 0,5s; a + s]$	0,59	0,68
10	$(a + s; a + 1,5s]$	0,68	0,84
11	$(a + 1,5s; a + 2s]$	0,80	0,92
12	$(a + 2s; a + 2,5s]$	0,91	0,96
13	$(a + 2,5s; a + 3s]$	0,96	0,98
14	$(a + 3s; +\infty)$	0,99	0,99

Таблица 1: Оценочная шкала а) для энтропийного индекса; б) для сглаженного энтропийного индекса.

Описанный энтропийный индекс Е, получивший распространение как индекс здоровья, может применяться и к совокупностям другой природы. В наших предыдущих работах он был использован и для социально-экономических данных. Однако этот индекс имеет ряд ограничений:

- Показатели должны подчиняться закону нормального распределения (хотя бы приближенно), а это не всегда выполняется.
- Оценочная шкала составлена в соответствии с принципом: чем больше показатель превышает среднее значение, тем хуже. Но в реальности возможны и другие случаи. Так, ранее нами было показано [1], что для социально-экономического развития критерием должно быть абсолютное отклонение от среднего (по модулю).
- Кривая оценок не гладкая (рис. 1, а).

По этой причине нами были исследованы еще некоторые индексы, рассчитываемые по описанным ниже методикам на основе относительных (на 1000 человек населения) показателей. Общий принцип расчета предложенных индексов сводится к следующему:

по каждому показателю, входящему в группу показателей фактора, районы сортируются, и каждому району приписывается определенное число. Разные индексы различаются методикой определения этих чисел. Итоговое значение вычисляется аналогично формуле (2):

$$E_m = 100 - \frac{100 \cdot \sum_{i=1}^k r_{im}}{\max\{r_{im}\}k}. \quad (3)$$

1. *Энтропийный сглаженный индекс (ES).*

В индексе ES (также как и в E) число r_i определяется тем, в какие сигмальные интервалы попадает значение показателя района (предполагается приближенно нормальное распределение). Однако оценки (табл. 1, б) для ES были специально подобраны эмпирически с целью сглаживания кривой (см. рис. 1, б).

2. *Квантильный индекс (Q).*

Для квантильного индекса полагаем $r_i = F(\bar{u}_i)$, где $F(x)$ — функция стандартизованного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, $\bar{u}_i = \frac{i-7,5}{2}$.

3. *Интервальный ранговый индекс (IR).*

В этом случае r_i равно нормированному рангу (номеру) интервала: $r_i = r_I, x_i \in I$.

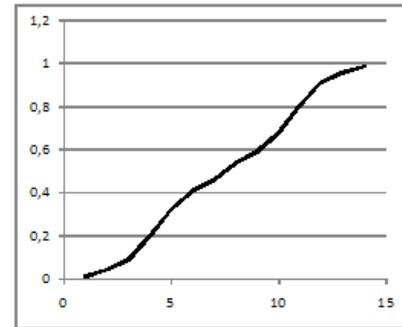
4. *Ранговый индекс (PR).*

Здесь r_i равен нормированному рангу значения x_i (номеру в отсортированном списке значений).

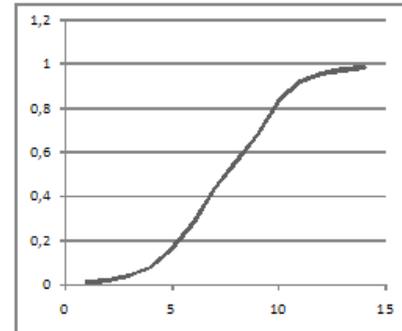
В индексе Q используется функция нормального распределения. В индексах IR и PR используются ранги (PR — чистый ранг, IR — ранг интервала). Соответственно для нормально распределенных совокупностей можно применять энтропийный, энтропийный сглаженный и квантильный индексы, а в остальных случаях ранговые индексы. Вышеописанные индексы близки (рисунок 2, таблица 2), но имеют различия. Эти различия накапливаются и могут довольно заметно проявляться при дальнейшем использовании.

	E	Q	ES	IR	PR
E	1				
Q	0,959	1			
ES	0,976	0,997	1		
IR	0,998	0,970	0,984	1	
PR	0,867	0,936	0,928	0,885	1

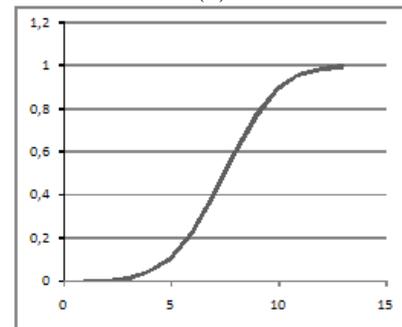
Таблица 2: Коэффициенты корреляции между различными индексами (фактор “Потребление”).



(а)



(б)



(в)

Рис. 1: Кривые оценок энтропийного (а), энтропийного сглаженного (б) и квантильного (в) индексов.

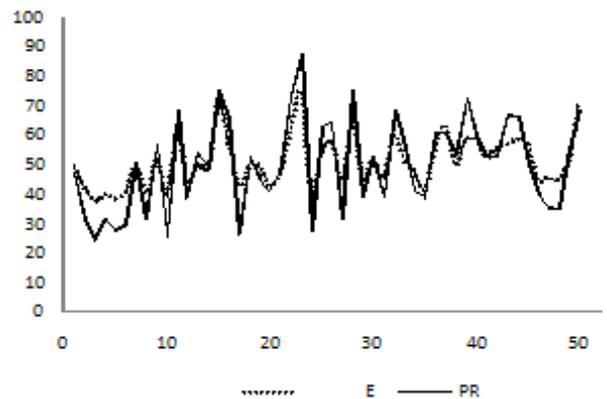


Рис. 2: Значения индексов E и PR для фактора “Инфраструктура” по 49 районам Красноярского края

3 Использование экспертных оценок

Рассмотренные выше индексы могут служить интегральными показателями 6 факторов социально-экономического состояния. Но критериями 2-го уровня модели являются не сами эти факторы, а связанные с ними 6 видов рисков потери жизненного потенциала. При этом требуется учитывать специфическое влияние каждого из показателей, в то время как в исходном “индексе здоровья” и во всех его модификациях, рассмотренных нами, показатели входят равноправно. Попытка использовать факторный анализ для вычисления коэффициентов влияния наталкивается на несколько препятствий. Первое из них связано с проблемой достоверности исходных данных. Эта достоверность зависит от погрешностей статистического учета для всего комплекса показателей.

На нижнем уровне контролируемых и управляющих единиц (муниципальных районов) значительная часть показателей, интересных для вычисления индексов, берется из малых выборок и потому обладает малой статистической достоверностью. Простое аккумулярование данных по годам не решает проблемы из-за наличия второго препятствия: крайней волатильности демографической и социально-экономической ситуаций, начиная с конца 90-х годов прошлого века. Комплексы факторов, определяющих жизненный потенциал и здоровье населения, радикально менялись несколько раз. Происходят также постоянные и трудно отслеживаемые изменения в социальных привычках и образе жизни населения. Все это вместе приводит к неустойчивости факторной моделей. В этих условиях нами было принято решение об нахождении коэффициентов (весов) влияния на основе экспертных оценок.

Эксперт (один из авторов этой статьи) попарно сравнивал показатели X_i и X_j ($i, j = 1, \dots, k$) по степени влияния на риск потерь жизненного потенциала, отдельно для каждой причины потерь $P_1 - P_{10}$. Использовалась 9-балльная шкала Саати (таблица 3).

w_i/w_j	Качественная оценка
1	примерно равное влияние X_i и X_j
3	слабое преимущество X_i над X_j
5	существенное преимущество X_i над X_j
7	явное преимущество X_i над X_j
9	абсолютное преимущество X_i над X_j
2, 4, 6, 8	промежуточные сравнительные оценки

Таблица 3: Шкала Саати.

Результаты каждого набора парных сравнений эксперта сводились в матрицу парных сравнений, представляющую собой квадратную обратно симметричную матрицу W :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_k \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_k/w_1 & w_k/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Для матрицы W рассчитывалось ее максимальное собственное число и отвечающий ему собственный вектор, задающий систему приоритетов сравниваемых факторов. Каждая матрица парных суждений проверялась на согласованность. Обработка матрицы по методике метода анализа иерархий позволила получить оценки согласованности и итоговый вектор приоритетов рисков (ν_1, \dots, ν_k) ($\sum_{i=1}^n \nu_i = 1$).

С учетом вектора приоритетов индекс I_m m -ого района рассчитывается по формуле:

$$I_m = 100 - \frac{100 \cdot \sum_{i=1}^k \nu_i \cdot r_{im}}{\max\{r_{im}\}}. \quad (4)$$

Индексы (4) будем называть индексами риска факторов EW, QW, ESW, IRW, PRW в отличие от индексов факторов E, Q, ES, IR, PR (3). На рис. 3 можно увидеть, как введение весов изменяет индекс.

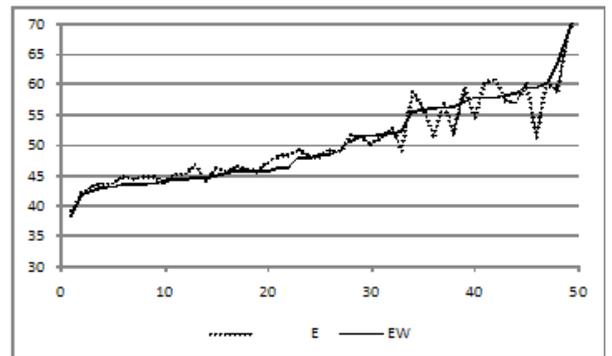


Рис. 3: Значения индекса E и индекса риска EW для фактора “Инфраструктура” (упорядоченные по EW)

Коэффициент корреляции между случайными величинами $\xi = \sum_{i=1}^n r_{im}$ и $\eta = \sum_{i=1}^n \nu_i r_{im}$, найденный в предположении, что случайные величины $\{r_{im}\}$ некоррелированы, одинаково распределены и имеют одинаковые дисперсии, равен

$$\rho_{\xi, \eta} = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n \nu_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n \nu_i^2}}. \quad (5)$$

Коэффициент корреляции, определяемый формулой (5), может принимать значения от $\frac{1}{\sqrt{n}}$ до 1. Наименьшее значение он принимает в случае, когда набор показателей редуцирован экспертами до 1 показателя, наибольшее – когда вектор приоритетов имеет равные координаты. Выборочные коэффициенты корреляции достаточно хорошо согласуются с теоретическим значением для всех индексов, например для фактора “Инфраструктура” коэффициент корреляции, рассчитанный по формуле (5), равен 0,86, а

выборочные коэффициенты принимают значения от 0,81 до 0,92, для фактора “Доходы” теоретический коэффициент корреляции равен 0,95, а выборочные – от 0,81 до 0,99 и т.д.

4 Имплементация

Для написания программы index вычисления всех описанных выше индексов использовался язык программирования Python 3.2.1. Изменение критериев оценочной шкалы и введение весов производилось изменением параметров программы. Так же осуществлялось инвертирование показателей в случае, когда они разнонаправлены. Таблицы парных сравнений обрабатывались в Microsoft Excel 2007. Расчеты по иерархической модели велись в пакете Statistica 7.0. Для создания диаграмм использовался Microsoft Word 2007.

5 Предварительные результаты

Индексы энтропийный E и квантильный Q, использующие функцию нормального распределения, могут быть обобщены и на случай модели с произвольным (известным) распределением. Однако наиболее часто используются нормальная и равномерная модели. В первом случае рекомендуется применять индексы E, ES, Q, а во втором случае — индексы IR и PR. Большинство социально-экономических показателей из числа 44 рассматриваемых нами были приближенно нормально распределены, но и гипотеза о равномерном распределении для многих показателей не отвергалась. У части показателей, входящих в одну группу, могло быть скорее нормальное распределение, а у части — скорее равномерное. Поэтому в работе нами были посчитаны все индексы, а потом выбирался лучший для каждого социально-экономического фактора. Критерием эффективности использования индекса для некоторого вида PYLL являлся коэффициент корреляции между этим видом PYLL и интегральным риском, рассчитанным по иерархической модели с помощью рассматриваемого индекса. Оказалось, что эффективность индексов зависит не только от распределения социально-экономических показателей, но и от того, для какого вида PYLL применяется индекс. Так, у мужчин для PYLL по причине заболеваний, вызванных злоупотреблением алкоголем и отравлениями алкоголем и наркотиками, оказался эффективным набор ранговых индексов PR, для PYLL по причине транспортных несчастных случаев — IR, а для PYLL по причине цереброваскулярных болезней ES или Q. Найденные совокупности эффективных индексов были использованы в иерархической модели влияния социально-экономических условий на уровень потерь жизненного потенциала в Красноярском крае.

6 Заключение

Предварительные результаты показали, что в предложенной ранее иерархической модели [1] для построения критериев второго уровня целесообразно: а) использовать индексы риска факторов, в которых вектора приоритетов могут быть рассчитаны методом Саати; б) использовать различные индексы, выбирая в каждом случае оптимальный.

Пока что оптимальные индексы найдены на уровне факторов, то есть все показатели, входящие в фактор, измерялись одним и тем же индексом. Представляется уместным произвести выбор индексов на уровне показателей. Для этого нужно на основе распределения каждого показателя выделить предположительно подходящие индексы и провести расчеты по модели для каждого вида PYLL с целью выбора оптимальных (по приведенному выше критерию) индексов. Поскольку в этом случае индексы риска факторов будут являться комбинациями величин, имеющих различное распределение, предстоит также оценить их устойчивость.

Список литературы

- [1] Т.В. Крупкина, В.Ф. Мажаров, Б.Э. Горный, and А.М. Свиридов. Иерархическая модель зависимости потерь жизненного потенциала от социально-экономических факторов. pages 188–192. Красноярск, 2011.
- [2] В.Б. Колядо and Ф.Г. Захаров. Комплексная оценка здоровья и здравоохранения по Российской Федерации (на примере холецистита). *Методические и социальные проблемы медицины и биологии*, pages 13–19, 1971.
- [3] Л.Е. Поляков and Д.М. Малинский. Метод комплексной оценки состояния здоровья населения (опыт построения модели и решения задачи на электронной машине). *Советское здравоохранение*, (3):7–15, 1971.
- [4] И.С. Случанко. *Комплексные методы оценки состояния здоровья населения*. ЦОЛИУВ, Москва, 1979.
- [5] Ю.Д. Федотов. *Социально-экологическая оценка качества жизни региона (на примере Республики Мордовия)*. Мордовский госуниверситет, Саранск, 2000. Автореф. канд. дисс. канд. социол. наук / Федотов Юрий Дмитриевич.

Эвентология пожарной безопасности: краткий обзор

Гулиза Кушбак кызы

Сибирский федеральный университет
Институт математики
Красноярск
guliz92@mail.ru

Аннотация. Краткий обзор эвентологических моделей пожарной безопасности, которая определяется относительно субъекта, события, вероятности и ценности. Дано определение безопасности субъекта. Рассмотрена случайно-множественная модель распространения, а также эвентологическая модель распространения лесного пожара. Определены элементарные лесопожарные события.

Ключевые слова. Эвентология, безопасность, риск, угроза, лесопожарная безопасность, лесопожарный риск, эвентологическая модель распространения пожара.

1 Введение

Характеризовать понятие опасности и вложить в него смысл может только субъект (множество субъектов). Опасность не существует сама по себе, она существует только во взаимосвязи с субъектом, это субъектная опасность. Так же и безопасность — всегда субъектная безопасность. Опасность и безопасность — две субъектные категории.

Известно, что субъект не может существовать без событий, события — это смысл существования субъекта. Событие — это бытие субъекта, иными словами это субъектное бытие. В эвентологии каждое событие имеет свою вероятность, которая не имеет смысла до тех пор, пока не будет определено конкретное событие, вероятность которого нас интересует. Иными словами события не бывают без вероятности, как и вероятности не бывают без событий.

Ценность события является второй неотъемлемой характеристикой события в эвентологии. Так же, как и в понятии вероятности, эвентологическое понятие ценности не имеет смысла, пока не указано конкретное событие, ценность которого нас интересует. События не существуют без ценности, как и ценность не существует в независимости от события.

Говоря о понятии опасности, необходимо добавить, что опасность подразделяется на риски и угрозы. Вред субъекту может быть причинен в результате действий:

- самого субъекта;
- других субъектов или объектов живой и неживой природы.

Существуют возможности причинения вреда субъекту в результате действий самого субъекта. Они были отмечены давно и часто им дают название — риск. Риск — это свойство бытия субъекта, порождаемое неопределенностью результатов деятельности самого субъекта. Вместе с тем существуют возможности причинения вреда субъекту в результате действий других субъектов, а также внешних или внутренних явлений Природы, которые удобно называть угрозой, чтобы отличать от риска. Угроза — это свойство бытия субъекта, порождаемое неопределенностью результатов деятельности других субъектов, а также внешних и внутренних явлений Природы. Таким образом, присутствие или отсутствие всяких рисков и всяких угроз определяет и представляет в той или иной степени опасность или безопасность для субъекта, иначе говоря, ту или иную степень субъектной опасности или субъектной безопасности.

2 Событие в Эвентологии

Под *событием* в эвентологии понимается *подмножество пространства всеобщих элементарных исходов* Ω , которое вместе с алгеброй событий \mathcal{F} и вероятностной мерой P образует фундаментальную для классической теории вероятностей конструкцию — *всеобщее вероятностное пространство* (Ω, \mathcal{F}, P) . В соответствие с этой классической моделью событие $x \subseteq \Omega$ наступает только при наступлении такого всеобщего элементарного исхода $\omega \in \Omega$, который принадлежит x , т.е. только при выполнении отношения принадлежности: $\omega \in x$.

2.1 Эвентологическое распределение

Обычно интерес представляет не одно, а некоторое конечное множество событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий и разбивающее пространство всеобщих элементарных исходов Ω на 2^N террасных событий

$$\text{ter}(\mathfrak{X}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} x \bigcap_{x \in \mathfrak{X}^c} x^c, \quad (1)$$

где $x \subseteq \Omega$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, а $X^c = \mathfrak{X} - X$, $x^c = \Omega - x$ - дополнения до соответствующих множеств. Таким образом

имеет место террасное разбиение

$$\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \text{ter}(X). \quad (2)$$

Вероятности террасных событий

$$\{p(X) = \mathbf{P}(\text{ter}(X))\}, \quad (3)$$

образуют набор

$$\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\} \quad (4)$$

который называется вероятностным распределением множества событий \mathfrak{X} .

Как ранее сказано, в эвентологии считается, что каждое событие представляет для субъекта определенную ценность. Поэтому каждое множество событий \mathfrak{X} имеет, кроме вероятностного, еще и ценностное распределение

$$\{v(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}, \quad (5)$$

где $v(X)$ — ценность террасного события $\text{ter}(X)$. *Вероятностное распределение и ценностное распределение множества событий \mathfrak{X} образуют эвентологическое распределение \mathfrak{X} .*

2.2 Пример

Рассмотрим квартиру, состоящую из трех комнат. Определим три события: x — пожар начнется в первой комнате, y , z — соответствующие события для второй и третьей комнаты. Даны $\mathbf{P}(x)$, $\mathbf{P}(y)$, и $\mathbf{P}(z)$ — соответствующие вероятности возникновения пожара в комнатах. Необходимо найти вероятность того, что в квартире произойдет пожар.

Будем считать, что события x , y и z независимы в совокупности. Найдем вероятность того, что в квартире произойдет пожар. Математически это является задачей определения вероятности события, полученного как объединение событий x , y и z :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(x \cup y \cup z) = \mathbf{P}(x^c \cap y^c \cap z^c).$$

Так как события x , y , z независимы в совокупности, то дополнения к ним тоже будут независимы в совокупности. Поэтому верно:

$$\mathbf{P}(x^c \cap y^c \cap z^c) = \mathbf{P}(x^c) \cdot \mathbf{P}(y^c) \cdot \mathbf{P}(z^c),$$

$$\mathbf{P}(x^c) = 1 - \mathbf{P}(x),$$

$$\mathbf{P}(y^c) = 1 - \mathbf{P}(y),$$

$$\mathbf{P}(z^c) = 1 - \mathbf{P}(z),$$

$$\mathbf{P}(x^c \cap y^c \cap z^c) = (1 - \mathbf{P}(x)) \cdot (1 - \mathbf{P}(y)) \cdot (1 - \mathbf{P}(z)).$$

3 Случайно — множественная модель распространения

Случайно — множественная модель распространения представляет собой последовательность

$$\{K_n, n = 1, 2, \dots\} \quad (6)$$

случайных конечных множеств

$$K_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{(2^{\mathfrak{X}})}), \quad (7)$$

связанных рекуррентным соотношением

$$K_{n+1} = \bigcup_{x \in K_n} S(x). \quad (8)$$

Эта последовательность определяется вероятностным распределением

$$\{p_0(X) = \mathbf{P}(K_0 = X), X \subseteq \mathfrak{X}\} \quad (9)$$

начального случайного множества K_0 и набором вероятностных распределений одношагового распространения

$$\{p_1(X|x) = \mathbf{P}(S(x) = X), X \subseteq \mathfrak{X}\} \quad (10)$$

независимых в совокупности случайных множеств

$$S(x) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{(2^{\mathfrak{X}})}) \quad (11)$$

одношагового распространения из $x \in 2^{\mathfrak{X}}$. Обычно предполагается, что каждое $S(x)$ имеет так называемое *независимо - точечное распределение*, т.е. вероятности одношагового распространения из элемента $x \in \mathfrak{X}$ только в подмножестве $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ определяется по формулам:

$$p_1(X|x) = \prod_{y \in X} s(y|x) \prod_{y \in X^c} (1 - s(y|x)), \quad (12)$$

где $X^c = \mathfrak{X} - X$, а

$$s(y|x) = \mathbf{P}(y \in S(x)) \quad (13)$$

— *вероятность одношагового распространения* из x в y . Полагается, что $s(x|x) = 1$.

В рамках случайно — множественной модели распространения определяется вероятностное распределение

$$\{p_n(X|K_0) = \mathbf{P}(K_n = X|K_0), X \subseteq \mathfrak{X}\} \quad (14)$$

случайного множества K_n , которое распространения достигает из начального случайного множества K_0 за n шагов ($n = 1, 2, \dots$). В частности, для каждого $y \in \mathfrak{X}$ определяются вероятности n — шагового распространения в y из начального случайного множества K_0 , образующие набор:

$$\{\pi_n(y|K_0) = \mathbf{P}(y \in K_n|K_0), y \in \mathfrak{X}\}. \quad (15)$$

Входные параметры *случайно — множественной модели распространения* включают:

- начальное вероятностное распределение p_0 (9) случайного множества K_0 , которое предметно интерпретируется как распределение очага пожара K_0 на нулевом шаге, и в частном случае может быть “вырожденным” в виде одного “очагового” элемента: $K_0 = x_0$, где $x \in \mathfrak{X}$, или целого “очагового” подмножества элементов: $K_0 = X_0$, $X \subseteq \mathfrak{X}$;
- вероятности одношагового распространения $s(y|x)$ (13), предметно интерпретируемые как вероятности одношагового распространения пожара из “точечного” очага $x \in \mathfrak{X}$ в элемент $y \in \mathfrak{X}$.

Выходом случайно — множественной модели распространения служат:

- вероятности n — шагового распространения $\pi_n(y|K_0)$ (15) из K_0 в $y \in \mathfrak{X}$, которые предметно интерпретируются как вероятности захвата элемента y за n шагов пожаром, распространяющимся из K_0 .

4 Эвентологическая модель распространения пожара

Определение 34. (элементарное [лесо] пожарное событие) Для конечного множества \mathfrak{X} элементов [лесной]территории и произвольного $n = 1, 2, \dots$, т.е. элементарным [лесо]пожарным событием $x_n \in X_n = x_n, x \in X$ называется такое колмогоровское событие $x \subseteq \Omega$ которое наступает на n — шаге тогда и только тогда, когда [лесной] пожар полностью захватывает на этом шаге элемент [лесной] территории $x \in X$.

Множество событий

Множество элементарных пожарных событий $X_n \subset \mathcal{F}$ имеет на n -ом шаге вероятностное распределение

$$\{p_n(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}, \quad (16)$$

где

$$p_n(X) = \mathbf{P}(\text{ter}_n(X)) \quad (17)$$

— вероятность террасного события

$$\text{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c \subset \Omega, \quad (18)$$

которое наступает, когда пожаром на n — шаге полностью захвачены только элементы $x \in \mathfrak{X}$, и где $X^c = \mathfrak{X} - X$, $x_n^c = \Omega - x_n$ — дополнения до соответствующих множеств.

Случайное множество событий

Случайное множество элементарных пожарных событий $K_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{(2^{\mathfrak{X}})})$ имеет на n -ом шаге вероятностное распределение

$$\{p_n(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}, \quad (19)$$

где

$$p_n(X) = \mathbf{P}(\{K_n = X_n\}) \quad (20)$$

— вероятность события

$$\{K_n = X_n\} = \{\omega : K_n(\omega) = X_n = \{x_n, x \in X\}\} \subset \Omega, \quad (21)$$

которое совпадает с террасным событием (18):

$$\{K_n = X_n\} = \text{ter}_n(X).$$

4.1 1-я Эвентологическая модель распространения

Начальное вероятностное распределение p_0 в рамках 1-й Э-модели определяется по схеме (16), (17), (18) как распределение на нулевом шаге множества элементарных лесопожарных событий

$$\mathfrak{X}_0 = \{x_0, x \in \mathfrak{X}\} \subset \mathcal{F},$$

состоящее из вероятностей террасных событий на нулевом шаге для $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$p_0(X) = \mathbf{P}(\text{ter}_0(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x_0 \bigcap_{x \in X^c} x_0^c\right),$$

Вероятности одношагового распространения $s(y|x)$ в рамках 1-й Э-модели определяются как условные вероятности

$$s(y|x) = \mathbf{P}(y_{n+1}|x_n) = \frac{\mathbf{P}(y_{n+1} \cap x_n)}{\mathbf{P}(x_n)},$$

по предположению не меняющиеся при изменении шага $n = 1, 2, \dots$, где $x_n \in \mathfrak{X}_n, y_{n+1} \in \mathfrak{X}_{n+1}$ — элементарные лесопожарные события.

4.2 2-я Эвентологическая модель распространения

Начальное вероятностное распределение p_0 в рамках 2-й Э-модели определяется по схеме (19), (20), (21) как распределение на нулевом шаге случайного множества элементарных лесопожарных событий

$$K_0 : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}_0}, 2^{(2^{\mathfrak{X}_0})}),$$

состоящее из вероятностей его значений — подмножеств $X_0 \subseteq \mathfrak{X}_0$ для $X \subseteq \mathfrak{X}$: $p_0(X) = \mathbf{P}(K_0 = X_0)$.

Вероятности одношагового распространения $s(y|x)$ в рамках 2-й Э-модели определяются как условные вероятности

$$\begin{aligned} s(y|x) &= \mathbf{P}(y_{n+1} \in K_{n+1} | x_n \in K_n) = \\ &= \frac{\mathbf{P}(\{y_{n+1} \in K_{n+1}\} \cap \{x_n \in K_n\})}{\mathbf{P}(\{x_n \in K_n\})} \end{aligned}$$

по предположению не меняющиеся при изменении шага $n = 1, 2, \dots$, где $x_n \in \mathfrak{X}_n, y_{n+1} \in \mathfrak{X}_{n+1}$ — элементарные лесопожарные события.

Список литературы

- [1] О. Ю. Воробьев. Эвентология. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435р.
- [2] О. Ю. Воробьев. Эвентология безопасности. Труды X Международной ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности, Красноярск: НИИППБ, СФУ (под ред. Олега Воробьева):92–101, 2011.

Алюмосиликатные полые микросферы

Анастасия Генадьевна Лабик

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Евгений Игоревич Фишер

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Аннотация. В работе рассматриваются алюмосиликатные полые микросферы.

Ключевые слова. Алюмосиликатные полые микросферы.

Алюмосиликатные полые микросферы (АСПМ) - стеклокристаллические алюмосиликатные шарики, которые образуются при высокотемпературном факельном сжигании угля. Являются самыми ценными компонентами зольных отходов тепловых электростанций.

Содержание АСПМ в золе обычно очень небольшое, десятые доли процента, однако на крупных теплоэлектростанциях их "выработка" может достигать нескольких тысяч тонн в год.

Микросферы являются превосходным наполнителем при производстве изделий из пластмасс, гипса, керамики, облегченных цементов, и др. строительных материалов. Изделия с добавлением микросферы обладают повышенной износостойкостью, легкостью и высокими изоляционными свойствами. Кроме всего, использование микросферы в качестве наполнителей, значительно снижает себестоимость продукции.

Применение. Полимерные материалы с микросферами (так называемые сферопластики) используются при изготовлении различных плавсредств, например лодок, сигнальных буёв, блоков плавучести, спасательных жилетов и других. Используется при изготовлении мебели, в радиотехнике, для изоляции теплотрасс, для изготовления дорожно-разметочных термопластиков и так далее. АСПМ применяют в составе цементных растворов при изготовлении "лёгких" бетонов и теплоизоляционных жаростойких бетонов. Также используются АСПМ при бурении геологоразведочных и эксплуатационных скважин. Других возможностей применения у микросфер очень много.

Типичные физико-химические свойства микросфер:

Форма частиц — сферическая.

Размер — 25-500 микрон.

pH — 6,0-7,0.

Насыпная плотность — 0,30-0,45 г/см³.

Истинная плотность — 0.6-0.7 г/см³.

Температура плавления — 1400-1500 °С.

Твердость по Моссу — 6.

Цвет — кремовый, светло-серый, белый.

Сферическая форма микросфер МС улучшает текучесть материалов, обеспечивает лучшее распределение по форме и эффективное заполнение объема частицами, уменьшает усадку. Естественные свойства микросфер позволяют легко применять их для наполнения и сухих смесей, и смесей во влажной или жидкой форме. Благодаря инертным свойствам микросфер на них не влияют вода, растворители, кислоты и щелочи. Микросферы прочны и в среднем на 75 % легче других минеральных наполнителей, совместимы с любыми материалами, устойчивы к кислотам, растворителям и щелочам. Низкие звуко- и теплопроводность микросфер МС позволяет использовать и как отличный изоляционный материал для зданий и сооружений, трубопроводов.

Микросфера алюмосиликатная используется при изготовлении:

- тампонажных материалов для нефтяных скважин, буровых растворов, дробильных материалов, взрывчатых веществ в нефтяной промышленности;
- сверхлегких бетонов, известковых растворов, жидких растворов, цементов, штукатурки, покрытия, кровельных и звукозащитных материалов в строительстве;
- керамики (огнеупорные материалы, огнеупорные кирпичи, покрытия, изоляционные материалы);
- пластинов (нейлоновые, полиэтиленовые, полипропиленовые и другие материалы различных плотностей);
- композитов, шин, комплектующих, звукозащитных материалов и грунтовок в автомобилестроении.

Микросферы являются превосходным наполнителем при производстве изделий из пластмасс, гипса, керамики, облегченных цементов, и др. строительных материалов. Изделия с добавлением микросферы обладают повышенной износостойкостью, легкостью и

высокими изоляционными свойствами. Кроме всего, использование микросферы в качестве наполнителей, значительно снижает себестоимость продукции.

В настоящее время этот материал, обладающий рядом уникальных свойств, пользуется все большим спросом. Его отличают низкая плотность, высокая механическая прочность, химическая инертность, термостойкость, низкая теплопроводность.

Новые математические инструменты эвереттики

Юрий Александрович Лебедев

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана
Москва
Ruthenium1@yandex.ru

Аннотация. *Краткий обзор новых математических инструментов эвереттики, выявившихся за период 2011 – 2012 гг.*

Ключевые слова. *Эвереттика, иррациональность, квазикристаллы, квантовая механика, теория групп, теория графов, холичность, дискретное пространство-время, топосы, миры Беллмана.*

Общий обзор взаимоотношений эвереттики и математики был представлен в монографии «Многоликое мироздание. Эвереттическая прагматика» [1, с. 484 - 540]. Настоящая работа является кратким обзором новых результатов по этой теме.

В работе [2] был предложен новый математический конструкт – плотность эвереттических ветвлений ρ_{ev} . По физическому смыслу это отношение числа возможных исходов физического взаимодействия к объёму пространства, занимаемому датчиком, фиксирующим результат этого взаимодействия. В результате анализа было показано, что в рамках «разумной физики» наибольшее значение ρ_{ev} должно достигаться в случае, когда датчик занимает планковский объём пространства. Для этого случая получено следующее выражение:

$$\rho_{ev \max} = \frac{N_{ev} c^{9/2}}{\hbar^{3/2} G^{3/2}} \quad (1)$$

где N_{ev} - число возможных при данном взаимодействии ветвлений альтерверса, \tilde{h} – скорость света, \hbar - постоянная Дирака (редуцированная постоянная Планка $\hbar = h/2\pi$), G - гравитационная постоянная.

Подстановка значений физических постоянных в ур. (1) приводит к следующему выражению:

$$\rho_{ev \max} \approx 2,3 \cdot 10^{104} N_{ev}$$

Это – эвереттически большое число, что само по себе достаточно тривиально. Однако, замечательной особенностью выражения (1) является наличие в нем иррационального делителя – постоянной Дирака. Иррациональность этого делителя приводит к тому, что приближительность полученного соотношения становится в нашей ветви альтерверса принципиально непреодолимой. При любом взаимодействии в нашем конечном пространственно-временном мире постоянная Дирака примет определенное конкретное значение, которое будет иным при следующей попытке повторить

условия протекания рассматриваемого взаимодействия. И, поскольку N_{ev} всегда натуральное число, в каждой новой попытке значение $\rho_{ev \max}$ будет отличаться от его значения в предыдущей попытке и, следовательно, в каждом конкретном ветвлении альтерверса может быть получен новый результат.

Вот почему авторы работы приходят к выводу: «ни один физический процесс принципиально не является воспроизводимым и каждое ветвление альтерверса приводит к уникальным результатам» [2, с. 187].

Содержательные проявления математической иррациональности обнаруживаются в разнообразных физических явлениях, связанных с рядом Фибоначчи.

Особо нужно выделить такую бурно развивающуюся область, как исследование квазикристаллов. Само существование такой формы упорядоченности структуры твердых тел является основанием для предположения об эвереттической природе механизма их образования. Как известно, квазикристаллы представляют собой твёрдые тела, характеризующиеся симметрией, запрещенной в классической кристаллографии и, тем не менее, с наличием дальнего порядка [3].

С эвереттической точки зрения квазикристаллы можно считать склейками ветвей альтерверса, в которых существуют аperiodические структуры с иррациональными значениями параметров трансляции. Каждая из составляющих квазикристалл подструктур не может существовать в нашей ветви альтерверса в силу её геометрической несовместимости со свойствами нашего пространства, но в результате склейки таких ветвей образуется «интерференционная структура», способная к самостоятельному существованию.

Естественность и космическая распространенность процессов, приводящих к образованию квазикристаллов, стала очевидной после открытия минерала октаэдрита во фрагментах древнего метеорита [4]. Результаты этого открытия подтверждены анализом обнаруженных группой под руководством П.Стейнхардта и В.Крячко на реке Хатырке на Чукотке в 2011 г фрагментов метеорита возрастом 4,6 млрд. лет.

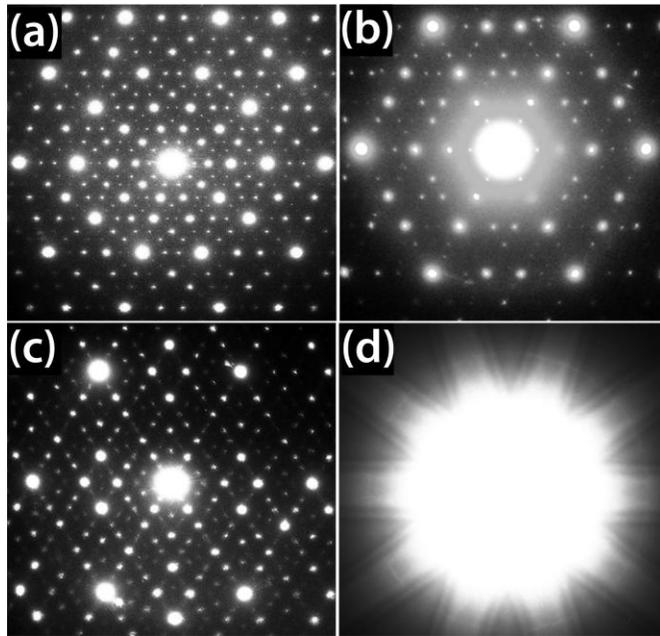


Рис. 1. Дифракция электронов на кристалле октаэдрита. На рис а) – запрещённая симметрия 5 порядка. [4].

Другим важным для эвереттики выводом из работы [2] является утверждение о том, что «ещё одной фундаментальной причиной невозпроизводимости результатов сложных процессов могут являться особенности механизма декогеренции суперпозиции состояний сложных систем при учёте возможности эвереттических склеек» [2, с. 189].

Эти особенности декогеренции отражают физически очевидное, но до сих пор не формализованное свойство сложных систем, называемое холичностью. Линейное уравнение Шредингера не отражает наличие у сложных систем характеристик, отсутствующих у отдельных элементов этих систем. Например, такие физические свойства как температура и энтропия, возникают только при наличии статистически значимого количества элементов системы. И линейная суперпозиция волновых функций отдельных элементов системы не способна описать возникновение этих свойств.

Авторы работы [2] предлагают модифицировать уравнение Шредингера введением в него дополнительного члена, ответственного за возникновение холических свойств.

Формально это осуществлено следующим образом. Выражение для волновой функции альтерверса Ψ_{Alt} (суперпозиции волновых функций объекта Ψ_{ob} и наблюдателя Ψ_{obs}) предлагается записать в виде [2, с. 190]:

$$\Psi_{Alt} = \sum_{j=1}^{j=z} (a_j \Psi_{obj} + b_j \Psi_{obsj}) + X_{\Psi} \quad (2)$$

где a_j и b_j - нормировочные множители, а X_{Ψ} - «холический член», ответственный за наличие в системе холического свойства. Слагаемое X_{Ψ} является, вообще говоря, сложной нелинейной функцией Ψ_{ob} и Ψ_{obs} .

Выполненная таким образом попытка ввести нелинейность в классическое уравнение Шредингера может рассматриваться только как «нулевое приближение», поскольку отсутствуют конструктивные соображения по построению зависимости X_{Ψ} от Ψ_{ob} и Ψ_{obs} . Однако уже эта формулировка свидетельствует о двух важных вещах.

Во-первых, ясно, что нелинейность может быть введена в квантовую механику *вместе* с понятием соотнесённого состояния (ему соответствует сумма в круглых скобках ур. (2)), что снимает высказанные ранее А.К.Гуцем опасения о «привязанности» гипотезы Х.Эверетта к линейной форме уравнения Шредингера [5].

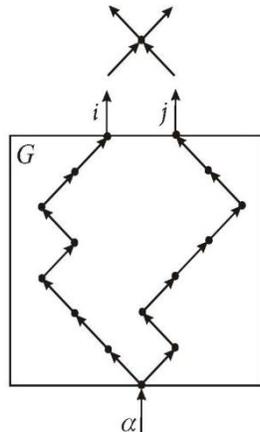
Во-вторых, очевидно, что формализация холичности вызовет трудности применения теории групп в квантовой механике, поскольку при этом возникают не только некоммутативные процедуры, но даже и не ассоциативные. А рассмотрение одновременно и некоммутативных и неассоциативных систем «совершенно запутало бы терминологию» [6, с.38].

Это замечание акад. П.С. Александрова, тем не менее, не запрещает такого рассмотрения, а только предупреждает о его технической сложности.

Новые математические аспекты эвереттики обнаруживаются и в работах, авторы которых формально не соотносят их результаты с эвереттической тематикой. Однако, по своей сути результаты этих работ могут быть весьма плодотворными именно в эвереттике. Среди них отметим две, относящиеся к теории графов и математической логике. Обе работы были представлены в форме докладов на Российском междисциплинарном семинаре по темпорологии в марте 2012 г.

Первая посвящена рассмотрению А.Л. Круглым динамики последовательного роста ориентированного ациклического бинарного графа [7]. Рассматриваемая модель описывает процессы физически более глубокого уровня, чем геометрия непрерывного пространства-времени. Эвереттический интерес к этой работе состоит в том, что она пытается описать возникновение и существование дискретных объектов квантового мира

(элементарных частиц) как ветвящийся процесс в дискретном пространстве-времени, содержащий как ветвления, так и склейки:



Существенным достижением данной работы является построение алгоритма роста графа. Это позволяет надеяться, что процессы ветвления реальностей, постулированные в эвереттике, могут быть исследованы количественно. И первые результаты моделирования на основании этого алгоритма уже выявили характерные особенности динамики, отмеченные в эвереттике – развитие событий формирует в пространстве-времени не мировую линию, а пучок близких мировых линий, называемый в эвереттике «пучком событий».

Конечно, для более детального анализа потребуются изменения и дополнения разработанного А.Л. Круглым алгоритма, учитывающие возможную не бинарность результата взаимодействия объектов в вершинах графа и более глубокую содержательную интерпретацию физического смысла его рёбер. Однако важно то, что работа [7] является плодотворным основанием для дальнейшего развития математических алгоритмов количественных расчётов эвереттических явлений.

Второй принципиально важной для эвереттики работой, связанной с анализом ветвящихся процессов, является работа Л.В. Ильичёва о теоретико-топосном подходе к моделированию пространства-времени [8]. Целью этой работы в авторской формулировке, является построение топосного представления теории ветвящегося пространства-времени Н. Белнапа.

Миры Белнапа математически являются ветвящимися «вниз» графами, направление рёбер которых, однако, снизу вверх. Содержательно эти структуры могут интерпретироваться эвереттически как структуры памяти мультивидаума. Одним из «камней преткновения» для понимания смысла этой работы является понятие события. Автор сознательно не определяет его вербально. Вероятно, потому, что, как справедливо заметил О.Ю. Воробьёв, «все понимают, что такое событие, но каждый вкладывает в это понятие свой собственный смысл» [9, с. 24]. Если всё-таки приписать

событиям определённый смысл образования эвереттовского соотнесенного состояния, то мир Белнапа становится полным миром прошлого мультивидаума. В работе [8] построен новый категориальный объект, включающий как миры Белнапа, так и несовместные события.

Такого рода объекты потенциально охватывают как квантовые, так и классические реальности физического мира. И в этом смысле являются весьма плодотворными моделями эвереттического бытия. Однако путь от конструирования такого рода сущностей к построению алгоритмических моделей типа модели А.Л. Круглого весьма длинный и потому не следует ожидать от них быстрых прагматических реализаций.

Показательно, что обе рассмотренные работы по описанию дискретного пространства-времени демонстрируют проявление Пятой аксиомы эвереттики о бытии, как гёделевской фрактальной метасистеме Мирозданий.

Резюмируя приведенный краткий обзор, можно сказать, что математика в развитии как своих традиционных методов, так и в новых областях исследований, порождает весьма разнообразный инструментарий для решения эвереттических задач. И не следует удивляться его разнообразию. Как было сказано в «Эвереттической прагматике», «Многомирие по своему смыслу толерантно к многообразию частных» [1, с. 498].

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность Д.В. Семенову за редактирование и техническую подготовку текста к печати.

Литература

- [1] Ю.А.Лебедев, «Многоликое мироздание. Эвереттическая прагматика», М., 2010, 721 с.
- [2] Ю.А. Лебедев, Д.А. Кирьянов, ««Эвереттические и холические аспекты описания пространства-времени, вероятности и декогеренции сложных квантовых систем», Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, Сер. «Естественные науки», Специальный выпуск «Физические интерпретации теории относительности», 2011, с. 180 – 193.
- [3] Ю.Х. Векилов, М.А. Черников, «Квазикрис-галлы», УФН, т. 180, 2010, с. 561 – 586.
- [4] Luca Bindi, Paul J. Steinhardt, Nan Yao, Peter J. Lu, «Icosahedrite, $Al_63Cu_{24}Fe_{13}$, the first natural quasicrystal», American Mineralogist, v. 96, 2011, p. 928–931.
- [5] А.К. Гуц, Частное сообщение по e-mail от 16.09.08.
- [6] П.С. Александров, «Введение в теорию групп», М., Едиториал УРСС, 2010, 128 с.
- [7] Alexey L.Krugly, «A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph», arXiv:1112.1064v1 [gr-qc], submitted on 5 Dec 2011.
- [8] Л.В.Ильичёв, «Теоретико-топосный подход к описанию ветвящегося пространства-времени», http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/ilichev_teoret_topos.pdf
- [9] О.Ю.Воробьёв, «Эвентология», Красноярск, 2007, 435 с.

Мониторинг медико-демографических процессов в Красноярском крае между Всероссийскими переписями населения 2002 и 2010 гг.

**Владимир
Фёдорович
Мажаров**

НИИ комплексных проблем
гигиены и профзаболеваний СО
РАМН
Новокузнецк
majarov@inbox.ru

**Никита Юрьевич
Плотников**

НИИ комплексных проблем
гигиены и профзаболеваний СО
РАМН
Новокузнецк
contkit@rambler.ru

**Борис Эмануилович
Горный**

НИИ комплексных проблем
гигиены и профзаболеваний СО
РАМН
Новокузнецк
bg1960@yandex.ru

**Татьяна Валерьевна
Крупкина**

Сибирский федеральный
университет,
Красноярск
tatiana.krupkina@gmail.com

**Сергей Валерьевич
Бабенышев**

Сибирский институт
пожарной безопасности,
Железногорск
sergei.babyonyshev@gmail.com

**Ирина Викторовна
Тихонова**

НИИ комплексных проблем гигиены
и профзаболеваний
СО РАМН, Новокузнецк
tihnova_iv@24.rospotrebnadzor.ru

**Евгения Александровна
Аверченко**

Красноярский государственный
медуниверситет,
Красноярск
aea.doc@gmail.com

Аннотация. Анализ медико-демографических процессов в Красноярском крае показал, что реализация Приоритетного национального проекта «Здоровье», в частности, программы улучшения демографической ситуации, способствовала в регионе росту рождаемости и снижению смертности населения. Достигнутые на начальном этапе успехи в снижении безвозвратных популяционных потерь среди населения, главным образом, трудоспособных возрастов, сменились в последние годы (2008-2010 гг.) их резким замедлением, а от отдельных классов болезней – ростом смертности. Дополнительные усилия государства по модернизации системы здравоохранения, несомненно, дадут новые стимулы к дальнейшему снижению смертности.

Ключевые слова. Красноярский край, население, рождаемость, смертность, депопуляция, Приоритетный национальный проект в сфере здравоохранения.

1 Введение

В первое десятилетие 2000-х годов в Российской Федерации было проведено две Всероссийские переписи населения (ВПН) – в 2002 и 2010 годах. Их результаты позволили уточнить характер демографических процессов во всех субъектах РФ и выявить уровень и интенсивность происходящей в стране и в регионах депопуляции. Необходимость проведения ВПН обусловлена тем, что текущий учёт естественного и механического движения населения страдает неполнотой: в сельской местности учёт миграционного движения осуществляется лишь по 5% выборке, что ведёт к искажению итоговых результатов и не позволяет правильно планировать развитие сети ЛПУ, центров санэпиднадзора, разрабатывать планы оздоровительных мероприятий, подготовки и распределения медицинских кадров, а также осуществлять вычисление общих и особенно, специальных возрастно-половых показателей рождаемости, смертности, заболеваемости,

обеспеченности населения различными видами медицинской помощи.

2 Динамика численности и половозрастного состава населения

Предварительные итоги ВПН-2010 по Красноярскому краю подтвердили сомнения в точности текущего учёта населения, что выразилось в «потере» достаточно весомой его доли (рис. 1). По результатам текущего учёта численность постоянного населения Красноярского края с закрытыми административно-территориальными образованиями по состоянию на 1 января 2011 г. составила 2893,9 тыс. человек, снизившись по отношению к 2002 году на 87,8 тыс. человек. В действительности же это снижение оказалось почти в два раза большим: 152,6 тыс. человек, или на 5,1%.

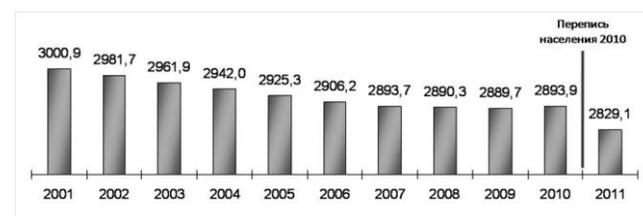


Рис. 1: Численность населения Красноярского края на начало года, тыс. человек (источник:КМИАЦ)

В укрупнённых экономических зонах (ЭЗ) Красноярского края динамика численности населения была разнонаправленной: в подавляющем большинстве из них продолжается снижение численности населения, наиболее интенсивное в Приангарье (темп убыли 1,5% к 2009 году), в Северной ЭЗ (темп убыли 1,2% к 2009 году), и в г. Норильске (темп убыли 1,0% к 2009 году). При этом максимальные потери населения относительно дореформенного периода отмечены в Северной (-42,4%) и Приангарской (-26,7%) экономических зонах. Позитивная динамика численности населения отмечена в г. Красноярске и Центральной зоне.

В связи с продолжающимся ростом рождаемости и стабилизацией общей смертности отмечено изменение возрастной структуры населения: удельный вес детей 0-14 лет возрос с 15,7% в 2008 г. до 16,1% – в 2010 г. на фоне параллельного роста удельного веса лиц 60 лет и старше. Таким образом, возрастная структура населения Красноярского края продолжает оставаться регрессивной: доля лиц 55 лет и старше (21,7%) превышает долю лиц 0-15 лет (17,2%). Эти процессы привели к возрастанию демографической нагрузки во всех типах поселений Красноярского края с опережающим темпом прироста данного показателя у пенсионеров.

Удельный вес сельского населения (с ЗАТО) составляет 23,5% от общей численности населения края, без ЗАТО – 25,6%. В трёх ЭЗ (Нижнее Приангарье, Центральная, Енисейская), как и в крае в целом, его доля продолжает сокращаться. В то же время в двух зонах (Восточная и Западная) удельный вес сельских жителей повысился на 0,1 процентного пункта, а в Северной и Южной зонах – стабилизировался.

В половозрастной структуре населения Красноярского края отмечается небольшое преобладание мужского населения в возрастной группе от рождения до 24 лет. С 25 лет ситуация изменяется в сторону преобладания женского населения. В целом доля мужчин в структуре населения составляет 46,5% (город 45,8% и село 48,6%). В экономических зонах выявляется аналогичное соотношение, за исключением Приангарской зоны, в которой, в связи с возобновлением строительства Богучанской ГЭС и началом строительства Богучанского алюминиевого завода, имело место привлечение значительных трудовых ресурсов, преимущественно мужчин строительных специальностей. Большую роль в сложившейся половой диспропорции сыграла программа переселения сельских жителей из затопляемых формируемым водохранилищем территорий из Кежемского муниципального района.

Отмечаются незначительные, но позитивные изменения численности мужчин всех возрастов на 1000 женщин, более выраженные среди сельского населения. Так, положительная динамика данного показателя относительно 2007 года отмечена среди сельчан в семи из девяти экономических зон, в то время как среди городского населения аналогичная тенденция выявлена лишь в одной Центральной зоне.

Реализация в РФ Приоритетного национального проекта «Здоровье» позитивно отразилась на демографических процессах, способствовала повышению рождаемости и снижению смертности практически на всей территории страны, в том числе и в Красноярском крае. Одним из очевидных положительных результатов является снижение темпов депопуляции, о чем свидетельствуют данные расчётов, проведённых за два временных

периода: 2003-2006 гг. и за 2007-2010 гг. Так, если в период 2003-2006 гг. у мужчин всех возрастов в городских поселениях среднегодовой темп убыли составлял 1,088%, то в период 2007-2010 гг. он практически свёлся к нулю (-0,025%). Близкая картина отмечена и в сельской местности, а также среди сельских женщин всех возрастов. Более того, у городских женщин в 2007-2010 гг. отмечено увеличение их численности со среднегодовым темпом прироста в +0,138%.

В то же время в динамике численности населения трудоспособного возраста (по существу являющегося фертильным возрастом для женщин) выявлены как позитивные (у сельских мужчин снижение среднегодовых темпов убыли в 2007-2010 гг. по сравнению с периодом 2003-2006 гг.), так и негативные тенденции (ускорение темпов убыли у городских мужчин и у женщин во всех типах поселений). Последнее является отражением волнообразной смены поколений: замены более многочисленных когорт женщин, родившихся после Великой Отечественной войны, и их дочерей на менее многочисленные, как следствие военных недорождений. Усугубило этот процесс и значительное снижение рождаемости в последнее десятилетие XX века, о чем свидетельствует резкое уменьшение, начиная с 1998 года, численности девушек 10-14 и 15-19 лет: со 138,5 тыс. до 64,9 тыс. человек и со 126,9 до 87,2 тыс. человек соответственно.

В Красноярском крае продолжается миграционный отток населения из приарктических и северных территорий. Основным ареалом оседания мигрантов остаются город Красноярск и Центральная ЭЗ, в частности, города Дивногорск и Сосновоборск, а также Емельяновский район. За последние 7 лет миграционный прирост здесь составил 73 тыс. человек (2,5% от численности населения, проживавшего в крае на начало 2010 г.) [1]. Однако темп миграционного прироста начал снижаться: в 2010 году семь муниципальных территорий края имели положительное сальдо миграции (в 2009 г. – двенадцать муниципальных районов и городских округов).

Миграционные процессы внесли основной вклад в формирование прироста численности населения Красноярского края к 2010 г. За счёт естественного движения прирост был обеспечен на 17,4%, за счёт миграции – на 82,6%.

Таким образом, в целом можно говорить о стабилизации численности населения Красноярского края, однако сохраняются процессы обезлюдивания территорий, которым способствуют не только отток населения, но и сохраняющееся превышение общей смертности над общей рождаемостью в подавляющем большинстве муниципальных районов и городских округов (в 40 из 51).

3 Рождаемость

В 90-е годы прошлого века, несмотря на существенный рост численности женщин репродуктивных возрастов (15-49 лет), число родившихся живыми снижалось вплоть до 1999 года. В последующие годы динамика численности женщин и числа живорождений приняла разнонаправленный характер: с 1999 по 2004 гг. численность женщин репродуктивных возрастов начала снижаться, затем этот процесс принял обвальный характер, в то время как число живорождений, с некоторым торможением в 2004-2005 гг., устойчиво возрастало, чему, в известной степени, способствовала и реализация с 2006 года Приоритетного национального проекта «Здоровье».

В 2010 году в Красноярском крае продолжился рост общей рождаемости (ОКР). Следует отметить, что темп прироста ОКР в целом по краю в 2010 году существенно замедлился и составил всего +0,82% (в 2009 г. – +4,2%, в 2008 г. – +8,4%), что было обусловлено отсутствием его прироста в сельской местности и минимальным приростом в городских поселениях (+1,19%).

Относительно экономических зон (всех типов поселений: город + село) установлено, что в трёх из них ОКР снизился (Западная, Северная, Приангарье), в двух (Восточная, Енисейская) – сохранился на уровне предыдущего года, и в четырёх (Красноярск, Норильск, Центральная и Южная) – превысил прошлогодний уровень. В то же время, если в городских поселениях снижение ОКР отмечено только в двух (Западная и Северная), то в сельской местности – уже в четырёх зонах (Восточная, Енисейская, Приангарье, Северная).

В 2010 году продолжился рост интенсивности деторождений, о чем свидетельствует положительная динамика специального коэффициента рождаемости (СпКР). Однако темп прироста данного показателя существенно замедлился как в городских поселениях – с +4,5% в 2009 году до +2,5% в 2010 году; так и в сельской местности – с +5,4% до +2,3%; в целом по краю – с +4,6% до +2,44% соответственно. При этом необходимо отметить, что замедление темпов прироста СпКР началось уже в предыдущем 2009 году. В сопоставляемых экономических зонах динамика СпКР неоднородна: в городских поселениях он снизился в двух из них (Западная и Северная). В оставшихся экономических зонах СпКР характеризовался ростом, но с различными значениями темпов прироста: от минимальных в г. Красноярске (+1,6%) и Приангарье (+1,9%) до максимальных – в Центральной и Южной СЭЗ (по +5,8%), а также в г. Норильске (+5,5%). В сельской местности во всех экономических зонах, за исключением Западной, отмечено резкое замедление темпов прироста СпКР, что может свидетельствовать об исчерпании репродуктивного потенциала,

сформировавшегося в результате реализации Приоритетного национального проекта «Здоровье».

Анализ динамики повозрастных коэффициентов рождаемости (ВКР) в городских поселениях и в сельской местности Красноярского края в 2010 г. не выявил существенных различий в тенденциях, сформировавшихся в предыдущие годы: снижение интенсивности деторождений в младших возрастных группах 15-19 и 20-24 лет и ее рост среди женщин 25-29 и 30-34 лет. В городских поселениях края, начиная с 2007 г., максимальная интенсивность деторождений установилась в возрастной группе женщин 25-29 лет. В сельской местности она все ещё сохраняется наивысшей в группе женщин 20-24 лет. Однако и в этой группе наметилась тенденция к снижению ВКР, что привело к его сближению с данным показателем у 25-29-летних сельских жительниц.

Отмеченные динамические процессы привели к смещению среднего возраста рожениц в более старшие возрастные группы: – с $24,55 \pm 0,033$ лет в 1998 году до $26,82 \pm 0,028$ лет в 2010 году, то есть почти на 2,5 года (город – с $24,59 \pm 0,038$ до $27,27 \pm 0,032$ лет, село – с $24,45 \pm 0,067$ до $25,62 \pm 0,055$ лет, соответственно). В более старшие возраста сместился и средний возраст первородящих женщин: с $22,0 \pm 0,03$ лет в 1998 году до $24,74 \pm 0,032$ лет в 2010 году (город – с $22,44 \pm 0,039$ до $24,86 \pm 0,037$ лет, село – с $20,5 \pm 0,055$ до $22,39 \pm 0,059$ лет).

Позитивная демографическая ситуация в крае реализовалась и в росте суммарного коэффициента рождаемости (СуммКР), величина которого в сельской местности впервые за реформенный период достигла уровня простого воспроизводства – 2,164 ребёнка на 1 женщину фертильного возраста. В городских поселениях края максимальный уровень СуммКР зарегистрирован в зонах, приравненных к районам Крайнего Севера – Приангарской (1,754) и в Енисейской (1,703), минимальный – в Красноярске (1,349), в Норильске (1,435) и в Центральной зоне (1,463), но ни в одной из них он не достигал уровня простого воспроизводства населения. Таким образом, сельская местность, по-прежнему, остаётся арьергардом более высокой рождаемости. Тем не менее, несмотря на то, что в сельской местности в большей части экономических зон, за исключением Приангарской и Центральной, суммарное число детей, рождённых одной женщиной фертильного возраста, превышает двух, лишь в трёх зонах брутто-коэффициент воспроизводства населения был близок (Южная, Енисейская), либо незначительно превышал (Северная) величину уровня простого воспроизводства населения.

Таким образом, в целом сохраняется положительная, но замедляющаяся динамика основных показателей воспроизводства населения Красноярского края. При этом не прослеживается ни широтная (Север-Юг), ни

меридиональная (Запад-Восток) закономерность распределения экономических зон по специальному и суммарному коэффициентам рождаемости: максимальные их уровни отмечены в полярно противоположных зонах – Северной и Южной. Катастрофически снижающаяся численность женщин репродуктивных возрастов даёт основание на пессимистический прогноз дальнейшей динамики рождаемости. Для того чтобы сохранить достигнутую интенсивность деторождений (не общую рождаемость – ее вряд ли удастся удержать!) необходимы дополнительные меры федерального и регионального масштабов.

4 Смертность

4.1 Мертворождаемость

В Красноярском крае, после нескольких лет (2007-2009 гг.) относительно устойчивого снижения, в 2010 году отмечен рост мертворождаемости (МР), уровень которой превысил средние их значения по Российской Федерации и Сибирскому федеральному округу (5,68‰, против 4,62‰ и 4,69‰ соответственно) [2].

Взросший в 2010 году уровень МР сформировался за счёт роста случаев мертворождений от таких причин со стороны матери как «Инфекционные и паразитарные болезни матери» (с 18 до 29 случаев), а также «Вредные влияния, передающиеся через плаценту или грудное молоко» (с 5 до 9 случаев). Кроме того, зарегистрирован рост МР, обусловленных токсикозом II половины беременности (с 6 до 12 случаев). Однако преобладают случаи МР, при которых причина со стороны матери не установлена – в 80 из 210 случаев. При этом отмечается их прирост по отношению к 58 аналогичным случаям МР в 2009 году или в процентном отношении – с 32,8% до 38,1%.

В отношении структуры причин МР со стороны плода настораживает то обстоятельство, что такая причина как «Респираторные нарушения у плода и новорождённого» в абсолютных цифрах устойчиво нарастает (2008 год – 151 случай, 2009 год – 156 случаев, 2010 год – 188 случаев). При этом рост репродуктивных потерь в связи с гипоксией и асфиксией плода отмечен как в антенатальный (со 140 до 156 случаев), так и в интранатальный периоды (с 17 до 32 случаев), что свидетельствует о серьёзных недостатках в наблюдении беременных и тактики ведения родов.

При этом видимые, очевидные причины такого «неожиданного» подъёма мертворождаемости, казалось бы, отсутствуют: частота заболеваний и патологических состояний, предшествовавших или возникших во время беременности в 2010 году снизилась по отношению к 2009 году с $2226,4 \pm 10,3\%$ до $2191,5 \pm 10\%$ ($p < 0,05$). Всего на 4,0% возросла частота заболеваний, осложнивших роды и послеродовой период, (2009 г. – $2066,1 \pm 9,9\%$,

2010 г. – $2149,1 \pm 10,1\%$, $p < 0,001$), притом, что среди подавляющего большинства учтённых в госстатотчетной форме №.32, (таблица 2211) заболеваний и патологических состояний, отмечено снижение их частоты по отношению к 2009 году. Следовательно, предположение о возможной связи между ростом мертворождаемости и ухудшением состояния здоровья беременных, а также нарастанием патологических состояний, осложнивших течение родов, не находит своего подтверждения.

4.2 Младенческая смертность

По данным Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Красноярскому краю в регионе в 2010 году показатель младенческой смертности (МС) после однократного подъёма в 2009 году до уровня 10,63‰, продолжил снижаться и составил 9,2‰ (рис. 2). В абсолютном исчислении в возрасте 0-1 год (без ЗАТО) умерло 340 младенцев (2009 год – 387; 2008 год – 348; 2007 год – 393 ребёнка), что составило абсолютный исторический минимум за все годы деятельности системы охраны материнства и детства Красноярского края.

Снижение МС отмечено в большинстве муниципальных районов и городских округов – в 31 из 51. Тем не менее, в 16 муниципальных районах и городских округах в 2010 году показатель МС повысился, сохранился на уровне 2009 года – в четырёх. В отличие от предыдущих лет существенно возрос показатель младенческой смертности в г. Норильске: с $2,91 \pm 1,096\%$ в 2009 году до $7,3 \pm 1,712\%$ ($p < 0,05$), практически вернувшийся к уровню 2007 года.

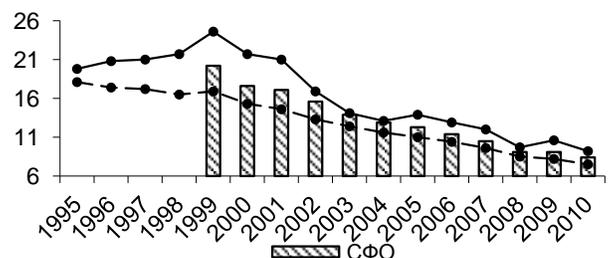


Рис. 2: Динамика показателя младенческой смертности на 1000 родившихся в Красноярском крае (сплошная линия), Сибирском федеральном округе (гистограмма) и Российской Федерации (пунктирная линия) в 1995-2010 годах (источник: КМИАЦ, ЛМСП)

В сельской местности МС снизилась с $16,4 \pm 1,26\%$ до $12,9 \pm 1,12\%$, существенно сократив разрыв с показателями городских поселений (без городов Красноярск и Норильск): $11,7 \pm 1,02\%$ в 2009 г., $10,6 \pm 0,97\%$ в 2010 г.

Выявленные позитивные тенденции в снижении МС обусловлены улучшением показателей смертности младенцев обоих полов в ранний неонатальный период (0-6 суток жизни), и, в частности, преимущественно в

возрасте 1-6 суток, во всех типах территорий. Абсолютное число умерших в этот возрастной период сократилось более чем в 1,5 раза: со 116 в 2009 году до 74 младенцев – в 2010 году (в Красноярске – в 1,58 раза, в городских поселениях края – в 1,57 раза, в сельской местности – в 1,88 раза).

Смертность младенцев мужского пола во всех типах территорий регистрируется на более высоком уровне, чем младенцев женского пола, однако половые различия статистически достоверны (при $p < 0,05$) лишь в сельской местности.

В ранний неонатальный период (0-6 суток) смертность у мальчиков и девочек во всех типах поселений края имела отчётливую тенденцию к снижению, хотя разница и не была статистически достоверной. В поздний неонатальный период (7-28 суток), как в сельской местности, так и в городских поселениях показатели смертности девочек ухудшились, у мальчиков – практически не изменились. В постнеонатальном периоде отмечается превышение смертности среди младенцев обоих полов в сельской местности над таковой во всех типах городских поселений при статистически недостоверной разнице.

В 2010 году, на фоне общего снижения абсолютного числа умерших, почти в полтора раза увеличилось число случаев смерти детей от болезней органов дыхания (с 24 до 37 случаев), в том числе у мальчиков – в два раза; от некоторых инфекционных и паразитарных болезней (с 24 до 27 случаев), от болезней нервной системы (с 9 до 12 случаев) и от внешних причин (травмы и отравления, с 47 до 51 случая). Практически все выше перечисленные причины смерти относятся к управляемым средствами и ресурсами здравоохранения, что накладывает особую ответственность за рост смертности на систему охраны материнства и детства.

Основной вклад в снижение МС внесли такие «мало управляемые» причины как отдельные состояния, возникающие в перинатальном периоде (ОСПП) (со 179 в 2009 до 132 случаев в 2010 г.) и врождённые anomalies (с 75 до 64 случаев). Двукратное снижение числа умерших от причин, характеризующихся как неточно обозначенные и неуточнённые причины смерти (с 22 до 11 случаев), свидетельствует о некотором улучшении диагностики в части идентификации симптомов, признаков, отклонений от нормы, выявленных при клинических и лабораторных исследованиях.

В целом по краю статистически достоверные половые различия обнаружены лишь при смертности младенцев суммарно от всех причин ($p < 0,01$), в том числе при смертности от инфекционных и паразитарных болезней ($p < 0,05$), а также от ОСПП ($p < 0,01$).

В городских поселениях статистически достоверных половых различий в снижении или росте смертности как

от всех, так и от отдельных причин не выявлено, поэтому полученные результаты могут трактоваться лишь как тенденции. Межгодовые статистически достоверные различия установлены для болезней органов дыхания, как в смешанной когорте ($p < 0,01$), так и у мальчиков (более, чем 3-кратный рост, $p < 0,05$), а также от ОСПП – у девочек ($p < 0,05$).

В сельской местности половые различия выразились в более низкой смертности девочек суммарно от всех причин ($p < 0,01$) и от ОСПП ($p < 0,01$). Межгодовые различия выявлены в снижении смертности у смешанной когорты суммарно от всех причин ($p < 0,05$) и от неточно обозначенных и неуточнённых причин смерти ($p < 0,05$), у мальчиков – от ОСПП ($p < 0,05$), у девочек – суммарно от всех причин ($p < 0,05$).

4.3 Перинатальная смертность

Как отмечалось выше, снижение МС в 2010 году было обусловлено снижением смертности младенцев возрастного периода 1-6 суток, и основной вклад в снижение МС внесли такие мало управляемые средствами и ресурсами здравоохранения причины как ОСПП и врождённые anomalies, ведущие для данного возрастного периода. В то же время, насторожённость в отношении достоверности (возможный «переброс» из живорождений в мертворождения) вызвало полное совпадение кратности снижения числа умерших в ранний неонатальный период в городе Красноярске и городских поселениях края. В то же время коэффициент перинатальной смертности в 2010 году в крае в целом, в городских поселениях края и г. Красноярске практически остался на уровне предыдущего года (рис. 3).

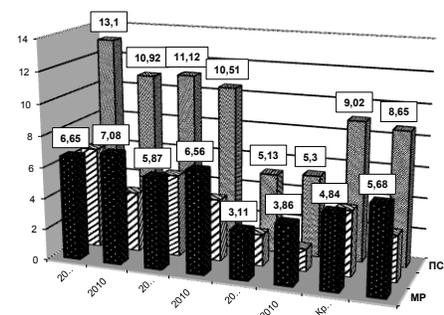


Рис. 3: Перинатальная смертность и ее компоненты в различных типах территорий Красноярского края в 2009 и 2010 гг., на 1000 родов (источник: собственные расчёты)

4.4 Фетоинфантильные потери (ФИП)

Динамика фетоинфантильных (плодово-младенческих) потерь (мертворождаемость + младенческая смертность) в Красноярском крае свидетельствует о незначительных тенденциях их снижения в последние четыре года,

причём в сельской местности эти тенденции носят волнообразный характер, практически возвращаясь в 2010 году к уровню, достигнутому к 2008 году (таблица).

Таблица 1. Динамика фетоинфантильных потерь в различных типах территорий Красноярского края в 2007-2010 гг., на 1000 родов

Тип территорий	2007	2008	2009	2010
Сельская местность	22,3	20,0	23,0	19,9
Городские поселения*	20,1	16,9	17,4	17,2
Красноярск	12,2	10,1	9,7	9,5
Норильск	12,8	9,1	4,6	12,9
Городские поселения**	15,8	13,0	12,5	13,0
Край без Красноярска и Норильска	21,1	18,4	20,1	18,5
Край с Красноярском и Норильском	17,6	14,9	15,4	14,9

Примечание: *) – без Красноярска и Норильска; **) – с Красноярском и Норильском

В городских поселениях положительная динамика ФИП отсутствует в течение трёх последних лет. В целом по краю и в различных типах его территорий, по-видимому, можно говорить о стабилизации уровня ФИП, несмотря на то, что такая его компонента как мертворождаемость ухудшила свои территориальные характеристики. Единственное исключение составил г. Норильск, в котором рост уровня ФИП был обусловлен ростом младенческой смертности в 2010 году.

Рекомендованный ВОЗ интегрированный показатель плодово-младенческих потерь позволяет использовать его для анализа деятельности служб материнства и детства, для выработки наиболее эффективных управленческих решений по профилактике младенческой и перинатальной смертности. Целесообразность изучения ФИП продиктована единством значительной части причин этих потерь, а также выявлением возрастных отрезков с наибольшими потерями [3, 4]. Интегрированный коэффициент, объединяющий информацию о возрастной структуре и причинах смертности плодов и младенцев, должен помочь руководителям здравоохранения правильно планировать и распределять материальные ресурсы. При их распределении основная часть должна быть направлена на развитие и внедрение перинатальных технологий.

4.5 Общая смертность

Беспрецедентный рост коэффициента общей смертности (ОКС) населения России (в том числе в СФО и Красноярском крае) в 90-е годы прошлого столетия и в начале нулевых годов XXI века завершился в 2003-2005 гг., достигнув своего максимума в России в 2003 году на

уровне 16,4‰, в СФО и в Красноярском крае – в 2005 году на уровне соответственно 16,5 и 15,9‰ (рис. 4).

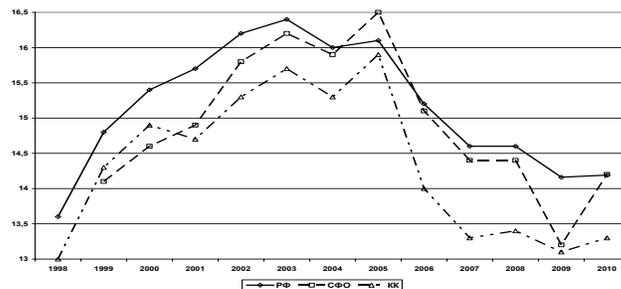


Рис. 4: Динамика общего коэффициента смертности в России, Сибирском федеральном округе и в Красноярском крае в 1998-2010 гг. (источник: собственные расчёты)

Начало реализации в РФ Приоритетного национального проекта (ПНП) «Здоровье» в 2006 г. ознаменовалось «внезапным» снижением общей смертности населения, при этом в Красноярском крае темп снижения ОКС к 2007 г. по отношению к 2005 г. был более существенным, чем в СФО и РФ: 16,5% против 12,7 и 9,3% соответственно.

Необходимо отметить, что наиболее чувствительным к мероприятиям по укреплению первичного звена медико-санитарной помощи, предусмотренных ПНП «Здоровье» в качестве основной его цели, явилось население трудоспособного возраста (ТСВ). Именно в этой возрастной группе темп снижения общей смертности оказался наибольшим, в два раза превысивший аналогичный показатель среди населения старше трудоспособных возрастов: с 9,8‰ в 2005 году до 6,85‰ – в 2010 году, или на 30,1%, и с 54,76‰ до 46,3‰, или на 15,3% соответственно. При этом, если у мужчин и у женщин ТСВ темп снижения ОКС оказался примерно равным (30,8 и 30,5% соответственно), то в пенсионных возрастах темп снижения общей смертности у мужчин был почти в два раза меньшим, чем у женщин (9,2 и 17,8% соответственно).

Наибольший вклад в снижение смертности мужчин ТСВ в 2010 году по отношению к 2005 году внесли такие классы причин как травмы и отравления (класс XIX, снижение в 1,6 раза), неточно обозначенные состояния и синдромы (класс XVIII, снижение в 2,2 раза), болезни органов дыхания (класс X, снижение в 1,8 раза), психические расстройства и расстройства поведения (класс V, снижение в 3,03 раза). В то же время обращает на себя внимание то обстоятельство, что основные позитивные сдвиги произошли в первые 2-3 года реализации ПНП «Здоровье» (в 2006-2008 годах), после чего динамика смертности от большинства классов причин приняла неустойчивый характер, а от болезней системы кровообращения – даже наметился её рост в 2010 году.

Не следует упускать из виду, что наибольший объем безвозвратных популяционных потерь приходится на мужское трудоспособное население, так как у женщин данной возрастной группы показатели смертности от указанных причин регистрировались на уровне в 3-5 раз ниже, чем у мужчин. Поэтому в ближайшие годы основные усилия должны быть направлены на снижение их смертности от предотвратимых (средствами и ресурсами здравоохранения) причин. Большие надежды в достижении данной цели возлагаются на проводимую в стране модернизацию здравоохранения, чему в известной степени будет способствовать и недавно принятый Государственной Думой Федерального Собрания Российской Федерации Федеральный закон «Об охране здоровья граждан Российской Федерации». Обнадёживающим основанием для такого предположения является устойчивое снижение смертности мужчин ТСВ от случайных отравлений алкоголем (со 100,9‰ в 2005 г. до 48,8‰ в 2010 г.) и от причин, связанных с его злоупотреблением: алкогольные психозы (с 13,7‰ до 4,5‰), алкогольные кардиомиопатии (с 17,4‰ до 5,9‰), алкогольные болезни печени и поджелудочной железы (со 16,6‰ до 5,8‰). При этом динамика показателя суммарной «алкогольной» смертности и у мужчин и у женщин ТСВ оказалась практически аналогичной (рис. 5).

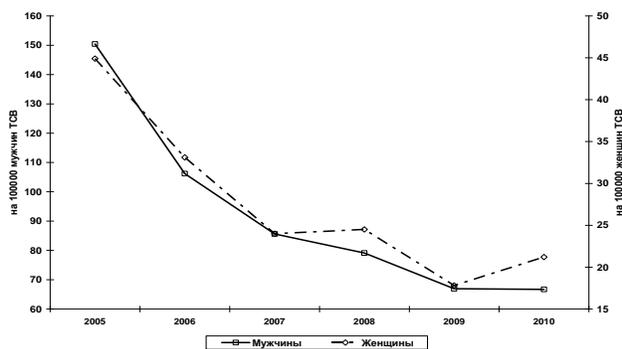


Рис. 5: Динамика показателя суммарной «алкогольной» смертности у мужчин и женщин ТСВ в 2005-2010 гг., Красноярский край (город + село), на 100 тыс. соответствующего пола и возраста (источник: собственные расчёты).

Особую позицию занимают показатели смертности от случайных отравлений наркотиками и другими психоактивными веществами. И у мужчин, и у женщин ТСВ, несмотря на все усилия, предпринимаемые сообществом, не удаётся добиться сколько-нибудь значимых положительных результатов. С незначительными межгодовыми флуктуациями данные показатели смертности характеризуются тенденцией к росту и держатся на уровне, сформировавшемся в первой половине нулевых лет: у мужчин в диапазоне 21,0-36,3‰, у женщин – 1,1-5,4‰, при этом максимум регистрировался в 2006 году.

Следует отметить устойчивую положительную динамику снижения смертности от ДТП, самоубийств, убийств и повреждений с неопределёнными намерениями. Занимая в общей структуре смертности от травм и отравлений более половины всех случаев (у мужчин 53,8%, у женщин 55,9%), именно эта группа причин демонстрирует чувствительность и восприимчивость общества к происходящим в нем социально-экономическим и социально-политическим переменам.

Заключение

Таким образом, анализ медико-демографических процессов в Красноярском крае показал, что реализация Приоритетного национального проекта «Здоровье», в частности, программы улучшения демографической ситуации способствовала в регионе росту рождаемости и снижению смертности населения. Тем не менее, результаты естественного движения населения (разность между общей рождаемостью и общей смертностью) не только не компенсировали процессы миграционного оттока населения из северных экономических зон Красноярского края, но и усугубляли в них депопуляцию.

Достигнутые на начальном этапе успехи в снижении безвозвратных популяционных потерь среди населения, главным образом, трудоспособных возрастов, сменились в последние годы (2008-2010 гг.) их резким замедлением, а от отдельных классов болезней – ростом смертности. Дополнительные усилия государства по модернизации системы здравоохранения, несомненно, дадут стимул к дальнейшему снижению смертности.

Литература

- [1] Государственный доклад о состоянии здоровья населения и деятельности здравоохранения Красноярского края в 2010 году. – Красноярск: КМИАЦ, 2011. – 295 с.
- [2] Основные показатели здоровья населения и здравоохранения Сибирского федерального округа в 2010 году. Сборник статистических и аналитических материалов. Выпуск 10 / под общ. редакцией к.м.н. О.В.Стрельченко – Новосибирск: О «Альфа Ресурс», 2011. – 426 с.
- [3] Фролова О.Г., Пугачева Т.Н., Глиняная С.В. Репродуктивные потери (новые методы анализа и оценки) // Здравоохранение Российской Федерации. – 1994. – №2. – С. 25-28.
- [4] Цыбульская И.С., Волков И.М., Короткова А.В. Совершенствование методов оценки состояния здоровья населения и принципы построения системы мониторинга здоровья на основе регистра // В кн.: матер. ежегодной 4-ой Российской научно-практической конференции НПО "Медсоцэкономинформ": "Управление качеством медицинской помощи в Российской Федерации". - 1997. - с 355-359.

Актуарные расчеты по добровольному медицинскому страхованию

Алексей Николаевич Медницкий
Самарский Государственный Университет
Самара
medik42@yandex.ru

Алла Юрьевна Трусова
Самарский государственный Университет
Самара
alla.yurievna@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрены актуарные расчеты по добровольному медицинскому страхованию. Для расчета основной части нетто-ставки и рискованной надбавки применена формула Шуэтта-Несбитта. Показано три метода вычисления поправочных коэффициентов. В среде программирования Borland Delphi составлена программа, автоматизирующая актуарные расчеты.

Ключевые слова. Страхование, актуарные расчеты, добровольное медицинское страхование, риск, вероятность, нетто-ставка, брутто-ставка, тарифы, поправочный коэффициент, убыточность, рискованная надбавка.

Введение

Добровольное медицинское страхование – один из самых популярных видов страхования в настоящее время. Широкое его распространение обусловлено основным преимуществом перед другими видами страхования, а именно, активностью клиента в формировании страховой программы. Спектр рисков достаточно широк: риск смерти, инвалидности, опасных или инфекционных заболеваний, временной нетрудоспособности. Психологические аспекты в случае наступления рисков доминируют при выборе клиентом вида страхования.

В этой связи целью данной работы является изучение ключевых параметров добровольного медицинского страхования. Среди них важное место занимает вероятность наступления страхового случая, размер выплат при возникновении рискованной ситуации, брутто и нетто ставки, поправочные коэффициенты и величина страховой премии.

Основная часть

В настоящее время существует немного способов рассчитать тарифную ставку по добровольному медицинскому страхованию. Причины этого заключаются в отсутствии хорошего математического аппарата, в неправильной оценке убыточности данного вида страхования, в недостоверной исходной информации. Данные, которыми мы оперировали, отражали динамику заболеваний по Алтайскому краю и представлены в виде следующих таблиц, взятых из работы [1]:

1. Статистика обращений по «амбулаторно-поликлинической помощи». Таблица содержит вероятность обращения по всем классам болезней.
2. Статистика госпитализаций. Таблица содержит среднюю длительность госпитализаций и вероятность наступления по каждому классу заболеваний.
3. Среднее число обращений и средняя длительность госпитализаций в зависимости от года.
4. Количество обращений в зависимости от пола, возраста и группы здоровья.

Расчет нетто-ставки по формуле Шуэтта-Несбитта

Для нахождения основной части нетто-ставки, по формуле Шуэтта-Несбитта, представленной в работе [2], вычисляется суммарный объем выплат:

$$H_0 = S = \sum_{j=1}^n S_{[j]}, \quad (1)$$

где S - суммарный объем выплат, n – количество классов болезней.

$$S_{[j]} = P_{[j]} \sum_{i_1 \dots i_j}^n \frac{\prod_{k=1}^j q_{i_k}}{D_j} * (\sum_{k=1}^j Y_{j_k}), \quad (2)$$

где q_{i_k} - вероятность наступления i_k -ой болезни, Y_{j_k} - выплаты по этой болезни.

$$P_{[k]} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-k} * C_k^j * D_j, \quad (3)$$

$$D_j = \sum_{i_1 \dots i_j}^n \prod_{k=1}^j q_{i_k}. \quad (4)$$

Дисперсия суммарного объема выплат, позволяющая оценить рискованную надбавку, находится по формуле:

$$\sigma^2 = P_{[j]} \sum_{i_1 \dots i_j}^n \frac{\prod_{k=1}^j q_{i_k}}{D_j} * (\sum_{k=1}^j Y_{j_k})^2 - S^2. \quad (5)$$

Однако осуществить данные вычисления становится проблематично при большом количестве классов болезней. Для данных вычислений была составлена программа в среде Borland Delphi, которая позволяет автоматически рассчитать и ожидаемое значение выплат и дисперсию.

Расчет нетто-ставки на основе убыточности

Также, в работе был представлен более простой метод вычисления тарифной ставки, в котором нетто-ставка зависит от вероятности наступления хотя бы одного страхового случая и от убыточности. Этот метод подробно рассмотрен в работе [3]. Для расчета вероятности наступления страхового случая применяется формула (6).

$$p = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i), \quad (6)$$

где p_i – вероятности обращения за медицинской помощью для каждого класса болезней, предусмотренных условиями страхования.

Убыточность (отношение страховых выплат к страховой сумме) находится по формуле (7).

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{C}} = \frac{R_{cp}}{R_{max}} \quad (7)$$

где R_{cp} – среднее число посещений (средняя длительность госпитализации), R_{max} – максимальное число посещений (максимальная длительность госпитализации).

Нетто-ставка рассчитывается по формуле (8).

$$H = 100 * p * \frac{\bar{Y}}{\bar{C}} + H_p, \quad (8)$$

где H_p – рисковая надбавка, p – вероятность наступления страхового случая, \bar{Y} – Среднее страховое возмещение, \bar{C} – Средняя страховая сумма.

Расчет рисковой надбавки

В работе представлено несколько вариантов расчета рисковой надбавки, в зависимости от степени информированности страховой компании о рынке потребителя.

1. При наличии данных по числу заключенных договоров страхования.

$$H_p = H_0 * \alpha(\gamma) * \sqrt{\frac{1-p+\sigma^2}{n*p}}, \quad (9)$$

где $\alpha(\gamma)$ – гарантия безопасности, σ^2 – среднеквадратическое отклонение среднего возмещения, n – количество договоров страхования.

2. При отсутствии данных по числу заключенных договоров страхования

$$H_p = H_0 * \alpha(\gamma) * \sqrt{\frac{\sigma^2}{n-1}}, \quad (10)$$

где n – количество лет наблюдения.

3. При разработке новой программы ДМС

$$H_p = 1,2 * H_0 * \alpha(\gamma) * \sqrt{\frac{1-p}{n*p}}, \quad (11)$$

где n – прогнозируемое число договоров.

Расчет поправочных коэффициентов

В работе представлено несколько видов расчета поправочных коэффициентов. Первый метод – составление эконометрической модели.

$$\hat{k} = b_0 + b_1 * x_1 + b_2 * x_2 + \dots + b_n * x_n, \quad (12)$$

где X – матрица факторов.

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = (x^T x)^{-1} * x^T k. \quad (13)$$

Второй метод – дискриминантный анализ.

Третий метод, применяющийся в большинстве страховых компаний – статистический метод, основанный на вычислении процента больных в зависимости от различных факторов. Он подробно рассмотрен в работе [1]. После анализа исходной информации были получены следующие поправочные коэффициенты:

Таблица 1. Величина поправочного коэффициента по группам здоровья

Программа страхования	Коэффициент		
	1	2	3
Амбулаторно-поликлиническая помощь	0,5	1	1,2
Стационарная помощь	0,6	1	1,5

Таблица 2: Величина поправочного коэффициента по полу и возрасту

Возраст	Мужчины	Женщины
15-19	0,48	0,66
20-24	0,57	0,77
25-29	0,44	0,88
30-34	0,44	0,88

35-39	0,55	1
40-44	0,77	1,11
45-49	1	1,22
50-54	1,11	1,44
55-59	1,44	1,55
>59	1,66	1,88

Расчет страховой премии

После расчета поправочных коэффициентов нетто-ставка перерасчитывается по формуле (14).

$$H = H * \prod_{i=1}^i k_i , \quad (14)$$

где k_i - значение коэффициентов по отдельным факторам.

Брутто-ставка (сумма, которая взимается с клиента) вычисляется по формуле (15).

$$B = \frac{H}{1-f}, \quad (15)$$

где B – брутто-ставка, H – Нетто-ставка, f – нагрузка.

Заключение

В заключении хочется отметить, что добровольное медицинское страхование сейчас является интересным, прогрессирующим направлением в экономико-социальной сфере. Существует много нерешенных вопросов, регулирующих деятельность этого вида страхования. Математический аппарат, описывающий актуарные расчёты по добровольному медицинскому страхованию постоянно совершенствуется.

Литература

- [1] Н. Б. Грищенко, В. А. Клевно, В. В. Мищенко. *Добровольное медицинское страхование. Основы современной практики*. Издательство Алтайского государственного университета, Барнаул, 2001.
- [2] Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джанс, С. Несбитт, Д. Хикман. *Актуарная математика*. Перевод с английского под редакцией В. К. Малиновского. Издательство «Янус-К», Москва 2001.
- [3] Т. Мак. *Математика рискованного страхования*. Издательство «Олимп-бизнес», Москва, 2005.

Асимптотическое моделирование двухфакторных групп рисков на основе разложений Корниша-Фишера и трехпараметрического гамма-распределения

Елена Владимировна
Михайлова

Самарский государственный университет
кафедра метематики и бизнес-информатики
Самара
milena82@yandex.ru

Алла Юрьевна Трусова

Самарский государственный университет
кафедра метематики и бизнес-информатики
Самара
al_sun@mail.ru

Виктор Николаевич Никишов

Самарский государственный университет
кафедра метематики и бизнес-информатики
Самара
TSh-sea05@yandex.ru

Аннотация. В работе анализируется двухфакторная совокупность рисков отдельного вида страхования. Построение функций распределения проводится асимптотическими методами на основе разложения Корниша-Фишера, а также нормального и трехпараметрического гамма-распределений

Ключевые слова. Функция распределения, разложение Корниша-Фишера, нормальная аппроксимация

Введение

В данной работе исследованию подлежит совокупность предпринимательских рисков обусловленных возможным неисполнением или частичным исполнением обязательств по имеющимся у предпринимателя контрактам. Величина $S(k)$, описывающая суммарный убыток предпринимателя, может быть представлена в виде случайной суммы

$$S(k) = Y_1(k) + Y_2(k) + \dots + Y_\nu(k), \quad (1)$$

где $Y(k)$ – случайная величина, описывающая фактический размер убытков, вызванный ненадлежащим исполнением обязательств, ν – случайная величина, описывающая процесс поступления рисков (биномиальный, Пуассона).

Очевидно, что надлежащее исполнение обязательств по контракту связано с экономической конъюнктурой, платежеспособностью контрагента, в то время, как размер возникающих при этом потерь определяется стоимостью контракта. Следовательно величины ν и $Y(k)$ независимы.

Совокупность предпринимательских рисков относительно процесса поступления убытков разделим на I групп. Случайную величину $Y(k)$, описывающую фактический размер ущерба представим в виде:

$$Y(k) = \chi \cdot C_k, \quad (2)$$

где $C_k = j \cdot D$ – стоимость контракта, D – минимальный размер контракта, ($j = 1, \dots, J$), J – количество групп риска по величине фактического размера

убытков, χ – случайная величина, которая описывает степень ущерба по договору, не зависит от номера группы j и подчиняется бета-распределению. Производящая функция фактического размера убытков задается выражением:

$$m_{Y^j}(z) = E(z^{Y^j}) = \sum_{l=1}^{\hat{L}} (z^{jl} \cdot r_l), \quad (3)$$

где r_l – вероятность получить убыток в размере (2), \hat{L} – максимальное значение l , при котором $r_l > \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

В связи с этим, всю совокупность рисков можно представить в виде таблицы, каждая ячейка $N^{(i,j)}$ которой содержит риски, обладающие одинаковыми свойствами относительно процесса поступления убытков $\nu^{(i)}$ и их фактического размера $Y^{(j)}$. Пусть далее $S^{(i,j)}$ – суммарный убыток по рискам в ячейке $N^{(i,j)}$, $S^{(i)}$ – суммарный убыток по рискам группы ячеек $N^{(i)}$, S – суммарный убыток по всей совокупности предпринимательских рисков.

Требуется вычислить распределения величин $S^{(i,j)}$, $S^{(i)}$ и S , используя асимптотические методы. Выбор асимптотических методов обусловлен центральной предельной теоремой. Так как аппроксимации, рассмотренные в работе предполагают использование первых трех центральных моментов, вычислим их, используя факториальные моменты [7].

1 Центральные моменты распределений

Пусть ξ – одна из величин $S^{(i,j)}$, $S^{(i)}$ и S . Используя факториальные моменты величины ξ , запишем средние значения величин ξ , ξ^2 и ξ^3 :

$$\begin{aligned} E(\xi^1) &= E(\xi^{[1]}), \\ E(\xi^2) &= E(\xi^{[2]}) + E(\xi^{[1]}), \\ E(\xi^3) &= E(\xi^{[3]}) + 3E(\xi^{[2]}) + E(\xi^{[1]}). \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда центральные моменты величины ξ с учетом (4)

определяются выражениями:

$$\begin{aligned} D(\xi) &= E(\xi^{[2]}) + E(\xi^{[1]}) - (E(\xi^{[1]}))^2 = \\ &= m''(1) + m'(z) - (m'(1))^2 = \\ &= E(\xi) + m''(1) - (m'(1))^2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} E(\xi - E(\xi))^3 &= E(\xi^{[3]}) + 3E(\xi^{[2]}) + E(\xi^{[1]}) - \\ &- 3(E(\xi^{[1]}))E(\xi^{[2]}) - 3(E(\xi^{[1]}))^2 + \\ &+ 2(E(\xi^{[1]}))^3 = m'''(z) + 3m''(z) + m'(1) - \\ &- 3m'(1)m''(1) - 3(m'(1))^2 + 2(m'(1))^3 = \\ &= 3D(\xi) - 2m'(1) - 3m'(1)m''(z) + 2(m'(1))^3. \end{aligned} \tag{6}$$

где $m(z)$ – производящая функция моментов величины ξ .

Производящие функции кумулянтов суммарного размера убытков $S^{(i,j)}$, $S^{(i)}$ и S определяются соотношениями:

$$\ln(\tilde{m}(z)) = N_{ij} \cdot \eta_{ij}(z), \tag{7}$$

где $\eta_{ij}(z) = \ln(p_i + q_i m_{Y_j})$, $\tilde{m}(z) = m_{S^{(i,j)}}(z)$

$$\ln(m_{S^{(i)}}(z)) = \sum_{j=1}^J N_{ij} \cdot \eta_{ij}(z), \tag{8}$$

$$\ln(m_S(z)) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J N_{ij} \cdot \eta_{ij}(z). \tag{9}$$

Дифференцируя выражение (7) и учитывая, что $\tilde{m}(1) = 1$, получим:

$$\begin{aligned} \eta'_{ij}(1) &= q_i m'_{Y_j}(1) = \tilde{m}'(1), \\ \eta''_{ij}(1) &= q_i m''_{Y_j}(1) - (q_i m'_{Y_j})^2 = \tilde{m}''(1) - (\tilde{m}'(1))^2, \\ \eta'''_{ij}(1) &= q_i m'''_{Y_j}(1) - 3q_i^2 m'_{Y_j} m''_{Y_j} + 2(q_i m'_{Y_j})^3 = \\ &= \tilde{m}'''(1) + 2(\tilde{m}'(1))^3 - 3q_i \tilde{m}'(1) \tilde{m}''(1). \end{aligned}$$

Факториальные моменты функции $m_{Y_j}(1)$ определяются так:

$$\begin{aligned} m_{Y_j}(1) &= 1, \quad m'(1) = \sum_{l=1}^L j l r_l, \\ m''_{Y_j}(1) &= \sum_{l=1}^L j l (j l - 1) r_l, \\ m'''_{Y_j}(1) &= \sum_{l=1}^L j l (j l - 1) (j l - 2) r_l. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее в работе примем следующие обозначения:

$\tilde{\mu}$ – средние значения μ_{ij} , μ_i и μ , $\tilde{\sigma}^2$ – дисперсии σ_{ij}^2 , σ_i^2 и σ^2 величин $S^{(i,j)}$, $S^{(i)}$ и S соответственно.

Учитывая соотношения (10) и выражения (5) и (6) для второго и третьего центральных моментов получим выражения для первых трех центральных моментов и коэффициента асимметрии:

величины $S^{(i,j)}$:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= N_{ij} \cdot \eta'_{ij}(1), \quad \sigma_{ij}^2 = \mu_{ij} + N_{ij} \cdot \eta''_{ij}(1), \\ \gamma(S^{(i,j)}) &= \frac{E(S^{(i,j)} - \mu_{ij})^3}{\sigma_{ij}^3}; \end{aligned} \tag{11}$$

величины $S^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \sum_{j=1}^J N_{ij} \cdot \eta'_{ij}(1), \quad \sigma_i^2 = \mu_i + \sum_{j=1}^J N_{ij} \cdot \eta''_{ij}(1), \\ \gamma(S^{(i)}) &= \frac{E(S^{(i)} - \mu_i)^3}{\sigma_i^3}; \end{aligned} \tag{12}$$

величины S :

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J N_{ij} \cdot \eta'_{ij}(1), \quad \gamma(S) = \frac{E(S - \mu)^3}{\sigma^3}, \\ \sigma^2 &= \mu + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J N_{ij} \cdot \eta''_{ij}(1), \end{aligned} \tag{13}$$

где $E(\xi - \mu)^3 = 3\tilde{\sigma}^2 - 2\tilde{\mu} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J N_{ij} \cdot \eta'''_{ij}(1)$.

Зная значения центральных моментов величин $S^{(i,j)}$, $S^{(i)}$ и S , определяемые соотношениями (11), (12) и (13) соответственно, вычислим распределения суммарного размера убытков в ячейке, группе ячеек и в целом по совокупности, используя аппроксимации на основе разложения Корниша-Фишера и трехпараметрического гамма-распределения.

2 Нормальная аппроксимация функции распределения совокупного размера убытков

Для получения распределений суммарного размера убытков на основе нормальной аппроксимации требуется:

1. Центрировать случайную величину ξ :

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - \tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}. \tag{14}$$

2. Вычислить распределения суммарного размера убытков $P3\xi \approx \Phi(\tilde{\xi}; 0; 1)$. Функцию стандартного нормального распределения $\Phi(\tilde{\xi}; 0; 1)$ будем вычис-

лять, используя аппроксимацию, приведенную в [1]:

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{\xi}; 0; 1) &= 1 - \left(\sqrt{2\pi}e^{\tilde{\xi}^{2/3}}\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^5 b_i \cdot t^i + \varepsilon(\tilde{\xi}); \\ b &= 0, 2316419; \quad a_1 = 0, 31938153; \\ a_2 &= -0, 35656378; \quad a_3 = 1, 7814779; \\ a_4 &= -1, 821256; \quad a_5 = 1, 3302744; \\ t &= (1 + a\tilde{\xi})^{-1}; \quad \varepsilon(\tilde{\xi}) > 7.5 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \quad (15)$$

В случаях, когда коэффициент асимметрии $\gamma > 1$ следует модифицировать аппроксимацию с учетом третьего момента, используя разложение Корниша-Фишера. Аппроксимацию суммарного размера убытков на основе разложения Корниша-Фишера будем называть нормально-степенной.

3 Нормально-степенная аппроксимация функции распределения суммарного размера убытков

Получим асимптотическое разложение для функции, обратной к функции распределения, полученной из (14) в виде:

$$\xi = \tilde{\mu} + \tilde{\sigma}\tilde{\xi}, \quad (16)$$

Используя разложение Корниша-Фишера [1, 3], получим:

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi} + \frac{\gamma}{6} \left(\tilde{\xi}^2 - 1 \right), \quad (17)$$

Решением уравнения (17) является выражение:

$$\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6\tilde{\xi}}{\gamma} + 1} - \frac{3}{\gamma}. \quad (18)$$

Таким образом, для вычисления распределений суммарных убытков на основе нормально-степенной аппроксимации необходимо:

1. Центрировать случайную величину ξ , используя выражения (14).
2. Преобразовать величину $\tilde{\xi}$ с учетом третьего центрального момента по формуле (18)
3. Вычислить распределения суммарного размера убытков $P4_\xi \approx \Phi(\tilde{\xi}; 0; 1)$. Функцию $\Phi(\tilde{\xi}; 0; 1)$ вычислим, используя аппроксимацию (15).

Далее вычислим распределения суммарного размера убытков в ячейке, группе ячеек и в целом по портфелю, используя аппроксимацию трехпараметрическим гамма-распределением.

4 Аппроксимация функции распределения совокупного размера убытков трехпараметрическим гамма-распределением

Распределения суммарного размера убытков, вычисленные по реальным данным, как правило, характеризуются положительным коэффициентом асимметрии, неотрицательной областью значений, унимодальностью и имеют вид гамма-распределения. Кроме параметров α и β добавляется третий, учитывающий сдвиг распределения на величину x_0 . Аппроксимируем функцию распределения суммарного размера убытков функцией распределения случайной величины $Z + x_0$, где Z имеет гамма-распределение с параметрами α и β . Параметры α , β , x_0 подбираются таким образом, чтобы первые три момента величины ξ и аппроксимирующей случайной величины совпали.

Для вычисления функций распределения суммарного размера убытков, используя аппроксимацию трехпараметрическим гамма-распределением требуется:

1. Вычислить параметры распределения α , β , x_0 по формулам:

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2}, \quad \beta = \frac{2}{[\gamma\sigma(\xi)]}, \quad x_0 = m - \frac{2\sigma(\xi)}{\gamma}. \quad (19)$$

2. Вычислить распределения суммарного размера убытков $P5_\xi \approx G(\xi - x_0; \alpha; \beta)$, где функция $G(\xi - x_0; \alpha; \beta)$ вычисляется с помощью функции нормального закона распределения, используя аппроксимацию, полученную в [2]:

$$G(s - x_0; \alpha; \beta) \approx \Phi(\sqrt{4\beta(\xi - x_0)} - \sqrt{4\alpha - 1}; 0; 1), \quad (20)$$

где функция $\Phi(\sqrt{4\beta(\xi - x_0)} - \sqrt{4\alpha - 1}; 0; 1)$ вычисляется по формулам (15).

5 Описание вычислительного эксперимента

Вычислим распределения суммарного размера убытков ячейки $S^{(i,j)}$, группы ячеек $S^{(i)}$ и в целом по совокупности S для совокупности рисков по виду страхования "КАСКО" одной из страховых компаний Самарского региона, используя асимптотические методы на основе нормального и трехпараметрического законов распределения. Совокупность рисков по фактору ν разбита на $I = 6$ групп. Минимальную стоимость контракта D примем равной 200 тыс. усл. ед. Тогда при $J = 10$ размер контрактов варьируется от 200 тыс. руб. до 2000 тыс. руб. Количество контрактов, соответствующие параметрам $\nu^{(i)}$ и $Y^{(j)}$ для различных значений i и j приведены в таблице 1.

Таблица 1: Двухфакторная совокупность рисков

<i>I/J</i>	1	2	3	4	5
0,16	50	29	11	3	4
0,46	677	1256	590	213	149
0,52	485	1460	915	388	252
0,51	387	1497	1169	639	378
0,48	347	860	680	320	230
0,39	892	970	718	460	243
<i>I/J</i>	6	7	8	9	10
0,16	4	1	1	1	3
0,46	49	26	25	23	23
0,52	118	57	36	31	57
0,51	181	68	37	44	73
0,48	72	39	25	15	30
0,39	157	89	40	17	47

Для приведенной совокупности рисков рассчитаны распределения для каждой ячейки, группы ячеек и совокупности в целом. Приведем графики функции и плотности распределения для совокупности рисков в целом.

Совпадение графиков функций и плотности распределения при $S_{max} = 1\,037\,400$ усл. ед., $\gamma = 0,01$ подтверждают одинаковые значения математического ожидания $m = 197571,83$, среднеквадратического отклонения $\sigma = 2006,43$ и коэффициента вариации $V = 1,02$.

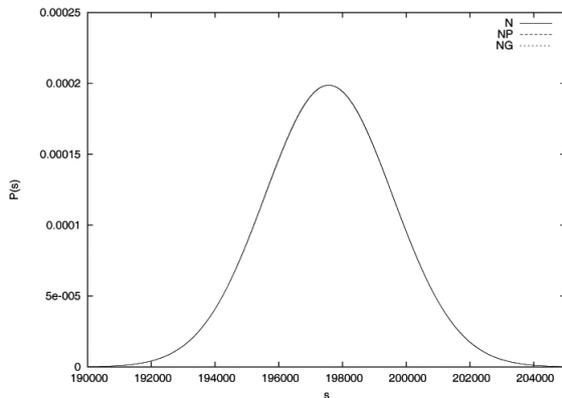


Рис. 1: Плотность распределения суммарного размера убытков двухфакторной совокупности рисков

Лица, принимающие решения по управлению портфелем, как правило, предпочитают получать информацию о риске в виде величины реальных денежных потерь, а не в форме стандартного отклонения. Используя полученные распределения, можно рассчитать средства под риском (S_q), под которыми понимается выраженная в денежных единицах оценка ожидаемых в течение данного периода времени с данной вероятностью потерь совокупности рисков под воздействием различных факторов. Кроме того, средства под риском можно использовать для проверки соответствия функция распределения, по-

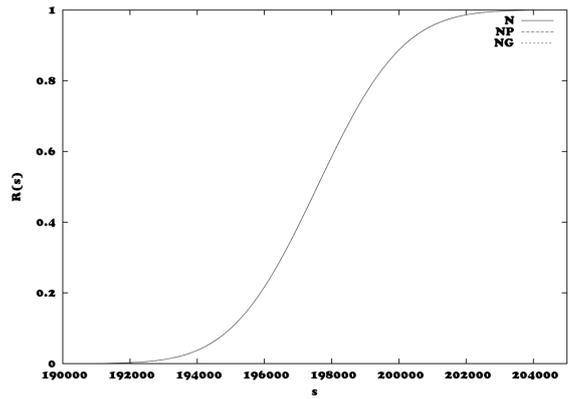


Рис. 2: Функция распределения суммарного размера убытков двухфакторной совокупности рисков

лученных асимптотическими методами нормальному закону распределения.

Квантиль нормального закона распределения уровня q определяются из выражения:

$$\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{S(q) - m}{\sigma}\right) = q$$

$$S(q) = m + \Phi^{-1}\left(q - \frac{1}{2}\right) \cdot \sigma \quad (21)$$

Расчетные значения средств под риском ячейки $S^{(1,1)}$, группы ячеек $S^{(1)}$ и всей совокупности рисков S в целом приведены в таблице 2.

Таблица 2: Средства под риском S_q

метод аппроксимации	S_q
Для ячейки $S^{(1,1)}$	
нормальная	102
нормально-степенная	104
гамма-распределением	103
Для группы ячеек $S^{(1)}$	
нормальная	29 595
нормально-степенная	29 509
гамма-распределением	29 508
Для совокупности рисков S	
нормальная	200 871
нормально-степенная	200 875
гамма-распределением	200 874

Отклонения полученных результатов различными методами от квантилей нормального распределения, вычисленных по формуле (21) представлены в таблице 3.

Как видно из таблицы, численные значения отклонений для ячейки $S^{(1,1)}$ более 50% для $q = 0,99$, при этом $N^{(1,1)} \cdot \nu_1 < 10$. Численные значения отклонений для группы ячеек $S^{(2)}$ и совокупности в целом S практически совпадают. В этом случае $N \cdot \nu > 10$

Таблица 3: Отклонения (в %) средств под риском от квантилей нормального распределения

метод	$q = 0,9$	$q = 0,95$	$q = 0,99$
Для ячейки $S^{(1,1)}$: $N^{(1,1)} \cdot \nu_1 = 8,3, \gamma = 0,29$			
нормальная	16,9787	6,7897	-52,9694
нормально-степенная	15,3508	4,9621	-55,9688
гамма-распределением	16,1647	5,8759	-54,4691
Для группы ячеек $S^{(2)}$: $N^{(2)} \cdot \nu_1 = 17,76, \gamma = 0,02$			
нормальная	0,9217	0,3141	-1,5776
нормально-степенная	0,9197	0,3121	-1,5796
гамма-распределением	0,9202	0,3126	-1,5791
Для совокупности рисков S : $N^{(2)} \cdot \nu = 8376,6, \gamma = 0,01$			
метод	$q = 0,9$	$q = 0,95$	$q = 0,99$
нормальная	1,8937	0,4516	-4,4340
нормально-степенная	2,1788	0,7409	-4,1305
гамма-распределением	2,1821	0,7442	-4,1270

Таким образом, полученные результаты позволяют отметить зависимость применяемой аппроксимации от произведения количества контрактов на вероятность наступления убытков в ячейке, группе ячеек или совокупности в целом, а также от коэффициента асимметрии.

Заключение

В данной работе асимптотическими методами получены распределения суммарного размера убытков для совокупности рисков по виду страхования "КАС-КО". Анализ полученных распределений рассматриваемой совокупности рисков для каждой ячейки, группы ячеек и совокупности в целом позволяет сделать следующие выводы:

1. Для значений количества убытков, которое в произведении с вероятностью наступления убытков по ячейке, группе ячеек или в целом по совокупности рисков больше 10, нет необходимости в применении точных методов расчета функций распределения суммарного размера убытков, т.к. результаты, полученные в работе совпадают с результатами, полученными точными методами de Pril и Panjer в [4].
2. В случае, когда $N \cdot \nu > 10$ анализ реальных данных по совокупности рисков с учетом коэффициента асимметрии предполагает, что нормальная аппроксимация оптимальна, если $0 < \gamma < 1$. Нормально-степенную и аппроксимация трехпараметрическим гамма-распределением рекомендуется использовать при $\gamma > 1$.
3. Установлено, что когда $N \cdot \nu > 10$, то для заданной вероятности q средства под риском в ячейках, группах ячеек и в целом по совокупно-

сти рисков, рассчитанные по рассмотренным аппроксимациям совпадают с квантилем нормального распределения уровня $q\%$.

4. На практике, полученные значения средств под риском можно использовать для оптимизации совокупности рисков.

Список литературы

- [1] Справочник по специальным функциям под ред. М. Абрамовица. Наука, Москва, 1979.
- [2] Ж. Дэнэ М. Денут. Р.Каас, М. Гувертс. Современная актуарная теория риска / Перевод с английского А.А. Новоселова под редакцией В.К. Малиновского. 2007.
- [3] М. Кендалл, А. Стьюарт. . *Теория распределений. Т.1*. Наука, Москва, 1966.
- [4] Е.В. Михайлова, М.А. Авряскина. Рекуррентные методы построения кумулятивных функций риска. *Вторая международная конференция: Математическая физика и ее приложения: труды*, Самара. Изд-во Книга (под ред. проф. Ю. Н. Радаева):239–241, 2010.
- [5] А.И. Кобзарь. *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников*. Физматлит, 2006.
- [6] Г. Крамер. *Математические методы статистики*. Мир, Москва, 1975.
- [7] Севастьянов Б.А. *Курс теории вероятностей и математической статистики*. Наука Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1982.

Эвентологический подход к задаче кластеризации разнотипных данных

Екатерина Сергеевна Моисейченко

Сибирский Федеральный Университет
Институт математики
Красноярск
katerinamois@yandex.ru

Аннотация. Данная статья посвящена кластерному анализу. Рассматриваются основные цели и задачи кластерного анализа. Приводится нейросетевой метод кластеризации — самоорганизующиеся карты Кохонена. Предлагается аналог алгоритма Кохонена, использующий аппарат эвентологии и метод двудольных множеств случайных событий. В работе решается практическая задача кластеризации марок растворимого кофе на основе предпочтений потребителей. Задача кластеризации решается двумя способами: с помощью классического алгоритма самоорганизующихся карт и с помощью разработанного аналога алгоритма самоорганизующихся карт Кохонена.

Ключевые слова. Кластеризация, нейронные сети, самоорганизующиеся карты Кохонена, алгоритм Кохонена, двудольное множество случайных событий.

1 Введение

Определение 35. Кластерный анализ — обобщенное название целого ряда методов, используемых для разбиения объектов, событий или индивидов на однородные в соответствующем понимании группы (называемые кластерами), так чтобы каждый кластер состоял из схожих объектов, а объекты из разных кластеров существенно различались[4].

Определение 36. Кластер — группа элементов, характеризующихся общим свойством.

Спектр применений кластерного анализа очень широк: его используют в менеджменте, маркетинге, психологии, медицине и других областях деятельности. Кластеризация является одним из наиболее успешно развивающихся разделов современной теоретической информатики.

Большое достоинство кластерного анализа в том, что он позволяет производить разбиение объектов не по одному параметру, а по целому набору признаков. Кроме того, кластерный анализ в отличие от большинства математико-статистических методов не накладывает никаких ограничений на вид рассматриваемых объектов, и позволяет рассматривать множество исходных данных практически произвольной природы.

К числу основных задач, выполняемых кластерным анализом, относятся:

- разработка типологии или классификации;
- создание полезных концептуальных схем группирования объектов;
- порождение гипотез на основе исследования данных;
- проверка гипотез или проведение исследования для определения, действительно ли выделенные группы присутствуют в имеющихся данных.

Перечислим основные этапы проведения кластерного анализа:

1. отбор выборки для кластеризации;
2. определение множества переменных, по которым будут оцениваться объекты в выборке;
3. вычисление значений той или иной меры сходства между объектами;
4. применение метода кластерного анализа для создания групп сходных объектов;
5. проверка достоверности результатов решения.

Постановка задачи кластерного анализа в общем виде выглядит следующим образом:

Пусть X — множество объектов, Y — множество номеров (имен) кластеров. Задана функция расстояния между объектами $p(x_1, x_2)$. Имеется конечная обучающая выборка объектов $X^m = x_1, \dots, x_m \subset X$. Требуется разбить выборку на непересекающиеся подмножества (кластеры), так чтобы каждый кластер состоял из объектов, близких по метрике p , а объекты разных кластеров существенно отличались. При этом каждому объекту $x_i \in X^m$ приписывается номер кластера y_i .

Любой алгоритм кластеризации представляет собой функцию $a: X \rightarrow Y$, которая любому объекту $x \in X$ ставит в соответствие номер кластера $y \in Y$. Множество Y в некоторых случаях известно заранее, однако чаще ставится задача определить оптимальное число

кластеров, с точки зрения того или иного критерия качества кластеризации.

Кластеризация (обучение без учителя) отличается от классификации (обучения с учителем) тем, что метки исходных объектов y_i изначально не заданы, и даже может быть неизвестно само множество Y .

2 Нейронные сети

Основной недостаток методов анализа многомерных данных заключается в том, что при понижении размерности данных происходит потеря информации. Кроме того, общие методы кластеризации не способствуют визуализации данных. Поэтому в настоящее время широкое развитие получил метод нейронных сетей, позволяющий устранить указанные недостатки.

Определение 37. *Нейронные сети — самообучающиеся системы, имитирующие деятельность человеческого мозга.*

Нейронные сети состоят из большого числа связанных между собой однотипных элементов — нейронов, которые имитируют нейроны головного мозга. Существует два класса нейронных сетей: сети, обучаемые с учителем и без учителя.

Определение 38. *Нейронные сети, обучаемые с учителем, представляют собой средство для извлечения из набора данных информации о взаимосвязях между входами и выходами сети[1].*

Определение 39. *Нейронные сети, обучаемые без учителя, служат средством для решения задачи классификации, организации и визуального представления больших объемов данных[1].*

3 Классический алгоритм самоорганизующихся карт

Одним из классов нейронных сетей являются самоорганизующиеся карты Кохонена (SOM — Self-Organizing Map) [6]. Особенностью SOM является то, что метод не требует никаких априорных предположений о распределении данных. Алгоритм SOM основывается на соревновательном обучении без учителя. Он обеспечивает сохраняющее топологию отображение из пространства большей размерности в элементы карты. Элементы карты, или нейроны, обычно образуют двумерную решетку. Таким образом, это отображение является отображением пространства большей размерности на плоскость. Свойство сохранения топологии означает, что SOM распределяет сходные векторы входных данных по нейронам, т.е. точки, расположенные в пространстве входов близко друг к другу, отображаются на близко расположенные элементы SOM. Таким образом, SOM может служить как средством кластеризации, так и средством

визуального представления данных большой размерности.

Каждый нейрон в алгоритме SOM представляет собой n -мерный вектор-столбец весовых коэффициентов $m_i = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, n определяется размерностью исходного пространства. Нейроны образуют сеть прямоугольного, гексагонального или регулярного вида. Величина взаимодействия нейронов определяется расстоянием между нейронами на карте.

Алгоритм обучения:

1. Инициализация. Перед началом обучения нейронной сети необходимо проинициализировать весовые коэффициенты нейронов. Обычно весам присваиваются малые случайные величины;
2. На все входы сети подается случайно выбранный один из векторов исходных данных;
3. Вычисляется расстояние от данного вектора до каждого нейрона, используя евклидово расстояние: $d_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t) - m_{ij}(t))^2}$, где x_i — i -я компонента входного вектора, m_{ij} — i -я компонента j -го нейрона;
4. Выбор нейрона j^* с наименьшим расстоянием d_j ;
5. Настройка весов нейрона j^* и его соседних нейронов. Для модификации весовых коэффициентов используется формула $m_i(t+1) = m_i(t) + h_j^*(d, t)\alpha(t)(x_i(t) - m_{ij}(t))$, где t — номер итерации. Функция $h_j^*(d, t)$ называется функцией соседства нейронов, она представляет собой невозрастающую функцию от времени и расстояния между нейроном j^* и соседними нейронами в сетке. Обычно применяется функция Гаусса $h_j^*(d, t) = e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2(t)}}$, или более простая $h_j^* = 1$, если $j^* \in \sigma(t)$, $h_j^* = 0$, иначе. $\sigma(t)$ — убывающая функция. Эту величину называют радиусом обучения, который выбирается достаточно большим вначале и постепенно уменьшается так, что в итоге остается один нейрон j^* . Функция $\alpha(t)$ называется функцией скорости обучения. Она представляет собой убывающую функцию, обычно в качестве функции скорости используется линейная функция. Модификация весов приводит к тому, что нейрон j^* и нейроны соседние смещаются в сетке в направлении вектора данных;
6. Возвращение к шагу 2. Алгоритм выполняется до тех пор, пока не выполнится заданное количество итераций или другой критерий остановки.

4 Описание статистики

Решим задачу кластеризации марок растворимого кофе на основе предпочтений потребителей. Решение

задачи основывается на реальной статистике, полученной в результате опроса потребителей растворимого кофе из 8 регионов Российской Федерации. Исследование проводилось в 2004–2008 гг. Заказчика исследования интересовали предпочтения как продавцов кофе (розничных и мелкооптовых), так и непосредственно потребителей. Итак, по заданию одной из торговых фирм были изучены предпочтения покупателей и мелкооптовых продавцов растворимого кофе. Совместно с представителями заказчика был составлен опросный лист (анкета). Опрос проводился в форме интервью с 1400 покупателями кофе. Анкета состояла из 10 основных вопросов и 3 дополнительных, посвященных социально-демографической информации о покупателе. Первые 6 основных вопросов позволяли уточнить частоту потребления кофе покупателем, частоту покупок кофе, места приобретения продукта, список марок растворимого кофе, с которыми знаком потребитель, а также основные характеристики продукта, которые являются наиболее ценными для потребителя.

57% опрошенных составили женщины, а 43% — мужчины. Как показали результаты опроса, 13% респондентов пьют кофе иногда, 20% — 1 чашку в день, 47% респондентов — 2–3 чашки кофе в день, остальные — больше 3 чашек в день. Было выявлено, что самыми популярными торговыми точками для покупки кофе являются супермаркеты и продовольственные магазины — их выбирают соответственно 40 и 38% потребителей. Около 26% респондентов приобретают кофе на рынках. По 2% опрошенных потребителей покупают напиток в киосках (ларьках) и в специализированных магазинах.

Следующие 4 показателя позволяли оценить характеристики каждой марки кофе:

- Вкус кофе;
- Аромат кофе;
- Консистенция кофе;
- Привлекательность марки кофе.

Именно эти показатели использовались для решения задачи кластеризации. Вкус, аромат и консистенция каждой марки кофе оценивались каждым потребителем по шкале от 1 до 10 (наихудшее и наилучшее значения, соответственно). Последний показатель является множественным. Привлекательность марки оценивалась с помощью следующих параметров: известность брэнда/производителя, привлекательная цена, положительный опыт употребления данной марки продукта, удобный вес упаковки, привлекательный (оригинальный) дизайн упаковки. Каждому покупателю предлагалось указать параметры, влияющие на привлекательность данной марки (предлагалось выбрать любое множество вариантов из 5 предложенных).

Как видно из описания статистики каждая марка кофе характеризуется разнотипными данными — числовыми и множественными. Метод самоорганизующихся карт не умеет работать с нечисловыми данными, поэтому предлагается разработанный аналог алгоритма Кохонена, использующий аппарат эвентологии [5] и метод двудольных множеств событий [3].

5 Метод двудольных множеств случайных событий

В ситуации, когда поведение каждого элемента сложной системы характеризуется данными, одна часть которых является числовой, а другая часть — множественной, объект, порождающий данную двудольную статистику, может быть представлен как объединение двух долей. Первая доля — это случайные величины ξ , вторая — случайные множества событий K . Пусть A — множество индексов случайных величин, B — множество индексов случайных множеств. Тогда множество случайных величин $\xi = \{\xi_a, a \in A\}$, а множество случайных множеств $K = \{K_\beta, \beta \in B\}$.

Определение 40. Множество случайных элементов $\{\xi, K\}$, представимое в виде объединения двух этих долей, будем называть двудольным множеством случайных элементов. Двудольное множество случайных элементов представимо в следующем виде:

$$\{\xi, K\} = \xi \cup K = \{\xi_a, a \in A, K_\beta, \beta \in B\}.$$

И. В. Барановой в [3] было предложено двудольному множеству случайных элементов $\{\xi, K\}$ поставить в соответствие двудольное множество случайных событий:

$$\{\xi, K\} \Rightarrow \{Y, X\}.$$

Определение 41. Двудольное множество случайных событий представляет собой объединение двух множеств — множества событий, которое определяется случайными величинами, и множества событий, которое определяется случайными множествами событий:

$$\{Y, X\} = \{Y_\alpha, X_\beta, \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

В работе [3] было предложено использовать в качестве расстояния между двудольными множествами событий вероятность сет-операции симметрической разности по Минковскому между ними. Сет-операция симметрической разности по Минковскому между двумя двудольными множествами событий s^1 и s^2 имеет вид:

$$s1(\Delta)s2 = \left\{ Y_a^1(r_a)\Delta Y_a^2(r_a), X_\beta^1\Delta X_\beta^2, X_\beta \subseteq X_\beta, r_a \in \mathcal{R}_a, a \in A, \beta \in B \right\}. \tag{1}$$

Вероятность симметрической разности равна

$$\mathbf{P}(s^1(\Delta)s^2) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^1(r_a)\Delta \mathcal{Y}_a^2(r_a)) + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^1 \Delta X_\beta^2). \quad (2)$$

6 Алгоритм самоорганизующихся карт для двудольных множеств случайных событий

Построим аналог алгоритма самоорганизующихся карт, на основе описанный выше метода двудольных множеств случайных событий.

Пусть имеется сложная система, которая состоит из n элементов. Каждый элемент характеризуется показателями, одни из которых являются числовыми, а другие — множественными. Тогда, согласно методу двудольных множеств событий, поведение каждого i -го элемента системы можно охарактеризовать двудольным множеством событий $\{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\}$. Всей сложной системе ставится в соответствие множество

$$S = \left\{ s^1 = \{ \mathcal{Y}_a^1, \mathfrak{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B \}, \dots, s^n = \{ \mathcal{Y}_a^n, \mathfrak{X}_\beta^n, a \in A, \beta \in B \} \right\}.$$

Поведение каждого двудольного множества $s \in S$ характеризуется его распределением вероятностей событий:

$$p(s) = p(\mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta) = p(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{a \in A} \{ \mathcal{Y}_a(r_a) \} \bigcap_{x_\beta \in X} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X^c} x_\beta^c, a \in A, \beta \in B \right), \quad (3)$$

$$x \in \mathfrak{X}', x_\beta \in \mathfrak{X}, \beta \in B, \mathbf{X}$$

$$\mathbf{r} = \{ r_a, r_a \in \mathbb{R} \},$$

$$\mathbf{X} = \{ X_\beta, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta \}.$$

Каждый нейрон также представим в виде двудольного множества случайных событий $m^i = (\mu_a^i, \mu_\beta^i) = \{ \mathcal{Y}_a^i, \mathfrak{X}_\beta^i, a \in A, \beta \in B \}$, $i = 1, \dots, m$, где μ_a^i — весовые коэффициенты, соответствующие числовой доле \mathcal{Y}_a^i , μ_β^i — весовые коэффициенты, соответствующие множественной доле \mathfrak{X}_β^i .

Алгоритм обучения:

1. Инициализация весовых коэффициентов нейронов случайными значениями, близкими к начальным данным;
2. На все входы подается случайно выбранный один из векторов исходных данных;

3. Вычисляется расстояние от данного вектора до каждого нейрона по формуле вероятности сет-операции симметрической разности по Минковскому между двумя двудольными множествами событий

$$\mathbf{P}(s(t)(\Delta)m^i(t)) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in \mathcal{R}_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a(r_a)(\Delta)\mathcal{Y}_a^i(r_a)) + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta(\Delta)X_\beta^i)$$

4. Выбирается нейрон m^c с наименьшим расстоянием;
5. Производится корректировка весов нейрона m^c и его соседних нейронов по формуле $m^i(t+1) = m^i(t) + \alpha(t)(s(t) - m^i(t))$, если i принадлежит $N_c(t)$
 $m^i(t+1) = m^i(t)$, если i не принадлежит $N_c(t)$
 $N_c(t)$ — окрестность победившего нейрона m^c . Ее значение уменьшается с ростом t . $0 < \alpha(t) < 1$ — фактор скорости обучения, он уменьшается с ростом t . Здесь t — итерации алгоритма.

7 Результаты

В результате кластеризации марок кофе по числовым показателям с помощью классического алгоритма самоорганизующихся карт, получили следующие результаты, представленные на рис. 1 и в таблице 1.

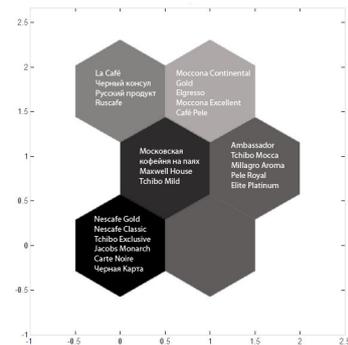


Рис. 1: Самоорганизующаяся карта для 22 марок кофе.

На рис. 1 изображена самоорганизующаяся карта, полученная в результате кластеризации марок кофе. Нейроны, окрашенные темным оттенком серого, соответствуют наибольшим значениям показателей, светлым оттенком серого — наименьшим. В таблице 1 приведены результаты кластеризации. Кластеры расположены в порядке убывания значений показателей.

№кластера	Наименование марок
1 кластер	Nescafe Gold, Nescafe Classic, Tchibo Exclusive, Jacobs Monarch, Carte Noire, Черная карта
2 кластер	Московская кофейня на паях, Maxwell House, Tchibo Mild
3 кластер	Ambassador, Tchibo Мосса, Millagro Aroma, Pele Royal, Elite Platinum
4 кластер	La Cafe, Черный консул, Русский продукт, Ruscafe
5 кластер	Moccona Continental Gold, Elgrosso, Moccona Excellent, Cafe Pele

Таблица 1: Результат кластеризации 22 марок кофе по числовым показателям.

В результате кластеризации марок кофе по числовым и множественному показателям, получили следующие результаты, представленные на рис. 2 и в таблице 2.

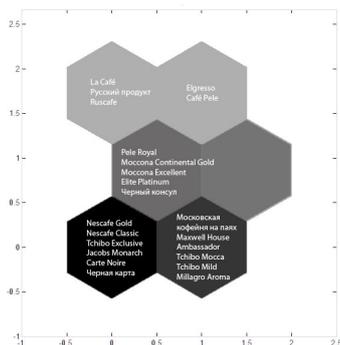


Рис. 2: Самоорганизующаяся карта для 22 марок кофе.

Сравнивая результаты, полученные классическим методом самоорганизующихся карт Кохонена и разработанным аналогом, можно заметить, что первый класс, соответствующий наибольшим значениям показателей и в том и другом случае состоит из тех же марок кофе. Однако в других классах есть различия. Например, марки Tchibo Мосса и Tchibo Mild в первом случае принадлежат разным классам, а в другом случае принадлежат одному и тому же классу. Так как эти марки принадлежат одному бренду Tchibo, то на результат повлияли значения множественного показателя как, например, известность бренда. Марки Moccona Continental Gold и Moccona Excellent в случае использования классического алгоритма Кохонена принадлежат пятому классу с наименьшими значениями показателей, в случае использования аналога алгоритма принадлежат третьему классу.

№кластера	Наименование марок
1 кластер	Nescafe Gold, Nescafe Classic, Tchibo Exclusive, Jacobs Monarch, Carte Noire, Черная карта
2 кластер	Московская кофейня на паях, Maxwell House, Ambassador, Tchibo Мосса, Tchibo Mild, Millagro Aroma
3 кластер	Pele Royal, Moccona Continental Gold, Moccona Excellent, Elite Platinum, Черный консул
4 кластер	La Cafe, Русский продукт, Ruscafe
5 кластер	Elgrosso, Cafe Pele

Таблица 2: Результат кластеризации 22 марок кофе по числовым и множественному показателям.

Список литературы

- [1] Г. Дебок Т. Кохонен. *Анализ финансовых данных с помощью самоорганизующихся карт / Пер. с англ.* Издательский дом.
- [2] В. Г. Потемкин В. С. Медведев. *Нейронные сети. MATLAB 6.* Диалог-Мифи, М., 2002.
- [3] О. Ю. Воробьев И. В. Баранова. *Метод двумерных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем.* Ин-т естеств. и гуманитарн. наук, Красноярск, 2007.
- [4] И. Д. Мандель. *Кластерный анализ.* Финансы и статистика, М., 1988.
- [5] О. Ю. Воробьев. *Эвентология.* Сиб. фед. ун-т, Красноярск, 2007.
- [6] Т. Кохонен. *Самоорганизующиеся карты.* Бином. Лаборатория знаний, М., 2008.

Метод имитационного моделирования в России и за рубежом: текущее состояние и основные направления развития

Леонид Иосифович Мошкович

Институт управления бизнес-процессами и экономики
ФГОУ ВПО Сибирский федеральный университет
leo-mosh@yandex.ru

Ольга Ивановна Бабина

Институт управления бизнес-процессами и экономики
ФГОУ ВПО Сибирский федеральный университет
babina62@yahoo.com

Аннотация. В статье анализируются вопросы текущего развития метода имитационного моделирования в России и за рубежом, а также рассматриваются основные направления будущего развития метода в целом.

Ключевые слова. Имитационное моделирование, модель, метод имитационного моделирования, компьютерный эксперимент.

1 Введение

Метод имитационного моделирования является общепризнанным методом исследования сложных динамических систем. Он широко применяется в различных областях науки, бизнеса и производства.

В данной статье анализируются вопросы текущего развития метода имитационного моделирования в России и за рубежом, выявляются основные направления развития метода. К основным направлениям будущего развития можно отнести объектно-ориентированные системы имитационного моделирования, встроенное имитационное моделирование, приложения, поддерживающие оптимизацию, модули задач планирования ресурсов на предприятии, эмуляция, тренажёры и web-приложения.

2 Развитие метода имитационного моделирования в России и за рубежом

Имитационные модели широко применялись в практической деятельности страны ещё в 1960-1980-е годы [3]. В тот период с помощью имитационных моделей решались многие практические задачи на уровне регионов, отраслей и отдельных предприятий. Однако после периода бурного развития имитационного моделирования с конца 1980-х и в 1990-е годы наступил период, когда школа имитационного моделирования в России практически не развивалась. Это привело к утрате связей между научными коллективами и отдельными учеными, прекращению активной деятельности многими из них, нарушению преемственности поколений, приостановке или прекращению ряда перспективных разработок» [6, 354]. Однако мировая наука в области имитационного моделирования последние десятилетия не стояла на месте: за рубежом регулярно проводились конференции по имитационному моделированию, оно все шире внедрялось в практику управления промышленным предприятием, разрабатывались и внедрялись в

производство новые системы имитационного моделирования. Об активности этого направления в странах западной Европы и США свидетельствует регулярность конференций (например, Winter Simulation Conference, Summer Computer Simulation Conference, Spring Simulation Multiconference, INFORMS Annual Meeting, International System Dynamics Conference и др.), симпозиумов (например, Communications and Networking Simulation Symposium, Symposium on Theory of Modeling and Simulation, Military Modeling and Simulation Symposium и др.), конгрессов (EUROSIM Congress и др.), увеличивающееся число публикаций, международных исследовательских проектов и сообществ имитационного моделирования (The Society of Modeling and Simulation International, Federal European Simulation Societies и многие др.), множество специализированных научных журналов («Simulation», «Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International», «International Journal of Simulation and Process Modeling» и др.). Кроме того, имитационные модели в западных странах являются обязательными в комплекте документов при проектировании нового или модернизации существующего производства [5].

К сожалению, в России, в отличие от США и Европы, широкое использование имитационного моделирования в экономических исследованиях прикладного направления пока не наблюдается. В то же время многие специалисты в области имитационного моделирования в России признают, что за последнее десятилетие произошли определенные изменения в сторону улучшения ситуации [1]. Отдельные негосударственные предприятия стали активнее использовать метод имитационного моделирования.

Основные отрасли промышленности, в которых сегодня применяется метод имитационного моделирования в России, – это легкая промышленность, электроника, судостроение, стройматериалы, пищевая промышленность и металлургия. Большинство используемых моделей обычно включают детальные модели производства для анализа «узких мест» и загрузки оборудования, комплексного управления логистическими процессами, выбора стратегии управления запасами, анализа финансово-экономического состояния предприятия, оперативного и календарного планирования [2].

Кроме того, постоянно увеличивается академическое применение имитационного моделирования, повышается

объём и уровень проводимых исследований. Это позволяет говорить о положительных тенденциях развития имитационного моделирования в России.

3 Основные направления развития имитационного моделирования

Анализ работ по имитационному моделированию на Winter Simulation Conference [7, 8, 9, 10] показал, что основными направлениями развития имитационного моделирования являются: объектно-ориентированные системы имитационного моделирования, встроенное имитационное моделирование, приложения, поддерживающие оптимизацию, модули задач планирования ресурсов на предприятии, эмуляция, тренажёры и web-приложения.

Объектно-ориентированные системы имитационного моделирования

Объектно-ориентированный подход значительно упрощает разработчикам программного обеспечения процесс программирования. Основная задача современных объектно-ориентированных систем имитационного моделирования состоит в том, чтобы использовать мощные возможности объектно-ориентированного подхода и имитационного моделирования и сделать их доступными и понятными для непрограммистов, которые знают проблемы и принципы функционирования существующих систем в деталях. Все системы имитационного моделирования в будущем будут использовать технологии объектно-ориентированного программирования при анализе реальных систем, причём пользовательский интерфейс станет в меньшей степени ориентирован на объектно-ориентированное программирование и в большей степени будет соответствовать всем категориям проблем, которые вероятнее всего интересуют пользователя.

Встроенное имитационное моделирование

Встроенное имитационное моделирование – это программы, «зашитые» в системы управления предприятием (например, системы типа ERP) с возможностью проведения имитационных экспериментов. Оно должно увеличить доступность использования имитационных моделей. Ключевым компонентом успеха будет время отклика модели. Имитационное моделирование уже сейчас пользуется успехом как встроенное приложение. В приложениях реального времени имитационные модели будут предоставлять результаты почти сразу.

Приложения, поддерживающие оптимизацию

Оптимизация на основе метода имитационного моделирования заключается в совместном использовании имитационной модели сложной системы и алгоритма оптимизации. С помощью имитационной модели

рассчитываются значения основных выходных показателей системы для различных комбинаций входных переменных, которые предлагает алгоритм оптимизации. Примерами пакетов оптимизации для имитационного моделирования являются AutoStat, AutoSimulations, OptQuest Optimization, OPTIMIZ, SimRunner2 и WITNESS Optimizer. В большинстве пакетов оптимизации в качестве процедур поиска решений используются эволюционные и генетические алгоритмы [4].

Модули задач планирования ресурсов на предприятии

В процессе имитационного моделирования производственных систем требуется значительное количество данных, которые обычно доступны в системах ERP. Прямой интерфейс к этим системам доступен уже сегодня и будет всё более функциональным. Управление финансовыми данными с помощью этих систем обеспечит возможность прямой поддержки принятия решений, которые превосходят существующие техники стратегического планирования. В сочетании с другими техниками имитационное моделирование будет развиваться с возможностью создавать детализированное расписание в интегрированных средах.

Эмуляция

Эмуляция – имитация работы одной системы средствами другой без потери функциональных возможностей и искажений результатов. Она позволяет уберечь дорогостоящее оборудование, технологическую оснастку от возможных повреждений, сократить затраты на разработку управляющих программ для производства, а также значительно повысить его производительность. Эмуляция выполняется с помощью программных и/или аппаратных средств. Примерами программных средств для эмуляции являются ModelSim, UltraLogic32 и VERICUT. ModelSim – базовая программно-аппаратной эмуляции в области автоматизации средств проектирования и верификации аналого-цифровых СБИС Mentor Graphics. UltraLogic32 – система разработки программного обеспечения сбора данных и управления для промышленных контроллеров. VERICUT – программный комплекс разработки управляющих программ для металлообрабатывающего производства.

Тренажёры

Тренажёры – это эффективное средство для обучения работе системой в доступном и реалистичном режиме, а также, что немаловажно, – в безопасных условиях. Они служат для повышения квалификации и проверки навыков работы в реалистичной системе с помощью имитационной модели.

Web-приложения

Интернет меняет всё пространство информационных технологий, и имитационное моделирование не является исключением. Интернет будет играть важную роль при построении и просмотре (дистанционном использовании) имитационных моделей. В будущем предприятия будут получать базу знаний своей системы, процессов и продукции через Интернет. Процессы будут определены в терминах анимационной имитационной модели, которая может быть выполнена пользователем. Основные Web-приложения имитационного моделирования: JSIM, Forio Simulate, PowerSim и The Vanguard System.

4 Выводы

Сравнивая ситуацию развития метода имитационного моделирования в России и на Западе следует заметить, что российская школа имитационного моделирования в значительной мере ещё отстает от западной. Однако за последние десять лет произошли существенные изменения в сторону улучшения ситуации: оно стало активнее использоваться в учебной и научно-исследовательской деятельности многих высших учебных заведений страны. Возросло количество защищенных диссертаций по имитационному моделированию за последнее десятилетие, увеличивается количество курсов, обучающих студентов различных специальностей основам имитационного моделирования. Однако, если не будут решены проблемы, связанные с внедрением этих разработок в производство, эффект может оказаться минимальным.

Что касается направлений развития метода имитационного моделирования, то очевидно, что данный метод имеет большие перспективы как инструмент анализа процессов планирования и управления на промышленном предприятии. Следует заметить, что его применение не ограничивается только производственными системами: новые сферы и области его применения постоянно расширяются и являются объектом новых исследований.

Литература

- [1] Борщев А. Применение имитационного моделирования в России – состояние на 2007 г. // Бизнес-информатика. 2008. № 4. С. 64–68.
- [2] Карпов Ю.Г. Изучение современных парадигм имитационного моделирования в среде AnyLogic // Компьютерные инструменты в образовании. 2008. № 4. С. 3–14.
- [3] Кобелев Н.Б. Основы экономического моделирования сложных экономических систем. М.: Дело, 2003. 336 с.
- [4] Лоу А.М., Кельтон В.Д. Имитационное моделирование. В Серии «Классика Computer

science», 3-е издание. Санкт-Петербург: ПИТЕР, 2004. 846 с.

- [5] Рыжиков Ю.И. Аналитический обзор // Имитационное моделирование. Теория и практика: сборник 2-й Всероссийской научно-практической конференции по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности. Санкт-Петербург. 2005. С. 1–14.
- [6] Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технология. СПб: КОРОНА принт. М.: Альтекс – А, 2004. 384 с.
- [7] Banks J. The future of simulation software: a panel discussion. Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference. 1998. P. 1681–1687.
- [8] Banks J., Hagan J.C., Lendermann P., McLean C., Page E.H., Pegden C.D., Ulgen O., Wilson J.R. The future of the simulation industry // Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference. 2003. P. 2033–2043.
- [9] Banks J., Panel Chair. Simulation in the future. Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference. 2000. P. 1568–1576.
- [10] Barton R.R. Panel: simulation – past, present and future. Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference. 2003. P. 2044–2050.

Об эмпирическом байесовском оценивании по неполным данным

Аъзам Латифханович Муминов

Национальный Университет Узбекистана,

Ташкент,

muminov.azam@mail.ru

Аннотация. В модели конкурирующих рисков рассматриваются эмпирические байесовские оценки экспоненциальных функционалов.

Ключевые слова. Байесовские оценивание, кумулятивная функция интенсивности, модель конкурирующих рисков.

Пусть задана случайная величина (с.в.) $Z : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (R, \mathcal{B})$ с непрерывной функцией распределения (ф.р.) $H(t) = P(Z \leq t)$, $t \in R$. На (R, \mathcal{B}) определим непрерывные вероятностные меры $\{Q^{(i)}(B) = P(Z \in B; A^{(i)}), B \in \mathcal{B}, i \in J\}$, где $A^{(i)}$ - попарно несовместные события, образующие разбиение пространства элементарных исходов Ω и $i \in J = \{1, \dots, k\}$. Следует отметить, что $\forall B \in \mathcal{B} : Q^{(1)}(B) + \dots + Q^{(k)}(B) = Q(B) = P(\omega : Z(\omega) \in B)$. На (R, \mathcal{B}) также рассматриваются неотрицательные, непрерывные и конечно-аддитивные меры $\{\alpha^{(i)}(\cdot), i \in J\}$ и $\alpha(\cdot)$ - их сумму: $\forall B \in \mathcal{B} \alpha(B) = \alpha^{(1)}(B) + \dots + \alpha^{(k)}(B)$. Через $\mathcal{D}(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)})$ обозначим распределение Дирихле с параметром $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)})$. Следуя [1,2], распределение Дирихле используем в качестве априорного для вектора $(Q^{(1)}, \dots, Q^{(k)})$, предполагаемым случайным вектор-процессом на (R, \mathcal{B}) . Тогда субраспределения $H(t; i) = P(Z \leq t, A^{(i)})$, $(t; i) \in R \times J$ являются непрерывным с.в. с соответствующими априорными бета-распределениями

$$\left\{ \text{Be}(\alpha^{(i)}(t); \alpha(R) - \alpha^{(i)}(t)), (t; i) \in R \times J \right\},$$

где $\alpha^{(i)}(t) = \alpha^{(i)}((-\infty; t])$. В рассматриваемой модели конкурирующих рисков (МКР) с точки зрения байесовского подхода интерес представляют совместные свойства случайных пар $\{(Z; A^{(i)}), i \in J\}$ и задача состоит в оценивании функционалов от кумулятивных функции интенсивности (КФИ)

$$\Lambda(t; i) = \int_{(-\infty; t]} \frac{dH(u; i)}{1 - H(u)}, (t; i) \in R \times J \quad (1)$$

или функционалов экспоненциального типа

$$F(t; i) = 1 - \exp(-\Lambda(t; i)), (t; i) \in R \times J, \quad (2)$$

по независимой повторной выборке $S^{(n)} = \{(Z_j; \delta_j^{(1)}, \dots, \delta_j^{(k)}), j = 1, \dots, n\}$, где $\delta_j^{(i)} = I(A_j^{(i)})$ индикатор и $\{(Z_j; A_j^{(1)}, \dots, A_j^{(k)}), j \geq 1\}$ - последовательность независимых копий совокупности $(Z; A^{(1)}, \dots, A^{(k)})$.

Автором [1,2] исследованы следующие оценки для КФИ, получаемые методом подстановки байесовских оценок $H_n^\alpha(u)$ и $H_n^\alpha(u; i)$ в формулу (1):

$$\Lambda_n^\alpha(t; i) = \int_{(-\infty; t]} \frac{dH_n^\alpha(u; i)}{1 - H_n^\alpha(u)}, (t; i) \in R \times J.$$

Здесь

$$H_n^\alpha(t; i) = q_n H_0(t; i) + (1 - q_n) H_n(t; i)$$

и

$$\begin{aligned} H_n^\alpha(t) &= H_n^\alpha(t; 1) + \dots + H_n^\alpha(t; k) = \\ &= q_n H_0(t) + (1 - q_n) H_n(t), \end{aligned}$$

где

$$q_n = \frac{\alpha(R)}{\alpha(R) + n}, \quad H_0(t; i) = \frac{\alpha^{(i)}(t)}{\alpha(R)}, \quad H_0(t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(R)},$$

$$H_n(t; i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(Z_k \leq t; \delta_k^{(i)} = 1), \quad H_n(t) = \sum_{k=1}^n H_0(t; i).$$

При помощи этих байесовских оценок в [1] построены и исследованы асимптотические свойства оценок функционалов (2) следующих трёх типов :

$$\begin{aligned} F_{1n}^\alpha(t; i) &= 1 - \exp(-\Lambda_n^\alpha(t; i)), \\ F_{2n}^\alpha(t; i) &= 1 - \prod_{u \leq t} (1 - (-\Lambda_n^\alpha(u; i)) - (-\Lambda_n^\alpha(u-; i))), \end{aligned} \quad (3)$$

$$F_{3n}^\alpha(t; i) = 1 - (1 - H_n^\alpha(t))^{R_n^\alpha(t; i)},$$

и показана их асимптотическая эквивалентность, где

$$R_n^\alpha(t; i) = \Lambda_n^\alpha(t; i) \left[\sum_{i=1}^k \Lambda_n^\alpha(t; i) \right]^{-1}, (t; i) \in R \times J.$$

Для оценок (3) в [1] установлены свойства типа закона повторного логарифма и результаты аппроксимации

одной и той же последовательностью гауссовских процессов.

Авторами [3] показано, что байесовская оценка

$$F_{4n}^{\alpha}(t; i) = 1 - \left(1 - H_n^{\alpha}(t)\right) \times \left[\prod_{j=1}^n \frac{1 - H_n^{\alpha}(Z_j) + \frac{1}{n + \alpha(R)}}{1 - H_n^{\alpha}(Z_j)} \right]^{\beta_j^{(i)}(t)}, \quad (4)$$

где $\beta_j^{(i)}(t) = (1 - \delta_j^{(i)})I(Z_j \leq t)$, также является близкой к оценкам (3).

В работе [4] исследованы аналоги оценок (3), когда меры $\alpha^{(i)}(t) = \alpha^{(i)}(t, \theta^{(i)})$, $i \in J$ заданы с точностью до некоторого неизвестного параметра $\theta^{(i)} \in \Theta^{(i)} \subseteq R$, которую также необходимо оценить. Кроме этого приведён пример выбора мер $\alpha^{(i)}(t, \theta^{(i)})$. В работе обсуждаются дальнейшие свойства всех этих оценок.

Литература

- [1] Абдушукуров А.А., Статистика неполных наблюдений. // *Ташкент. Университет*. 2009. с.299
- [2] Абдушукуров А.А., Байесовское оценивание биометрических характеристик по неполным данным // *Уз. М. Ж.*, 1993, №.1, с.12-21 №.4, с. 13-21
- [3] Абдушукуров А.А., Муминов А.Л. О свойствах близости непараметрических оценок по неполным данным. // *Доклады АНРУз* 2007. №6, с. 6-11.
- [4] Абдушукуров А.А., Муминов А.Л. Эмпирическое оценивание в модели конкурирующих рисков // *Статистические методы оценивания и проверки гипотез*. Пермь. 2008 Выпуск 21 с. 79-87.

Оценивания смеси двумерных функций выживания на плоскости при случайном цензурировании справа

Рустамжон Собитхонович Мурадов
 Национальный Университет Узбекистана, Ташкент
 r_muradov1985@rambler.ru

Аннотация. В данной работе рассмотрим задачу оценивания смеси двумерных функций выживания на плоскости при случайном цензурировании справа.

Ключевые слова. Эмпирическая функция, копула функции, архимедовы копулы, случайное цензурирование, смесь функций выживания.

1. Введение

На вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) рассмотрим пару последовательностей из l независимых двумерных случайных векторов

$$\left\{ \mathbb{X}^{(j)} = \left[\left(X_{1i}^{(j)}, X_{2i}^{(j)} \right), i \geq 1 \right], j = 1, \dots, l \right\},$$

$$\left\{ \mathbb{Y}^{(j)} = \left[\left(Y_{1i}^{(j)}, Y_{2i}^{(j)} \right), i \geq 1 \right], j = 1, \dots, l \right\}, \quad (1)$$

с общими функциями выживания

$$F^{(j)}(x, y) = P\left(X_{11}^{(j)} > x, X_{21}^{(j)} > y\right),$$

$$G^{(j)}(x, y) = P\left(Y_{11}^{(j)} > x, Y_{21}^{(j)} > y\right),$$

$j = 1, \dots, l; (x, y) \in R^{+2}$. При этом обе последовательности (1) могут быть и зависимыми. Пусть элементы последовательности $\mathbb{X}^{(j)}$ цензурируются справа соответствующими элементами последовательности $\mathbb{Y}^{(j)}$ и в n -м шаге эксперимента наблюдаются l повторных выборок (см.[1])

$$\left\{ \mathbb{V}_n^{(j)} = \left[\left(Z_i^{(j)}, \delta_i^{(j)} \right), i = 1, \dots, n \right], j = 1, \dots, l \right\},$$

где $Z_i^{(j)} = \left(Z_{1i}^{(j)}, Z_{2i}^{(j)} \right)$, $Z_{mi}^{(j)} = \min\left(X_{mi}^{(j)}, Y_{mi}^{(j)}\right)$,
 $\delta_i^{(j)} = \left(\delta_{1i}^{(j)}, \delta_{2i}^{(j)} \right)$, $\delta_{mi}^{(j)} = I\left(Z_{mi}^{(j)} = X_{mi}^{(j)}\right)$,
 $m = 1, 2; j = 1, \dots, l$. Рассмотрим смесь функций выживания

$$F(x, y; \theta) = \sum_{j=1}^l \theta_j F^{(j)}(x, y), (x, y) \in R^{+2}, \quad (2)$$

где веса $\{\theta_j, j = 1, \dots, l\}$ являются неизвестными параметрами и образуют распределение вероятностей некоторой дискретной случайной величин (с.в.) ν со множеством значений $\{1, \dots, l\}$:

$$\theta_j = P(\nu = j) > 0, j = 1, \dots, l; \sum_{j=1}^l \theta_j = 1.$$

При этом с.в. ν не зависит от последовательностей (1). Задача состоит в оценивании смеси (2) по объединённой выборке

$$\mathbb{V}^{(n)} = \left\{ \mathbb{V}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{V}_n^{(l)}; \nu_1, \dots, \nu_n \right\}$$

при мешающих параметрах $\left\{ G^{(1)}, \dots, G^{(l)}; \theta_1, \dots, \theta_l \right\}$,

где ν_i наблюдение с.в. ν в i -м эксперименте. Параметр $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_l)$ оценим эмпирической статистикой $\theta_n = (\theta_{1n}, \dots, \theta_{ln})$, где

$$\theta_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\nu_i = j) = N_n(j+1) - N_n(j),$$

$j = 1, \dots, l$. Здесь $N_n(t)$ - эмпирическая функция распределения, соответствующая функции распределения $N(t) = P(\nu \leq t)$ и $N_n(l+1) = 1$. Задача заключается в оценивании смеси (2).

2. Основные результаты

Для построения оценок смеси двумерных функций выживания используем архимедовы копулы (см. [2]).

Рассмотрим следующую оценку для $F^{(j)}$:

$$F_n^{(j)}(x, y) = \varphi_j^{-1} \left[\varphi_j \left(S_{1n}^X(x; j) \right) + \varphi_j \left(S_{2n}^X(y; j) \right) \right], \quad (3)$$

где $S_{mn}^X(x; j)$, $m = 1, 2; j = 1, \dots, l$ - оценки одномерных функций выживания

$S_m^X(x; j) = P(X_m^{(j)} > x), m = 1, 2$ из [3] и φ - копула генератор:

$$S_{mn}^X(x) = \varphi^{[-1]} \left[\varphi(S_{mn}^Z(x)) \frac{\varphi(\tilde{S}_{mn}^X(x))}{\varphi(\tilde{S}_{mn}^Z(x))} \right], m = 1, 2,$$

где

$$\varphi(S_{mn}^Z(x)) = -\int_0^x I(\mathbb{J}_{mn}(t) > 0) \left[\varphi\left(\frac{\mathbb{J}_{mn}(t)}{n}\right) - \varphi\left(\frac{\mathbb{J}_{mn}(t)}{n} - \frac{1}{n}\right) \right] d\bar{\mathbb{N}}_{mn}^Z(t),$$

$$\varphi(\tilde{S}_{mn}^Z(x)) = -\int_0^x I(\mathbb{J}_{mn}(t) > 0) \varphi'\left(\frac{\mathbb{J}_{mn}(t)}{n}\right) d\bar{\mathbb{N}}_{mn}^Z(t),$$

$$\varphi(\tilde{S}_{mn}^X(x)) = -\int_0^x I(\mathbb{J}_{mn}(t) > 0) \varphi'\left(\frac{\mathbb{J}_{mn}(t)}{n}\right) d\bar{\mathbb{N}}_{mn}^Z(t).$$

Оценку для смеси двумерных функций выживания (2) построим как

$$F_n(x, y; \theta_n) = \sum_{j=1}^l \theta_{jn} F_n^{(j)}(x, y), (x, y) \in \bar{R}^{+2}. \quad (4)$$

Справедливо утверждение о состоятельности оценок (4).

Пусть $Q = [0, T_1] \times [0, T_2]$, где

$$T_m = \min \{T_m(j), j = 1, \dots, l\}$$

и

$$T_m(j) = \sup \left\{ x \geq 0 : S_m^Z(x; j) = P(Z_m^{(j)} > x) > 0 \right\},$$

$$m = 1, 2; j = 1, \dots, l.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (C1)-(C3) из [3]. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{(x,y) \in Q} \left| F_n(x, y; \theta_n) - F(x, y; \theta) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Литература

- [1] Абдушукуров А.А. *Оценки неизвестных распределений по неполным наблюдениям и их свойства.* – LAP LAMBERT Academic Publishing. 2011, 308 с.

- [2] Nelsen R.B. *An introduction to copulas.* – Springer, New York. Second edition 2006. -269 p.

- [3] Мурадов Р.С., Абдушукуров А.А. *Оценивание многомерных распределений и их смесей по неполным данным.* – LAP LAMBERT Academic Publishing. 2011, 123 с.

О применениях многотипных ветвящихся процессов к решению некоторых актуарных задач

Аброр Ахбарович Мухитдинов

ООО "Actuarial Service Bureau"

Ташкент

mukhitdinov@asb.uz

Аннотация. В работе предложены подходы по оценке ряда основных показателей демографического развития, таких как стационарного возрастного/территориального распределения населения, показателей темпа роста численности населения и т.п. и изучению их свойств, а также функционалов от траектории процесса, описывающие различные модели актуарного финансирования страховых схем, с использованием многотипных ветвящихся процессов.

Ключевые слова. Многотипные ветвящиеся процессы, функционалы от траектории процесса, показатели демографического развития, актуарное финансирование страховых схем.

1 Введение

Рассмотрим классический процесс Гальтона-Ватсона с n типами частиц

$$\mathbf{Z}^{(r)}(t) = (Z^{(r)}_1(t), \dots, Z^{(r)}_n(t)), t=0, 1, 2, \dots$$

где $\mathbf{Z}^{(r)}(0) = \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$. Под частицами типа i будем понимать индивидуумы, возраст которых находится в интервале $(i-1, i]$. Каждая частица типа i , $i=1, \dots, n$ за единицу времени погибает и порождает с вероятностью l_{i+1}/l_i (l_i – показатель из таблицы смертности) одну частицу типа $i+1$, а также, если тип i принадлежит интервалу возрастов воспроизводства, порождает случайное количество ξ^i частиц первого типа. Под интервалом воспроизводства понимается множество типов $\{K, K+1, \dots, M\}$, где $1 < K \leq M < n$. Здесь мы для упрощения не различаем пол индивидуума, хотя можно за счет увеличения количества типов частиц, учесть не только пол, но и региональную принадлежность, трудоспособность, например, если есть необходимость при построении модели учесть миграцию.

Тогда, матрица средних процесса $A = [a^i_j]$ будет иметь достаточно простой вид, все элементы матрицы, кроме элементов a^i_{i+1} , $i=1, \dots, n-1$ и a^k_k , $k=K, K+1, \dots, M$, $1 < K \leq M < n$, будут равны нулю, а ненулевые элементы, в большинстве практических задач, будут меньше единицы.

Пусть ρ перронов корень матрицы средних, а $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$ и $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, соответственно, правый и левый

собственные векторы матрицы A , соответствующие перронову корню. Все элементы собственных векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} неотрицательные, и могут быть подобраны так, что

$$|\mathbf{v}| = \sum_{k=1}^n v_k = 1, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n u^k v_k = 1.$$

Перронов корень играет роль показателя темпа роста численности населения, а вектор \mathbf{v} является предельным распределением населения по возрастам.

2 Основные результаты

В [1], [2], [3] получены предельные распределения оценок

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = \left(\frac{Z_i^{(r)}(t)}{|Z^{(r)}(t)|}, i = 1 \div n \right),$$

$$\tilde{\rho}(t) = \left(\frac{Z_i^{(r)}(t+1)}{Z_i^{(r)}(t) + 1}, i = 1 \div n \right)$$

при различных предположениях изменения параметров $t, (\mathbf{u}, \mathbf{r}) \rightarrow \infty$. Также доказаны предельные теоремы для совместного распределения

$$(\alpha_i, \mathbf{Z}^{(r)}(t)), i = 1 \div (n-1),$$

где α_i – определенные базисные вектора подпространства, ортогонального вектору \mathbf{v} . Из этих результатов, как следствие, можно получить результаты [4], [5], где доказаны предельные теоремы для функционала от ветвящегося процесса вида

$$(\alpha, \mathbf{Z}^{(r)}(t)), \text{ где } (\alpha, \mathbf{v}) = 0 \text{ (уравнение баланса).}$$

Данный функционал интересен тем, что он описывает поведение простейших схем социального страхования с нулевыми резервами, т.е. страховые взносы, собранные с определенного круга индивидуумов (например, трудоспособного возраста) в год, выплачиваются в тот же год получателям (например, лицам пенсионного возраста), т.е., если $\alpha_i \geq 0$, то это означает, что каждая частица типа i оплачивает страховой взнос величины α_i , а если $\alpha_j \leq 0$, то каждая частица типа j получает страховую выплату величины $-\alpha_j$. Можно выписать и другие, более сложные функционалы от траектории процесса, описывающие различные схемы актуарного

финансирования страховых схем и изучить их свойства, методами анализа ветвящихся процессов.

Литература

- [1] И. С. Бадалбаев, А. Мухитдинов. О предельных распределениях некоторых функционалов в многотипных ветвящихся процессах. *Теория вероятностей и ее применения*, 35 (4):642–654, 1990.
- [2] И. С. Бадалбаев, А. Мухитдинов. Предельные теоремы для некоторых функционалов в критических многотипных ветвящихся процессах. *Теория вероятностей и ее применения*, 34 (4):753–757, 1989.
- [3] И. С. Бадалбаев, А. А. Мухитдинов. *Статистические задачи многотипных ветвящихся процессов*. Фан, Ташкент, 1990.
- [4] H. Kesten, B. P. Stigum. Additional limit theorems for indecomposable multidimensional Galton-Watson processes. *Ann. Math. Statist*, 37 (6):1463–1481, 1966.
- [5] K. Athreya, P. Ney. Functionals of critical multitype branching processes. *Ann. Probab.*, 2 (2): 339–343, 1974.

Нечеткие меры и нечеткие интегралы

**Яков Викторович
Нартов**

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
yanartov1@gmail.com

**Дарья Владиславовна
Семенова**

Сибирский Федеральный Университет
Институт математики
Красноярск
dariasdv@aport2000.ru

**Марина Игоревна
Рыбникова**

Сибирский федеральный университет
Красноярск
smeiky@yandex.ru

Аннотация. В работе приведены базовые понятия теории нечетких мер и теории нечеткого интегрирования. Подробно рассмотрены нечеткие интегралы, которые нашли наибольшее применение. А также разобрано приложение с теории принятия решений с использованием нечеткого интеграла Сугено.

Ключевые слова. Нечеткие меры, нечеткие интегралы, интеграл Сугено, интеграл Шоке, процесс субъективного оценивания.

1 Введение

Традиционно для решения аналитических задач в условиях неопределенности применялись вероятностно-статистические методы. Однако, как показывала практика, использование только данных методов ограничивается некоторыми обстоятельствами: необходимостью учета факторов неопределенности, как, например, субъективные оценки, необходимостью учета большого объема противоречивой и разнородной информации и т.д. Не учет этих ограничений приводит к неадекватным, заведомо неприемлемым решениям. В силу этого в трудах исследователей Заде [6], Лукасевича, Ягера, Сугено и многих других была обоснована необходимость использования математических подходов к моделированию и обработке нечетких данных на основе экспертных оценок и нечетких множеств. Одним из подходов для решения практических задач в условиях неопределенности может быть подход, основанный на теории нечетких мер [3].

1.1 Определение нечеткой меры

Говоря о нечетких мерах, необходимо вспомнить что есть мера вообще. Итак,

Определение 42. Мерой называется функция множества $m : P(X) \rightarrow \mathfrak{R}$, удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

1. $A \subseteq X \Rightarrow m(A) \geq 0$;
2. $m(\emptyset) = 0$;
3. $A, B \in P(X)$ и $A \cap B = \emptyset$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$,

где $P(X)$ – множество всех подмножеств X , \mathfrak{R} – множество действительных чисел.

Можно заметить, что при $\mathfrak{R} = [0, 1]$ мера m – вероятностная мера.

Нечеткая мера может рассматриваться как обобщение понятия вероятностной меры, свободное от ряда ограничений.

Пусть X – произвольное множество, β – поле борелевских множеств (σ -алгебра)

Определение 43. Функция $g : \beta \rightarrow [0, 1]$ называется нечеткой (неаддитивной) мерой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $g(\emptyset) = 0; g(X) = 1$ (Ограниченность);
2. если $A, B \subseteq \beta$ и $A \subseteq B$, то $g(A) \leq g(B)$ (Монотонность);
- 3.¹ если $F_i \in \beta$ и $\{F_i\}_{i=0}^{\infty}$ – монотонная последовательность множеств (возрастающая или убывающая), то $\lim_{i \rightarrow \infty} g(F_i) = g(\lim_{i \rightarrow \infty} F_i)$. (Непрерывность).

В этом случае тройка (X, β, g) называется пространством с нечеткой мерой [1]. Понятие нечеткой меры является в некотором смысле обобщением понятия меры, так как оно свободно от условия аддитивности:

$$g(A \cup B) \neq g(A) + g(B), \text{ где } A, B \subseteq \beta, A \cap B = \emptyset.$$

Отсюда следует, что сумма

$$m(A) + m(\bar{A}) \text{ не обязательно равна } 1,$$

где $A \subseteq X$.

Здесь надо отметить, что класс нечетких мер гораздо шире класса вероятностных мер. Давайте рассмотрим простой случай. Пусть задано $X = \{x, x^c\}$ и σ -алгебра $\beta = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x^c\}\}$. В таком случае в осях $(g(\{x\}) - g(\{x^c\}))$ значения нечеткой меры могут быть заданы в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ (Рис. 1), в то время как значения вероятностной меры только на прямой $g(\{x\}) + g(\{x^c\}) = 1$.

В рамках теории нечеткой меры можно выделить два направления: теория возможностей [2] и теория свидетельств Демпстера-Шафера [10, 5].

¹Следует отметить, что в общем случае от нечеткой меры не требуется выполнение непрерывности.

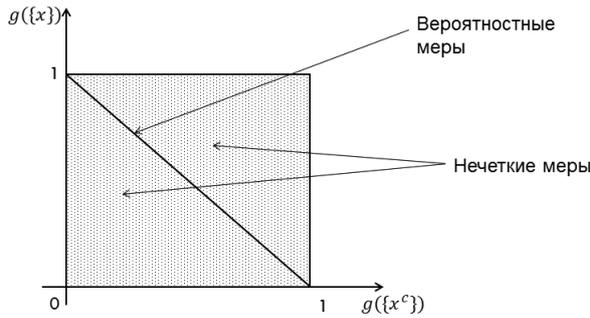


Рис. 1: Графическое представление классов нечетких и вероятностных мер на пространстве $(X = \{x, x^c\}, \beta = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x^c\}\})$.

2 Нечеткие интегралы

Нам понадобится следующее определение.

Определение 44. Функция $f(x)$, определенная на некотором пространстве X с заданной на нем мерой, называется простой, если она измерима и принимает не более чем счетное число значений.

В дальнейшем, простые функции будем обозначать как $f(x)$, при этом будет подразумеваться, что она принимает значения:

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots; \quad y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j.$$

Без ограничения общности считаем, что

$$0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots$$

Итак, пусть X — произвольное множество. Обозначим \mathcal{M} — класс нечетких мер на X , а $\mathcal{F} \subseteq \{h : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ — некоторое подмножество множества всех измеримых отображений из X в \mathbb{R} .

Определение 45. Нечетким интегралом называется функционал:

$$I : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Очень часто на практике достаточно рассматривать класс подынтегральных функций $\mathcal{F} = \{h : X \rightarrow [0, 1]\}$. В таком случае, функции h могут рассматриваться как функции принадлежности нечетких подмножеств X . Тогда, интуитивно, значение нечеткого интеграла — «среднее» значение функции принадлежности h .²

Наиболее широкое применение нашли 2 нечетких интеграла — интеграл Шоке [4] и интеграл Сугено [9].

Определение 46. Интеграл Шоке функции $h \in \mathcal{F}_\infty$ по нечеткой мере g определяется:

$$(C) \int h(x) dg = \int_0^\infty g(\{x : h(x) > \alpha\}) d\alpha, \quad (1)$$

²в литературе можно встретить как «нечеткое среднее».

где $\mathcal{F}_\infty = \{h : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+\}$, $g \in \mathcal{M}$.

Для простых функций интеграл Шоке сводится к следующему выражению:

$$(C) \int f(x) dg = \sum_i (y_i - y_{i-1}) g(X_i), \quad (2)$$

где $X_i = \{x : x \in X, g(x) \geq y_i\}$.

Определение 47. Интеграл Сугено функции $h \in \mathcal{F}_1$ по нечеткой мере g определяется:

$$(S) \int h \circ g = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\min(\alpha, g(\{x : h(x) > \alpha\}))\}, \quad (3)$$

где $\mathcal{F}_1 = \{h : X \rightarrow [0, 1]\}$, $g \in \mathcal{M}$.

Для простых функций интеграл Сугено сводится к следующему выражению:

$$(S) \int f \circ g = \max_i \{\min(y_i, g(X_i))\}, \quad (4)$$

где $X_i = \{x : x \in X, g(x) \geq y_i\}$, $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ — композиция функций.

2.1 Интеграл Шоке

В данном подразделе рассматривается более подробно интеграл Шоке для простых функций.

Для начала, давайте вспомним понятие интеграла Лебега и в чем его отличие от интеграла Римана.

Понятие интеграла Римана, известное из элементарного курса анализа, применимо лишь к таким функциям, которые или непрерывны или имеют “не слишком много” точек разрыва. Данная конструкция интеграла становится непригодной для разрывных всюду функций или для функций определенных на абстрактных множествах. Вместе с тем для таких функций имеется весьма совершенное понятие интеграла, введенное Лебегом. Основная ее идея — точки x группируются не по признаку их близости на оси x , а по признаку близости значений функции в этих точках.

Условимся для более ясного понимания в дальнейшем рассматривать только простые функции.

Итак, пусть f — некоторая простая функция, принимающая значения

$$y_1, \dots, y_n, \dots; \quad y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j.$$

Пусть A — некоторое измеримое подмножество X . Естественно определить интеграл от функции f по множеству A равенством:

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n),$$

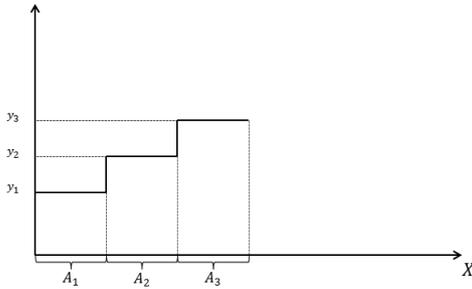


Рис. 2: Простая функция $f(x)$, определенная на абстрактном множестве $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A \subset X$.

где $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$; μ – мера Лебега.

Рассмотрим (рис.1). Здесь мы ограничиваемся случаем $n = 3$. Как известно, в рамках рассматриваемого случая, если пространство X было бы множеством вещественных чисел \mathbb{R} , мы бы имели обычный интеграл Римана функции f . То есть площадь подынтегральной функции.

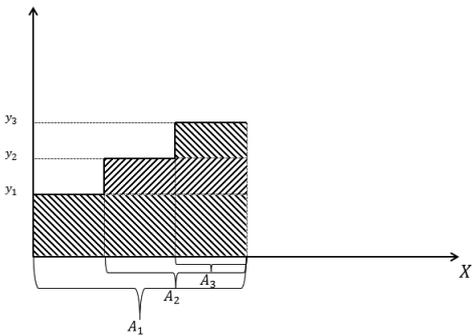


Рис. 3: Простая функция $f(x)$, определенная на абстрактном множестве $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A \subset X$.

А теперь давайте рассмотрим вместо меры Лебега μ емкость Шоке g . И немного по-другому найдем “площадь” подынтегральной функции. Рассматриваем все ту же простую функцию $f(x)$, что и ранее. Определим интеграл Шоке от функции f по множеству A равенством:

$$\int_A f(x)dg = \sum_n (y_n - y_{n-1})g(A_n),$$

где $A_n = \{x : x \in A, \nu(x) \geq y_n\}$

Рассмотрим рисунок (2). В данном случае имеем:

$$\int_A f(x)dg = (y_3 - y_2)g(A_3) + (y_2 - y_1)g(A_2) + (y_1 - 0)g(A_1).$$

2.2 Процесс субъективного оценивания

Рассмотрим задачу субъективного оценивания [1] нечетко описываемых объектов. Пусть объект характеризуется n показателями из множества $\mathfrak{X} =$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Стоит заметить, что множество \mathfrak{X} в общем случае не обязательно должно быть множеством физических показателей, оно может быть множеством мнений, критериев и т.д.

Пусть функция $f : \mathfrak{X} \rightarrow [0, 1]$ – оценка индивидуумом объекта. На практике функция $f(x)$ легко может быть определена объективно или субъективно. Предположим, что нечеткая мера g для $(\mathfrak{X}, 2^{\mathfrak{X}})$ является субъективной мерой, выражающей степень важности показателей из \mathfrak{X} . Надо отметить, что степень важности всего множества \mathfrak{X} равна единице.

Тогда обобщенная оценка рассматриваемого объекта (квартиры) равна

$$e = (S) \int f \circ g \quad (5)$$

– интегралу Сугено от функции f по нечеткой мере g . Уравнение (5) может быть полезно в том случае, когда существует взаимозависимость показателей, что характерно для большинства задач выбора в нечеткой обстановке.

Давайте рассмотрим конкретный пример.

Итак, пусть перед некоторым субъектом стоит задача выбора одной квартиры (с ее последующим приобретением) из множества квартир, предлагаемых на рынке. Рассмотрим задачу определения степени соответствия данной квартиры предпочтениям субъекта. Субъекта интересует 3 показателя его будущего жилища: $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$, где x = «престижность района», y = «цена за квадратный метр», z = «площадь». При этом, самым важным для субъекта показателем является цена квартиры, так как он не обладает достаточно большой суммой для покупки очень дорогой квартиры. Естественное желание субъекта приобрести квартиру с большей жилой площадью. Престижность района для субъекта не столь важна, однако играет свою роль при выборе. Таким образом, $g(\{x\}) = 0.2$, $g(\{y\}) = 0.3$, $g(\{z\}) = 0.4$. Справедливо предположить, что цена квартиры тем выше, чем район, в котором квартира продается, престижнее, иными словами, показатели x и y частично определяют друг друга, имеют прямую зависимость. Поэтому важность для субъекта совокупности этих показателей не выше, чем важность наиболее весомого показателя, то есть y , значит $g(\{x, y\}) = 0.3$. Очевидно, что площадь квартиры никак не зависит от района, в котором она находится, поэтому важность для субъекта совокупности этих параметров существенно выше, чем их важность по отдельности, поэтому $g(\{x, z\}) = 0.6$. На первый взгляд может показаться, что цена никак не зависит от площади квартиры, но на самом деле это не так. Так как ситуация на рынке жилья города проживания субъекта складывается не лучшим образом, то есть жилье достаточно дорогое, большим спросом пользуются

квартиры с меньшей площадью, а значит цена за квадратный метр жилья тем выше, чем меньше общая площадь квартиры. Однако, стоит заметить, что данное явление может и не наблюдаться у некоторых застройщиков, поэтому зависимость параметров y и z не столь сильная (по сравнению с x и y), а значит важность их совокупности для субъекта $g(\{y, z\}) = 0.6$. Согласно граничным условиям, $g(\emptyset) = 0$, $g(\mathfrak{X}) = 1$. Интуитивно, граничные условия понятны – отсутствие информации никакой пользы для субъекта не дает и список всех показателей исчерпывает интересы субъекта (табл. 1).

X	\emptyset	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$
$g(X)$	0	0.2	0.3	0.4

X	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	$\{y, z\}$	$\{x, y, z\}$
$g(X)$	0.3	0.6	0.6	1

Таблица 1: Нечеткая мера в задаче выбора квартиры

Субъект оценивает конкретную квартиру. Надо признать, что рассматриваемая квартира находится достаточно далеко от места работы субъекта и не близко от центра города, поэтому $f(x) = 0.3$. Зато стоимость квадратного метра очень не высокая по сравнению с другими предложениями на рынке, более того, площадь квартиры имени такая, какая требуется для субъекта, поэтому $f(y) = 0.7$ и $f(z) = 0.9$ (табл. 2).

\mathfrak{X}	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$
$f(x)$	0.3	0.7	0.9

Таблица 2: Оценка индивидуума объекта.

Таким образом, вычисляя интеграл Сугено функции f по нечеткой мере g , мы получаем степень того, насколько рассматриваемая квартира субъектом подходит для него. В нашем случае рассматриваемая квартира подходит для субъекта со степенью 0.6:

$$e = (S) \int f \circ g = 0.6$$

Список литературы

- [1] А.Ф.Блишун В.Б.Силов В.Б.Тарасов А.Н.Аверкин, И.З.Батыршин. *Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта*. Москва, Наука, 1986.
- [2] А.Прад Д.Дюбуа. *Теория возможностей*. Радио и связь, 1990.
- [3] В.П.Бочарников. *Fuzzy-технология: математические основы. Практика моделирования в экономике*. Санкт-Петербург, Наука, 2001.
- [4] G.Choquet. *Theory of capacities*. Ann Inst Fourier, 1953.
- [5] G.Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [6] L.A.Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [7] L.A.Zadeh. Probability measure of fuzzy events. *J Math Anal Appl*, 23:421–427, 1968.
- [8] L.A.Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sSets Syst*, 1:3–28, 2000.
- [9] M.Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its application*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technol, 1974.
- [10] Dempster Arthur P. A generalization of bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, 30:205–247, 1968.
- [11] M.Sugeno T.Murofushi. Fuzzy t-conorm integrals with respect to fuzzy measures: Generalization of sugeno integral and choquet integral. *Fuzzy Sets Syst*, 42:57–71, 1991.

К задаче построения стратегий экспериментирования на основе метода предельного перехода

Анатолий Александрович Наумов
Новосибирский государственный технический университет
Новосибирск
a_a_naumov@mail.ru

Аннотация. Предложен и исследован метод построения эффективных стратегий экспериментирования, который основан на искусственном введении в спектр стратегии экспериментирования достаточно большого числа точек спектра плана. Этот переход (предельный переход) является вспомогательным и позволяет упростить задачу поиска точек спектра эффективной стратегии, которые представляют собой точки максимума некоторой функции. Таким образом, метод предельного перехода (МПП) может служить основой алгоритмов поиска эффективных планов экспериментов для многих специальных задач управления экспериментальными исследованиями.

Ключевые слова. Планирование экспериментов, метод предельного перехода, стратегии экспериментирования, алгоритмы.

1 Введение

Рассмотрим уравнение наблюдения за объектом (или системой) вида:

$$y(x) = \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) + \varepsilon(x),$$

где $E(y(x)|x) = \eta(x, \theta) = \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) = \theta^T f(x)$ –

уравнение регрессии, $\varepsilon(x)$ – случайная переменная со свойствами $E(\varepsilon(x)) = 0$ и $E(\varepsilon^2(x)) = \sigma^2, \sigma^2 > 0$ (здесь E – символ математического ожидания), $f^T(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ – базисный вектор регрессии (вектор непрерывных на области экспериментирования X функций, $X \subset R^p$), x – вектор размерности p входных контролируемых переменных изучаемого объекта, $y(x)$ – выходная наблюдаемая переменная объекта, $\theta^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ – вектор неизвестных параметров модели. Пусть наблюдения за объектом производятся в точках x_1, x_2, \dots, x_m (в точках спектра стратегии экспериментирования или плана экспериментов, множества $X_{sp} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$) в количестве n_1, n_2, \dots, n_m наблюдений в каждой из точек спектра соответственно. Положим

$$N = \sum_{i=1}^m n_i,$$

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^m n_i f(x_i) f^T(x_i),$$

$$Y = \sum_{i=1}^m n_i f(x_i) \bar{y}_i, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \right).$$

Тогда в соответствии с обычным методом наименьших квадратов, оценки параметров θ можно найти по формуле:

$$\hat{\theta} = M^{-1}(\xi) Y.$$

Стратегией экспериментирования (СЭ или планом эксперимента) называется набор, состоящий из точек спектра плана и так называемых весов, в соответствии с которыми распределяется общее число экспериментов N по этим точкам:

$$\xi = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ p_1, & p_2, & \dots, & p_m \end{array} \right\},$$

где

$$\xi \in \Xi = \left\{ \begin{array}{l} \xi = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ p_1, & p_2, & \dots, & p_m \end{array} \right\} \Big| x_i \in X, \\ p_i = \left(\frac{n_i}{N} \right) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m p_i = 1 \end{array} \right\}.$$

Суть задачи построения наилучшего (оптимального) плана экспериментов состоит в нахождении на множестве допустимых планов экспериментов Ξ такого, который максимизировал бы (или минимизировал) некоторый функционал от точностной характеристики оценок параметров модели (или оценок самой модели).

Например, если план эксперимента получается в соответствии с решением задачи максимизации некоторого критерия от матрицы $M(\xi)$ (так называемой информационной матрицы Фишера), т.е. максимизируется некоторый критерий от нее $\Phi(M(\xi))$, то соответствующий план называется Φ -оптимальным. Более точно, Φ -оптимальный план получается как

решение следующей оптимизационной задачи (см., например, [1]):

$$\Phi(M(\xi^*)) = \max_{\xi \in \Xi} \Phi(M(\xi)). \quad (1)$$

Часто на практике вместо задачи (1) решают эквивалентную ей задачу:

$$\Phi(M^{-1}(\xi^*)) = \min_{\xi \in \Xi} \Phi(M^{-1}(\xi)). \quad (2)$$

Здесь матрица $M^{-1}(\xi)$ является обратной для матрицы $M(\xi)$ и представляет собой с точностью до некоторой постоянной величины дисперсионную матрицу оценок параметров модели, $\Phi(M^{-1}(\xi))$ – выпуклый вниз на множестве матриц $M^{-1}(\xi)$, $\xi \in \Xi$, функционал. Этот функционал называют также критерием оптимальности (эффективности) планов экспериментов.

Рассмотрим в качестве примера частный случай критерия $\Phi(M^{-1}(\xi))$.

D-оптимальность.

В этом случае для нахождения D-оптимального плана решается задача:

$$\det(M^{-1}(\xi^*)) = \min_{\xi \in \Xi} (\det(M^{-1}(\xi))). \quad (3)$$

Здесь $\det(M^{-1}(\xi))$ – определитель матрицы $M^{-1}(\xi)$, которая, как было отмечено выше, с точностью до множителя σ^2 равна дисперсионной матрице оценок параметров модели регрессии.

Теорема (эквивалентности) [1].

Оптимальный план эксперимента ξ^* , полученный как результат решения задачи (3) и план эксперимента – решение задачи

$$\xi^* = \text{Arg}(\min_{\xi} \max_x \hat{d}_{\eta}(x, \xi)), \quad (4)$$

где $\hat{d}_{\eta}(x, \xi) = \sigma^2 f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)$, совпадают. При этом для оптимального плана ξ^* выполняется равенство:

$$\max_x \hat{d}_{\eta}(x, \xi^*) = \frac{\sigma^2 k}{N}. \quad (5)$$

Сделаем важное замечание. Функция $\hat{d}_{\eta}(x, \xi)$ представляет собой дисперсию оценки модели регрессии. В то же время, эта функция выступает в роли

фундаментальной (основной) функции, которая используется в алгоритмах синтеза D-оптимальных классических ПЭ. Аналогично, в общем случае для задач построения классических Φ -оптимальных планов экспериментов в качестве такой функции выступает функция $\hat{d}(x, \xi)$, имеющая один из следующих видов (см., например, [1]):

– в случае D-оптимального планирования экспериментов, $\det(M^{-1}(\xi))$ (или $\det(\sigma^2 M^{-1}(\xi))$) – вид критерия оптимальности, $\hat{d}(x, \xi) = f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)$ (т.е.

$$\hat{d}(x, \xi) = \frac{1}{\sigma^2} \hat{d}_{\eta}(x, \xi);$$

– в случае A-оптимального планирования, $SpM^{-1}(\xi)$ (или $Sp(\sigma^2 M^{-1}(\xi))$) – критерий оптимальности, $\hat{d}(x, \xi) = f^T(x)M^{-2}(\xi)f(x)$;

– в случае I-оптимального планирования экспериментов,

$$\int_{X_0} f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)p(x)dx$$

(или $\sigma^2 \int_{X_0} f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)p(x)dx$)

$\left(p(x) \geq 0, x \in X_0 \subseteq X, \int_{X_0} p(x)dx = 1 \right)$ – критерий

оптимальности,

$$\hat{d}(x, \xi) = \int_{X_0} (f^T(x)M^{-1}(\xi)f(\tilde{x}))^2 p(\tilde{x})d\tilde{x};$$

– в случае C-оптимального планирования экспериментов, $C^T M^{-1}(\xi)C$ ($C \in M_{(1 \times k)}$ – множество $1 \times k$ матриц)

(или $\sigma^2 C^T M^{-1}(\xi)C$) – критерий оптимальности,

$$\hat{d}(x, \xi) = f^T(x)M^{-1}(\xi) \cdot C \cdot C^T \cdot M^{-1}(\xi)f(x);$$

– в случае G-оптимального планирования,

$$\max_{x \in X} f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)$$

(или $\max_{x \in X} \sigma^2 f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)$) – критерий

оптимальности, $\hat{d}(x, \xi) = f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)$

и т.д.

Везде ниже такие функции для задачи классического планирования экспериментов обозначены как $\hat{d}(x, \xi)$.

Таким образом, для задач D- и G-оптимального классического ПЭ выполняется равенство:

$$\hat{d}_\eta(x, \xi) = \sigma^2 \hat{d}(x, \xi).$$

Отметим, что для других (вышеперечисленных) критериев оптимальности (кроме D- и G- критериев) это равенство не выполняется и функции $\hat{d}_\eta(x, \xi)$ и $\hat{d}(x, \xi)$ – это две различные (не связанные таким простым соотношением) функции. Заметим, что аналогичным образом везде ниже через $\tilde{d}_\eta(x, \xi, y)$ и $\tilde{d}(x, \xi, y)$ будем обозначать дисперсию оценки регрессионной модели и функцию, используемую при синтезе эффективных стратегий управления экспериментом, соответственно. Функции $\tilde{d}(x, \xi, y)$ для различных критериев эффективности Φ (для задач эффективного управления экспериментом) введены в рассмотрение и проанализированы в [2]. Следует отметить, что функции $\hat{d}(x, \xi)$ (в задачах ПЭ при использовании классического подхода) и соответствующие им функции $\tilde{d}(x, \xi, y)$ (в задачах эффективного управления экспериментом) играют важную роль в алгоритмах синтеза классических оптимальных планов и эффективных стратегий управления экспериментами соответственно.

2 Стратегия предельного перехода

Если ввести в рассмотрение стратегию вида (стратегию предельного перехода в виде дискретного ПЭ):

$$\xi' = \begin{Bmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ 1, & 1, & \dots, & 1 \end{Bmatrix}, \quad n_1 = n_2 = \dots = n_m = 1,$$

где m – некоторое большое целое число (в расчетах и в разработанной программе принимается равным нескольким сотням или тысячам), точки спектра плана образуют равномерную сетку на X , то в качестве точек спектра начальной оптимальной стратегии $\xi_{(0)}^*$ могут быть выбраны координаты локальных максимумов функции $\hat{d}(x, \xi') = f^T(x)M^{-1}(\xi')f(x)$ (см. Рис. 1).

Отметим, что использование МПП в этом случае существенно снижает вычислительные затраты, связанные с поиском спектра начальной стратегии $\xi_{(0)}^*$ по сравнению с использованием классических алгоритмов построения оптимальных планов экспериментов [1].

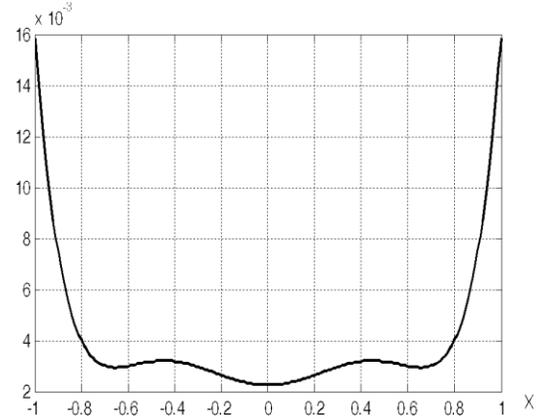


Рис. 1: Вид функции $\hat{d}(x, \xi')$ (критерий D-оптимальности) для модели с базисом $f^T(x) = (1, x, x^2, x^3)$ на $X = [-1.0; 1.0]$.

3 Построение СИ-оптимальной стратегии с использованием МПП

Рассмотрим пример использования МПП. Построим начальную стратегию для СИ-критерия эффективности[2]:

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{O}(M^{-1}(\xi, y)); \hat{O}_{CI}^*) &= \Phi_{\Delta\hat{\theta}}(D(\hat{\theta})) = \\ &= \Phi_{\Delta\hat{\theta}}(M^{-1}(\xi, y)) = \sum_{i=1}^k (\Delta\hat{\theta}_i - \Delta\hat{\theta}_i^*)_+, \end{aligned}$$

учитывающего величину доверительных интервалов оценок параметров $\hat{\theta}_i$.

Пусть $f^T(x) = (1, x, x^2, x^3)$, $X = [-1.0; 1.0]$. Для нахождения спектра начальной стратегии выберем стратегию (для предельного перехода) в виде

$$\xi' = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{Bmatrix} \text{ и положим в ней } m=1000. \text{ В}$$

этом случае функция $\tilde{d}(x, \xi, y)$ (аналог функции $\hat{d}(x, \xi)$) будет иметь вид [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{\Delta\hat{\theta}}(x, \xi, y) &= \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{t \left(\nu, 1 - \frac{\alpha_i}{2} \right)}{2 \sqrt{e_i^T D(\hat{\theta}) e_i \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon^2(x)}} \right) \left(f^T(x) D(\hat{\theta}) e_i \right)_+^2. \end{aligned}$$

В качестве точек спектра оптимальной стратегии могут быть выбраны координаты точек локальных максимумов функции $\hat{d}_{\Delta\hat{\theta}}(x, \xi', y)$. Вид функции $\hat{d}_{\Delta\hat{\theta}}(x, \xi', y)$ (с точностью до константы $const = t \left(v, 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sigma / 2$) показан на Рис. 2. Для этих вычислений была использована программа *Kortanek CI* [2].

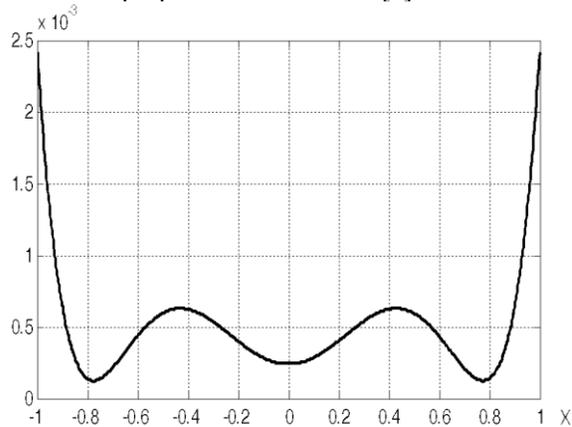


Рис. 2: Функция $\hat{d}_{\Delta\hat{\theta}}(x, \xi', y)$ для модели с базисом $f^T(x) = (1, x, x^2, x^3)$ на отрезке $X = [-1; 1]$ и при использовании стратегии вида ξ' для критерия $\Phi_{\Delta\hat{\theta}}$.

Найдя точки локальных максимумов функции $\hat{d}_{\Delta\hat{\theta}}(x, \xi', y)$, можно построить эффективную стратегию экспериментирования:

$$\xi_{(0), CI}^* = \left\{ \begin{array}{cccc} -1.0 & -0.43 & 0.43 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right\}.$$

Благодарности

Работа поддержана грантом Минобрнауки по проекту ТП-8.536.2011 "Разработка интеллектуальных технологий, средств компьютерного моделирования и эффективных методов оптимизации, как функционального наполнения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений". Автор признателен профессору К. Кортанеку за внимание к данному исследованию. Метод предельного перехода был разработан после ознакомления с работой [3]. Следует отметить, что в этой работе профессора К. Кортанека МПП как метод для нахождения точек спектра стратегий экспериментирования не рассматривался и не предлагался.

Литература

[1] В. В. Федоров. *Теория оптимального эксперимента*. Наука, М., 1971.

[2] А. А. Наумов и В. В. Сенич. *Введение в теорию управления экспериментом*. ОФСЕТ, Новосибирск, 2004.

[3] P. R. Gribik, and K. O. Kortanek. Equivalence Theorems and Cutting Plane Algorithms for a Class of Experimental Design Problems. *SIAM Journal Appl. Math.*, 1 (32): 232–259, 1977.

К оцениванию эффективности социально-экономических кластеров

Анатолий Александрович Наумов

Новосибирский государственный технический университет
Новосибирск
a_a_naumov@mail.ru

Аннотация. В работе предложены новые методы оценивания эффективности социальных проектов, модель которых представлена в виде совокупности взаимосвязанных бизнес-процессов (портфеля бизнес-процессов, кластера). В качестве процессных моделей использованы потоковые модели работ, ресурсов, финансов и т.д., лежащие в основе представления социальных проектов. Множество проектов (планируемых или реализуемых) образует кластер проектов. Эффективность кластера проектов предлагается оценивать с использованием операции компаундирования финансовых потоков проектов.

Ключевые слова. Социальные проекты, экономические проекты, эффективность, кластеры, бизнес-процессы, потоковые модели, моделирование.

1 Введение

Анализ эффективности социальных проектов представляет собой важную как в теоретическом, так и в практическом аспектах задачу (см., например, [1]). С теоретической точки зрения проблема состоит в том, что социальные проекты оценивают как и экономические на основе классических показателей таких, например, как NPV , IRR , PP и многих других [1]. Но, как будет показано ниже, у этих показателей имеется множество недостатков. С другой стороны, специфика социальных проектов такова, что некорректно или неточно оцененная эффективность этих проектов может привести к последствиям социально-экономического характера, которые, как правило, воздействуют как на людей (социум), так и на экономические системы, для которых эти проекты планируется реализовать или реализуются.

Особенностями социальных проектов, которые необходимо учитывать при оценивании их эффективности, являются следующие:

- не всегда очевиден и просто оцениваем финансовый результат таких проектов;
- социальные проекты тесно взаимодействуют с экономическими (инвестиционными) и социальными проектами собственными (внутренними) и окружения (внешними, среды);
- как правило, инструментом для измерения эффекта от социальных проектов служат методики, позволяющие оценивать эффект социально-экономических проектов, причем, экономические проекты могут быть связаны с социальными проектами непосредственно или опосредованно.

Эти особенности накладывают ограничения на используемые модели, методы и методики (в конечном виде – в расчетные формулы и схемы), позволяющие оценивать эффективность социальных проектов. В связи с этим предлагается:

- использовать потоковые модели бизнес-процессов в качестве математического аппарата для описания (формального представления) как социальных, так и экономических проектов;
- использовать теорию кластеров, чтобы показать (отразить) особенности взаимодействия проектов как внутри системы социальных и экономических проектов, так и с их окружением (с проектами среды);
- использовать кластеры (комплексы, взаимодействия, связи) социальных проектов и инвестиционных проектов (и экономических систем) с тем, чтобы выделить эффект социальных проектов в общем (интегрированном для кластера) эффекте;
- оценивать эффективность проектов не с помощью классических показателей, основанных на дисконтировании финансовых потоков (см. [1]), а с помощью методов компаундирования (наращивания) потоков (см. [2]);
- использовать идею выплат (доходов) второго уровня, достигаемых за счет перетока (перераспределения) средств одних проектов в рамках других проектов.

Кластер бизнес-процессов служит удобной моделью для решения задач синтеза, анализа, моделирования, оптимизации проектов и представляет собой интегрированную систему, состоящую из компонентов (бизнес-процессов) различной социальной и экономической направленности. Ниже исследуются модели проектов в виде кластеров бизнес-процессов (БП). Такие модели могут состоять из бизнес-процессов, связанных с различными частями (этапами) проектов в рамках социально-экономических программ: повышения рождаемости, повышения уровня медицинского обслуживания, производства продукции определенного вида, страхования, субсидий и льгот, кредитования, научно-исследовательские программы и многие другие.

Какое отношение может быть установлено между проектами и бизнес-процессами? Поскольку бизнес-процессы – один из языков моделирования социально-экономических систем, то использование бизнес-процессов для моделирования кластера проектов может состоять в следующем:

- некоторый проект разбивается на отдельные достаточно самостоятельные части, каждая из которых представляется (записывается на языке бизнес-процессов) в виде отдельного бизнес-процесса; таким образом, проект формализуется в виде совокупности связанных между собой бизнес-процессов;
- каждый проект записывается в виде отдельного бизнес-процесса; количество используемых в этом случае бизнес-процессов равно числу проектов (внешних и внутренних) в рассматриваемой системе;
- если социальный проект требует только затрат (вложений), а отдача от его реализации отслеживается (проявляется, получается) в экономическом проекте, смежном с социальным, то следует рассматривать два смежных бизнес-процесса (кластер), соответствующих этим проектам.

Таким образом, количество бизнес-процессов задействованных на этапах анализа, оптимизации, моделирования и управления должно быть не меньше числа проектов. Если это условие не выполняется и количество бизнес-процессов меньше числа проектов, то это может привести к тому, что, например, методы анализа не позволят локализовать (идентифицировать) источник возникновения некоторых эффектов (например, не позволят определить принадлежность конкретному проекту или его части области высокой чувствительности в пространстве параметров проектов, отрицательных значений эффектов и эффективности и т.д.). Аналогично тому, как некоторые проекты находятся в окружении собственных (внутренних) и несобственных (окружения, среды, внешних) проектов соответствующие им бизнес-процессы также могут быть отнесены к внутренним или внешним. Конечно, неполное знание значений и характеристик потоков внешних проектов приводит к тому, что для них бизнес-процессы будут отражать только те характеристики этих проектов, которые известны (из общей документации по совместной деятельности с этими процессами или из других источников).

2 Математическая модель проектов

Введем в рассмотрение математическую модель проекта (социального или экономического) в виде совокупности взаимосвязанных бизнес-процессов, на основе которой исследуется поведение кластера проектов, в частности, решается задача оценивания эффективности и нахождения (формирования, построения) наилучшего кластера. Такая модель, например, позволит среди множества возможных вариантов и схем формирования социальных проектов находить лучшие.

Пусть заданы N исходных (базисных, базовых) бизнес-процессов $BP_1(t), BP_2(t), \dots, BP_N(t)$, из которых составим множество вида [2]:

$$BP = \{BP_1(t), BP_2(t), \dots, BP_N(t)\}. \quad (1)$$

Принадлежность бизнес-процесса $BP_i(t)$ множеству BP будем обозначать, как $BP_i(t) \in BP$. В свою очередь внутреннюю структуру произвольного бизнес-процесса $BP_i(t)$, $BP_i(t) \in BP$, определим в виде кортежа

$$BP_i(t) = \langle W_{f,i}(t), R_{f,i}(t), P_{f,i}(t), C_{fin,i}(t), C_{fou,i}(t), t_i, \bar{t}_i, t_{oi}, T_i \rangle, i = 1, 2, \dots, N,$$

где $W_{f,i}(t)$ – вектор потоков работ проекта для $BP_i(t)$; $W_{f,i}(t) = (W_{f,i1}(t), \dots, W_{f,iw}(t))^T$; $t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i]$; $R_{f,i}(t)$ – вектор ресурсов, расходуемых в соответствии с процессом $BP_i(t)$;

$$R_{f,i}(t) = (R_{f,i1}(t), \dots, R_{f,ir}(t))^T; t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i];$$

$C_{fin,i}(t)$ – вектор входных (затратных) финансовых потоков процесса $BP_i(t)$; $t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i]$; $C_{fou,i}(t)$ – вектор выходных (доходных) финансовых потоков для $BP_i(t)$; $t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i]$;

t_i – время подачи команды к инициализации процесса $BP_i(t)$; $t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i]$;

\bar{t}_i – время инициализации процессом $BP_i(t)$ следующего за ним процесса или процессов; t_{oi} – время начала реализации процесса $BP_i(t)$; $t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i]$;

T_i – длительность процесса $BP_i(t)$; $t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i]$;

$P_{f,i}(t)$ – вектор выпущенных (произведенных) продуктов (изделий, товаров, услуг и т.д.) процессом $BP_i(t)$; $t \in [t_{oi}, t_{oi} + T_i]$.

3 Эффективность проектов

Для анализа эффективности проектов и выявления лучших из них, требуется ввести в рассмотрение совокупность показателей, каждый из которых характеризует проект с той или иной точки зрения (и принадлежит к некоторым классам критериев эффективности). Так, например, в качестве критерия эффективности может быть выбрана прибыль от проекта, а показателями могут являться чистая прибыль, общая прибыль, дисконтированное значение прибыли и т.д. Обозначим показатели соответствующих критериев эффективности как Q_1, Q_2, \dots, Q_M .

Оценивать значения показателей проектов будем через их оценивание для моделей проектов в виде бизнес-процессов. Прежде чем оценить значения показателей для бизнес-процессов $BP_j(t), j = 1, 2, \dots, N$, необходимо привести потоки этих процессов к виду, соответствующему тому или иному показателю. Так, например, для расчета показателей NPV , NFV , IRR и других необходимо пересчитать потоки бизнес-процесса $BP_j(t)$ следующим образом:

- 1) входные потоки $R_{ff}(t)$, $C_{finj}(t)$ и поток работ $W_{ff}(t)$ следует пересчитать в обобщенный входной денежный (финансовый) поток бизнес-процесса $S_j(t)$;
- 2) выходные потоки $P_{ff}(t)$, $C_{foutj}(t)$ необходимо пересчитать в обобщенный выходной денежный (финансовый) поток этого бизнес-процесса $P_j(t)$.

После этого, зная точку приведения (пересчета) денежных потоков $S_j(t)$ и $P_j(t)$ бизнес-процесса $BP_j(t), j = 1, 2, \dots, N$, (например, это может быть точка t_{0j} , для показателя NPV , или $(t_{0j} + T_j)$ – для показателя NFV) находим значение показателей по соответствующим формулам или алгоритмам. Заметим, что используемые в расчетных формулах для показателей параметры (ставки дисконтирования, ставки компаундирования, заемные ставки и т.д.) должны «сопровождать» (быть приписаны) соответствующие им потоки и образовывать пары, например, вида $\{C_{finj}(t), r_j^-(t), r_j^+(t)\}$, $\{R_{ff}(t), S_{Rff}(t)\}$ и т.д. Здесь $r_j^-(t)$ – ставка дисконтирования потока $C_{finj}(t)$, $r_j^+(t)$ – ставка компаундирования этого потока, $S_{Rff}(t)$ – стоимость (цена) ресурса $R_{ff}(t)$. Количество параметров, приписываемых тем или иным потокам, зависит от реальной задачи, от используемых для оценивания эффективности проектов критериев эффективности и соответствующих им показателей. Для параметров используем обозначение π с соответствующими потокам индексами, например, $\pi_{cf}(t) = \{r^-(t), r^+(t)\}$, $\pi_{Rf}(t) = \{S_{Rff}(t)\}$ и т.д. Тогда параметризованные потоки можно обозначить как

$$C_{finj}^\pi(t) = C_{finj}(t) \cup \pi_{cf}(t),$$

$$R_{ff}^\pi(t) = R_{ff}(t) \cup \pi_{Rf}(t),$$

а сам параметризованный бизнес-процесс, состоящий из параметризованных потоков, можно обозначить через $BP_j^\pi(t), j = 1, 2, \dots, N$. Аналогично обозначаются

бизнес-процессы, которые являются производными от $BP_j^\pi(t)$, т.е. $\{\widehat{BP}_{si}^\pi(t)\}, \{\overline{BP}_{si}^\pi(t)\}, \{BP_{si}^\pi(t)\},$
 $i = 1, 2, \dots, D$.

Таким образом, прежде чем оценить значения показателей Q_1, Q_2, \dots, Q_M , требуется сначала преобразовать бизнес-процесс в параметризованную форму (если это необходимо), а затем привести к такому виду (преобразовав потоки), что операнды показателей могут быть непосредственно взяты из этого нового вида. Формальный вид этих преобразований может быть представлен следующим образом:

$$BP_j^\pi(t) \xrightarrow{\Psi_{Q_i}} BP_j^{\pi, Q_i}(t), j = 1, 2, \dots, N;$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

(для некоторого показателя Q_i) и

$$BP_j^\pi(t) \xrightarrow{\Psi_{\vec{Q}}} BP_j^{\pi, \vec{Q}}(t), j = 1, 2, \dots, N$$

(для вектора показателей $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_M)^T$).

Отметим то обстоятельство, что классические показатели эффективности (такие, как NPV , IRR , PI , DPP и другие), к сожалению, имеют недостатки, которые делают их малоприменимыми (а иногда бесполезными и даже вредными) для практического использования при оценивании эффективности проектов. Так, например, показатель NPV может вызывать проблемы при решении задач оценивания эффективности проектов из-за следующих своих свойств. Во-первых, процедура выбора ставки дисконтирования представляется достаточно субъективной, а от ее выбора в значительной степени зависит оценка эффективности (или неэффективности) проектов. Во-вторых, значение этого показателя не имеет прозрачного (понятного, ясного) экономического смысла. В-третьих, показатель NPV не учитывает доход, полученный от выходных потоков проектов (так называемый, доход второго уровня). И так далее (см. подробнее в [2]). Поскольку классические показатели IRR , PI , DPP и другие являются производными от показателя NPV , то, как и следовало ожидать, они унаследовали от «родителя» некоторые из недостатков. Например, показатель IRR оценивает верхнюю границу для ставки дисконтирования, ниже которой значение NPV принимает положительные значения, однако, IRR не показывает непосредственно значение доходности проектов. Более подробно с этими и другими проблемами классических показателей можно ознакомиться, например, в [2]. При решении задач оценивания эффективности проектов мы рекомендуем использовать модификации показателя NFV и производных от них, которые снимают многие из

перечисленных выше проблем. В частности, в них могут быть использованы несколько различных ставок (ставка банка по депозитам, ставка банка по заемным средствам, ставка внешнего использования выходных потоков бизнес-процессов и многие другие). Тогда, в отличие от классического показателя IRR , аналогичный показатель, вычисленный на основе модификаций показателя NFV (показатели вида IRR_{NFV}), будет равен доходности проектов.

4 Оценивание эффективности социально-экономических кластеров

Рассмотрим задачу оценивания эффективности кластера проектов в предположении, что составляющие его проекты (и соответствующие им бизнес-процессы) имеют сложные взаимосвязи, что соответствует большинству реальных задач. Заметим, что оценивание эффективности всего кластера в целом по известным входным и выходным потокам этого кластера является задачей сравнительно простой. Решение такой задачи зависит от внутренних связей и перетоков (перераспределений, например, финансовых) между проектами, входящими в кластер, и определяется входными и выходными потоками проектов кластера. Однако, если задача ставится более широко и требуется, например оценить эффективность функционирования каждого из проектов кластера в отдельности, то в этом случае решение задачи существенно усложняется. Сложность решения задачи в таком случае определяется тем, что эффективности частных проектов кластера становятся зависимыми друг от друга в соответствии с их связями в кластере.

Итак, пусть на множестве бизнес-процессов (моделей проектов) $\{BP^{(i)}, i = 1, 2, \dots, p\}$, получено множество связанных общей структурой и потоками бизнес-процессов \widehat{BP}_s (или $\widehat{BP}_s^{clust} = Cluster$), которое соответствует кластеру проектов. Требуется оценить эффективность функционирования как самого кластера \widehat{BP}_s , так и базисных бизнес-процессов (проектов) $\{BP^{(i)}, i = 1, 2, \dots, p\}$. Следует заметить, что в общем случае множество $\{BP^{(i)}, i = 1, 2, \dots, p\}$, является подмножеством множества $BP = \{BP_i, i = 1, 2, \dots, N\}$. В качестве иллюстрации рассмотрим структуру из девяти бизнес-процессов (проектов) (см. Рис. 1).

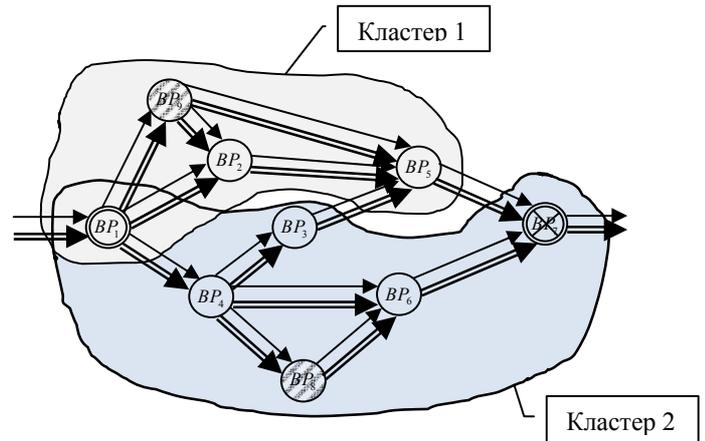


Рис. 1: Структура двух кластеров проектов в виде бизнес-процесса \widehat{BP}_s .

Тогда показатели Q_1 и Q_2 для бизнес-процесса \widehat{BP}_s можно оценить, например, в соответствии со следующими формулами:

$$Q_1 = NFV_{(t)} = \sum_{i=0}^m P(t_i)(1+r_0)^{t_m-t_i} - \sum_{i=0}^m S(t_i)(1+r_1)^{t_m-t_i}, \quad (2)$$

$$Q_2 = IRR_{NFV_{(t)}} = \left\{ r \left| \sum_{i=0}^m S(t_i)(1+r)^{t_m-t_i} = \sum_{i=0}^m P(t_i)(1+r_0)^{t_m-t_i} \right. \right\}. \quad (3)$$

Заметим, что в расчетных формулах (2) и (3) для показателей Q_1 и Q_2 предполагается, что ставки r_0 и r_1 приведены к единице времени, а расчет по заемным средствам C_{fin} происходит в момент времени t_m (в конце жизненного цикла бизнес-процесса \widehat{BP}_s).

Расчетные формулы для Q_1 и Q_2 , рассмотренные выше, не являются единственными и зависят как от особенностей самих проектов, так и от особенностей взаимодействия проектов с внешней средой. Схема бизнес-процесса \widehat{BP}_s (см. Рис. 1) может быть уточнена введением внешних бизнес-процессов, взаимодействующих с процессами $\widehat{BP}_1^{\pi, \bar{Q}}$ и $\widehat{BP}_7^{\pi, \bar{Q}}$ (на Рис. 1 – с процессами BP_1 и BP_7).

Если для оценивания эффективности проектов используются показатели, построенные на базе показателей NFV , IRR_{NFV} и других, то в силу того, что показатели эффективности (и сама эффективность) функционирования частных бизнес-процессов $\widehat{BP}^{(i)\pi, \bar{Q}}$

(или исходных – $BP^{(i)}$ и BP_i) зависят от смежных с ними процессов, то оценивание векторов $\bar{Q}^{(i)}, i=1,2,\dots,p$, представляется разумным начать с конечных бизнес-процессов (на Рис. 1 это процесс BP_7). А уже затем последовательно переходить к начальным процессам (на Рис. 1 это BP_1). При таком движении по структуре можно будет использовать в качестве ставки внешнего использования некоторого бизнес-процесса ставку равную доходности следующего за ним процесса. Такое продвижение по схеме (ориентированному графу) для \widehat{BP}_s позволит учесть эффекты от использования результатов работы предыдущих бизнес-процессов последующими процессами. Если перекрытие обобщенных потоков во времени для смежных бизнес-процессов отсутствует, то и в этом случае возможно увеличение эффективности за счет дохода и доходности второго уровня, но это уже будет зависеть от условий, на которых смежные (и не только) бизнес-процессы обмениваются обобщенными потоками.

5 Моделирование

Рассмотрим иллюстративные примеры.

Пример 1. Пусть в кластер входит только один экономический проект и его потоки (входной и выходной) имеют вид, как это показано в Табл. 1.

Периоды, t_i	0	1	2	3	4	5
Вх. поток, $S(t_i)$	100	120	100	80	90	70
Вых. поток, $P(t_i)$	0	150	150	130	150	150

Таблица 1: Потоки экономического проекта.

Заемные средства возвращаются после 6 временных тактов, в момент времени $t_i = 6$. Оценим доход проекта по формуле

$$Profit_{(l)} = NFV_{(l)} = \sum_{i=0}^m P(t_i)(1+r_0)^{t_m-t_i} - \sum_{i=0}^m S(t_i)(1+r_1)^{t_m-t_i}$$

при $r_0=0.5$ (50%), $r_1=0.2$ (20%). Получим $NFV(l)=444.0300$ ден. ед., при этом

$$SP = \sum_{i=0}^m P(t_i)(1+r_0)^{t_m-t_i} = 1.1888e+003 \text{ ден. ед.,}$$

$$SS = \sum_{i=0}^m S(t_i)(1+r_1)^{t_m-t_i} = 744.7200 \text{ ден. ед.}$$

Оценим доходность проекта по формуле:

$$Profit_{(l)}^{(S \rightarrow P)} = IRR_{NFV_{(l)}} = \left\{ r \left| \sum_{i=0}^m S(t_i)(1+r)^{t_m-t_i} = \sum_{i=0}^m P(t_i)(1+r_0)^{t_m-t_i} \right. \right\}.$$

Получим $IRR_{NFV_{(l)}}=0.4347$ (или 43,47%). С помощью полученного значения доходности экономического проекта $IRR_{NFV_{(l)}}$ можно оценить эффект (вклад) любого из элементов входного потока в интегрированном выходном эффекте проекта SP. Например, можно оценить эффект от 120 ден.ед. вх. потока (период времени 1). Получим $Eff_S1=423.6863$ ден. ед., или в процентах от SP – $Eff_S1_Pr=35.6413\%$ (сравни с $r_1=0.2$ (20%), ставка заемного процента).

Пример 2. Пусть в кластер входят два проекта: один из них является экономическим, а другой – социальным. Потоки этих проектов приведены в Табл. 2.

Найдем эффективность кластера в целом и эффекты от социального и экономического проектов в отдельности. При $r_0=0.5$ (50%), $r_1=0.2$ (20%) получим: $NFV(l)=127.8600$ ден. ед., $SP = 682.5000$ ден. ед. и $SS = 554.6400$ ден. ед. Оценим доходность кластера из двух проектов: $IRR_{NFV_{(l)}}=0.3199$ (или 31.99%). Тогда вклады от каждого из проектов кластера составят: $Eff_SC = 312.7131$ ден. ед. (вклад от социального проекта), или в процентах от SP – $Eff_SC_Pr=45.82\%$ (сравни с $r_1=0.2$ (20%)), $Eff_SE = 369.8056$ ден. ед. (вклад от экономического проекта), или в процентах от SP – $Eff_SE_Pr= 54.18\%$. Нужно заметить, что на практике в таком соотношении экономический проект делиться своим эффектом с социальным проектом не будет. Как это произойдет на практике? Так, что этот вклад будет меньше, чем 45.82 %, возможно, на договорной основе, в соответствии со схемой, которая устроит оба проекта.

Периоды, t_i	0	1	2	3	4	5
Проект 1 (социальный)						
Вх. поток, $S(t_i)$	50	70	0	0	0	0
Вых. поток, $P(t_i)$	0	0	0	0	0	0
Проект 2 (экономический)						
Вх. поток, $S(t_i)$	0	0	100	80	90	70
Вых. поток, $P(t_i)$	0	0	150	130	150	150

Таблица 2: Потоки двух проектов кластера.

Пример 3. Пусть, как и в Примере 2, в кластер входят два проекта: один из них является экономическим, а

другой – социальным. Однако, на этапе проектирования (синтеза, конструирования) кластера в качестве социального проекта могут быть выбраны один из двух альтернативных социальных проектов. Требуется выбрать более эффективный кластер. Потоки этих пар проектов (для кластеров 1 и 2) приведены в Табл. 2 (для кластера 1) и в Табл. 3 (для кластера 2).

Заметим, что общие затраты на социальный и экономический проекты для первого и второго кластеров равны. Кроме этого, равны и суммарные значения выходных потоков этих проектов.

Периоды, t_i	0	1	2	3	4	5
Проект 1 (социальный)						
Вх. поток, $S(t_i)$	80	40	0	0	0	0
Вых. поток, $P(t_i)$	0	0	0	0	0	0
Проект 2 (экономический)						
Вх. поток, $S(t_i)$	0	0	120	60	110	50
Вых. поток, $P(t_i)$	0	0	130	130	150	170

Таблица 3: Потоки двух проектов кластера 2.

Найдем эффективность кластера 2 в целом и эффекты от социального и экономического проектов в отдельности. При $r_0=0.5$ (50%), $r_f=0.2$ (20%) получим: $NFV(I)=47.6920$ ден. ед., $SP=637.5000$ ден. ед. и $SS=589.8080$ ден. ед. Оценим доходность кластера 2 из двух проектов: $IRR_{NFV(I)}=0.2428$ (или 24.28 %). Тогда вклады от каждого из проектов кластера составят: $Eff_SC=267.6340$ ден. ед. (вклад от социального проекта), или в процентах от SP – $Eff_SC_Pr=41.98$ % (сравни с $r_f=0.2$ (20%)), $Eff_SE=369.9142$ ден. ед. (вклад от экономического проекта), или в процентах от SP – $Eff_SE_Pr=58.02$ %.

Благодарности

Работа поддержана грантом Минобрнауки по проекту ТП-8.536.2011 "Разработка интеллектуальных технологий, средств компьютерного моделирования и эффективных методов оптимизации, как функционального наполнения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений".

Литература

- [1] Т. С. Новикова. *Анализ общественной эффективности инвестиционных проектов*. ИЭиОПП СО РАН, Новосибирск, 2005.
- [2] А. А. Наумов и М. А. Максимов. *Управление экономическими системами. Процессный подход*. ОФСЕТ, Новосибирск, 2008.

Управление экономическими системами с возможными рассогласованиями потоков

Анатолий Александрович Наумов

Новосибирский государственный технический университет
Новосибирск
a_a_naumov@mail.ru

Аннотация. Исследован подход к управлению экономическими системами при наличии рассогласований между потоками смежных бизнес-процессов. Подобные рассогласования могут появиться в результате воздействия возмущений как внутри экономической системы, так и вне её. Примерами таких возмущений могут быть изменяющийся во времени спрос на производимую продукцию, нестабильность процессов производства, выход на рынок производителей с аналогичной продукцией и т.д. Предложены алгоритмы моделирования функционирования экономических систем в присутствии возмущений и принятия решений по эффективному управлению ими. Алгоритмы апробированы на одном из производственно-торговых предприятий.

Ключевые слова. Экономическая система, управление, возмущения, бизнес-процессы.

1 Введение

Рассмотрим модель экономической системы (ЭС), состоящую из последовательно соединенных бизнес-процессов, соответствующих четырем последовательным этапам: этапу закупок, производственному этапу, этапу, связанному со складированием и доставкой товаров в торговые подразделения (магазины) и этапу реализации (см. [1], [2], [3]) Каждый из таких бизнес-процессов может быть представлен в виде бизнес-процессов [2]:

$$BP_i(t) = \langle G_{BP,i}(t), F_{BP,i}(t), M_{BP,i}(t),$$

$$\pi_{BP,i}(t), L_{BP,i}(t) \rangle, i = 1, 2, 3, 4,$$

где элементы этого кортежа представляют собой графовую, потоковую, математическую модели и параметры и ограничения бизнес-процесса соответственно, причем, $BP_1(t) \equiv SP(t)$ – это бизнес-процесс, соответствующий закупкам сырья; $BP_2(t) \equiv TP(t)$ – это бизнес-процесс, соответствующий производству (технологическому процессу); $BP_3(t) \equiv LP(t)$ – это бизнес-процесс, соответствующий процессам складирования и транспортировки; $BP_4(t) \equiv MP(t)$ – это бизнес-процесс, соответствующий реализации товара в торговом подразделении (магазине) (см. Рис. 1).

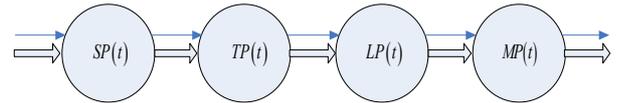


Рис. 1: Последовательность процессов.

Рассмотрим эти бизнес-процессы подробнее.

Бизнес-процесс $TP(t)$. Построим модель многостадийного технологического процесса производства продукции (поток $P_f(t)$) из сырья (поток $R_{sf}(t)$) с использованием ресурсов (поток $R_f(t)$), работ (поток $W_f(t)$), с затратами финансов (поток $C_{fin}(t)$) и т.д. Пусть на первой стадии из сырья получается готовая продукция (либо полуфабрикат) в соответствии со схемой, изображенной на Рис. 2.

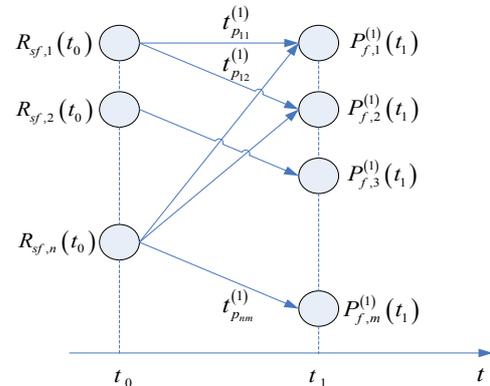


Рис. 2: Бизнес-процесс $TP(t)$ (технологический процесс).

В соответствии с этим представлением первой стадии можно ввести в рассмотрение формальную модель технологического процесса:

$$TP^{(1)}(R_{sf}(t_0)) = P_f^{(1)}(t_1),$$

где $P_f^{(1)}(t_1)$ – вектор произведенной продукции на первой стадии, $R_{sf}(t_0)$ – вектор расходуемого на первой стадии сырья. Затраты сырья для производства каждой из продукции (в векторе $P_f^{(1)}(t_1)$ это соответствующая этой продукции компонента) можно

оценить, зная $t_{p_{ij}}^{(1)}$ – доли (пропорции) вхождения i -го сырья для производства j -ой продукции.

Для бизнес-процесса, представленного на Рис. 2, можно записать:

$$\begin{aligned} P_{f,1}^{(1)}(t_1) &\leftrightarrow \langle t_{p_{11}}^{(1)} \cdot R_{sf,1}(t_0), t_{p_{n1}}^{(1)} \cdot R_{sf,n}(t_0) \rangle, \\ P_{f,2}^{(1)}(t_1) &\leftrightarrow \langle t_{p_{12}}^{(1)} \cdot R_{sf,1}(t_0), t_{p_{n2}}^{(1)} \cdot R_{sf,n}(t_0) \rangle, \\ &\dots \\ P_{f,m}^{(1)}(t_1) &\leftrightarrow \langle t_{p_{m1}}^{(1)} \cdot R_{sf,1}(t_0), t_{p_{nm}}^{(1)} \cdot R_{sf,n}(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Очевидно, что выполняются равенства $\sum_{i=1}^n t_{p_{ij}}^{(1)} = 1$,

$j = 1, 2, \dots, m$. Обозначим правые части только что рассмотренных соответствий (между произведенной продукцией и израсходованным сырьем) через $R_{sf}^{p(1)}(t_0)$, тогда бизнес-процесс $TP^{(1)}$ характеризуется (помимо прочих потоков этого бизнес-процесса) парой $\langle P_f^{(1)}(t_1), R_{sf}^{p(1)}(t_0) \rangle$.

Будем считать, что известны функции, связывающие соответствующие компоненты векторов $P_f^{(1)}(t_1)$ и

$R_{sf}^{p(1)}(t_0)$, например, вида:

$$P_{f,i}^{(1)}(t_1) = \eta_i \left(R_{sf,i}^{p(1)}(t_0) \right) = \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^{(1)} t_{p_{ij}}^{(1)} R_{sf,j}(t_0),$$

$i = 1, 2, \dots, m$, где $\theta_{ij}^{(1)}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, – известные коэффициенты модели.

Модели $\eta_i^{(1)} \left(R_{sf,i}^{p(1)}(t_0) \right)$ могут иметь более сложный вид и здесь будем предполагать, что существует и единственно решение обратной задачи, когда по известным фиксированным значениям $P_{f,i}^{(1)}(t_1)$, $i = 1, 2, \dots, m$, могут быть найдены произведения $t_{ji}^{(1)} \cdot R_{sf,j}(t_0)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, и, как следствие, значения необходимых объемов сырья $R_{sf,j}(t_0)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если бизнес-процесс $TP(t)$ состоит из $N_{TP} \geq 1$ стадий, то ему соответствует цепочка преобразований материальных потоков:

$$R_{sf}^{p(1)}(t_0) \rightarrow P_f^{(1)}(t_1) \rightarrow P_f^{(2)}(t_2) \rightarrow \dots \rightarrow P_f^{(N_{TP})}(t_{N_{TP}}),$$

где модель первой стадии $\left(\eta^{(1)} \left(R_{sf}^{p(1)}(t_0) \right) \right)$ приведена выше и предполагается, что для всех остальных стадий (с номерами стадий $2, 3, \dots, N_{TP}$) также известны модели $\eta^{(i)} \left(P_f^{(i-1)}(t_{(i-1)}) \right)$, $i = 2, 3, \dots, N_{TP}$.

Все модели производственного процесса могут быть сведены вместе в одну модель вида:

$$\begin{aligned} M_{TP}^P &= \left(\eta^{(1)} \left(R_{sf}^{p(1)}(t_0) \right), \eta^{(2)} \left(P_f^{(1)}(t_1) \right), \dots \right. \\ &\left. \dots, \eta^{(N_{TP})} \left(P_f^{(N_{TP}-1)}(t_{N_{TP}-1}) \right) \right), \end{aligned}$$

причем, модель M_{TP}^P является частью модели $M_{TP}(t)$, которая включает в себя все модели бизнес-процесса $BP_1(t) \equiv TP(t)$.

Аналогично могут быть получены модели и для остальных бизнес-процессов экономической системы:

$$M_{LP}^P = \left(\nu^{(2)} \left(P_{fou}^{(1)}(t_1) \right), \nu^{(3)} \left(P_{fou}^{(2)}(t_2) \right), \dots, \nu^{(N_{LP})} \left(P_{fou}^{(N_{LP}-1)}(t_{(N_{LP}-1)}) \right) \right),$$

$$M_{MP}^P = \left(\mu^{(2)} \left(P_{fou}^{(1)}(t_1) \right), \mu^{(3)} \left(P_{fou}^{(2)}(t_2) \right), \dots, \mu^{(N_{MP})} \left(P_{fou}^{(N_{MP}-1)}(t_{(N_{MP}-1)}) \right) \right),$$

M_{SP}^P и, наконец, для всей последовательности из бизнес-процессов в целом –

$$M_{BP}(t) = \langle M_{SP}^P(t), M_{TP}^P(t), M_{LP}^P(t), M_{MP}^P(t) \rangle.$$

2 Анализ сбалансированности потоков смежных бизнес-процессов

Проведем анализ согласованности потоков смежных бизнес-процессов. Для этого введем в рассмотрение выражения [3]:

$$\left(F(t) - F_a(t) \right)_+^{(0)} = \sum_{i=0}^{R_0} \left(F(t_0 + i \cdot \Delta\tau) - F_a(t_0 + i \cdot \Delta\tau) \right)_+,$$

$$\left(F(t) - F_a(t) \right)_-^{(0)} = \sum_{i=0}^{R_0} \left(F(t_0 + i \cdot \Delta\tau) - F_a(t_0 + i \cdot \Delta\tau) \right)_-,$$

...

$$\left(F(t) - F_a(t) \right)_+^{(p')} = \sum_{i=0}^{P_{p'}} \left(F(t_{p'} + i \cdot \Delta\tau) - F_a(t_{p'} + i \cdot \Delta\tau) \right)_+,$$

$$\begin{aligned} \left(F(t) - F_a(t) \right)_-^{(p')} &= \\ &= \sum_{i=0}^{P_{p'}} \left(F(t_{p'} + i \cdot \Delta\tau) - F_a(t_{p'} + i \cdot \Delta\tau) \right)_- \end{aligned}$$

где

$$\left(x - y \right)_+ = \begin{cases} x - y, & \text{а́нñèè } x \geq y; \\ 0, & \text{èì à÷â} \end{cases}$$

$$\left(x - y \right)_- = \begin{cases} y - x, & \text{а́нñèè } y \geq x; \\ 0, & \text{èì à÷â} \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\frac{t_1 - t_0}{\Delta\tau} \right], \dots, p_{p'} = \left[\frac{t_{p'} - t_{p'-1}}{\Delta\tau} \right].$$

Таким образом, на каждом из интервалов Δt_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p'$, оцениваются суммарные превышения и занижения потока $F(t)$ по сравнению с аппроксимирующим его потоком $F_a(t)$:

$F_+^{(i)} = (F(t) - F_a(t))_+^{(i)}$ и $F_-^{(i)} = (F(t) - F_a(t))_-^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, p'$. В качестве примера потока $F(t)$ может быть рассмотрен поток объемов продаж продукции. Тогда $F(t)$, $t \in [t_0; T_p]$, – это прогнозируемые на этом интервале времени объемы продаж, а $F_a(t)$, $t \in [t_0; T_p]$, – это объемы продаж, которые планируется получить, используя некоторое управление $C(t_0)$, реализующее стратегию закупок сырья, производства продукции, доставки и реализации этого товара в соответствии с бизнес-процессом \widehat{BP}_s . Моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{p'}$ – моменты времени смены (изменения) управлений $\Delta \widehat{BP}_s(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p'$. В случае, если прогноз на интервале $[t_0; T_p]$ для потока $F(t)$ окажется точным, то значения $F_+^{(i)}$ и $F_-^{(i)}$ покажут какой объем продукции можно было бы еще продать, если бы она был в наличии и какой объем не был продан из-за её отсутствия в требуемом количестве соответственно. Если бы не было влияния значений ряда

$$\Delta F_+^{(i)}(t_j) = (F(t_i + j \cdot \Delta \tau) - F_a(t_i + j \cdot \Delta \tau))_+,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, p_i, i = 0, 1, 2, \dots, p',$$

на значения ряда

$$\Delta F_-^{(i)}(t_j) = (F(t_i + j \cdot \Delta \tau) - F_a(t_i + j \cdot \Delta \tau))_-,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, p_i, i = 0, 1, 2, \dots, p',$$

(например, в случае, когда нереализованная в течение времени $\Delta \tau$ продукция была бы списана или изъята из продажи), то величины $F_+^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, p'$, показали бы упущенную выгоду на каждом из интервалов Δt_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p'$, а величины $F_-^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, p'$, показали бы объемы нереализованной на интервалах Δt_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p'$ продукции. Такая ситуация была бы возможна, например, если бы отсутствовал склад для поступившей на реализацию продукции или нельзя было бы её хранить в помещении по месту реализации.

3 Управление ЭС с возможными рассогласованиями потоков смежных бизнес-процессов

Предположим, что модель ЭС в виде $\widehat{BP}_s(t)$ построена на основе базовых бизнес-процессов $BP_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Рассмотрим фрагмент структуры $\widehat{BP}_s(t)$, включающей в себя два смежных бизнес-процесса $BP_j(t)$ и $BP_k(t)$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$k \in \{1, 2, \dots, N\}$, $j \neq k$. В структуре $\widehat{BP}_s(t)$ потоки этих бизнес-процессов согласованы, т.е. выходной поток процесса $BP_j(t)$ и входной поток процесса $BP_k(t)$ (см. Рис. 3) равны.

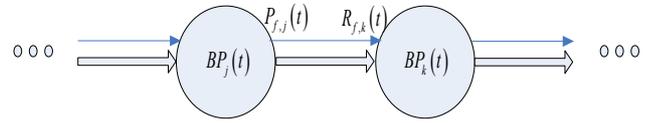


Рис. 3: Потоки процессов $BP_j(t)$ и $BP_k(t)$.

На этом рисунке показан в качестве выходного потока бизнес-процесса $BP_j(t)$ поток произведенной продукции ($P_{f,j}(t)$), а в качестве входного потока процесса $BP_k(t)$ – поток ресурсов ($R_{f,k}(t)$). Согласованность этих потоков означает, что объем произведенной в момент времени t продукции равен объему требуемого в момент времени t ресурса, в роли которого выступает эта продукция, т.е. $P_{f,j}(t) = R_{f,k}(t)$, $t \in [t_0; t_0 + T]$. На Рис. 3 не показаны некоторые из входов и выходов процессов для простоты иллюстрации. Будем считать, что задержка во времени передачи элементов выходного потока процесса $BP_j(t)$ в качестве элементов входного потока процесса $BP_k(t)$ равна нулю (отсутствует).

Пусть с помощью одного из алгоритмов нахождения наилучших управлений $C^*(t)$ найдены, в том числе, и управления, изменяющие потоки смежных бизнес-процессов, таких, например, как бизнес-процессы $BP_j(t)$ и $BP_k(t)$. Причем, управления $\Delta \widehat{BP}_s(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p'$, будут поддерживать равенство (баланс) входных и выходных потоков смежных бизнес-процессов ($P_{f,j}(t)$ и $R_{f,k}(t)$, например) во времени (в динамике). Наличие в ЭС множества факторов влияющих непосредственно и опосредованно на потоки $P_{f,j}(t)$ и $R_{f,k}(t)$ будет приводить к тому, что они будут отклоняться от значений, которые вырабатываются наилучшим управлением $C^*(t)$ и, как следствие, приводить к их рассогласованию (дисбалансу), т.е. к ситуации, когда будет выполняться неравенство $P_{f,j}(t) \neq R_{f,k}(t)$ для некоторых моментов времени $t \in [t_0; t_0 + T]$. Обозначим потоки, соответствующие управлению $C^*(t)$, через $F_{a,j}(t)$ и $F_{a,k}(t)$ для j -го и k -го бизнес-процессов соответственно. Очевидно, выполняется равенство $F_{a,j}(t) = F_{a,k}(t)$. По аналогии с обозначениями,

введенными выше, реальные потоки двух смежных бизнес-процессов обозначим через $F_j(t)$ и $F_k(t)$. Тогда возможно следующее взаимное поведение потоков во времени (см. Рис. 4).

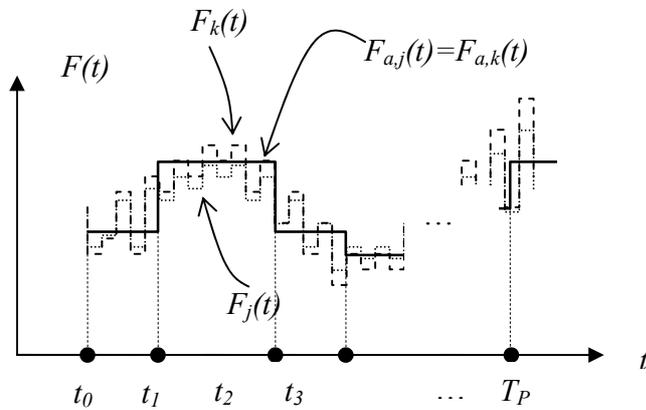


Рис. 4: Взаимное поведение потоков $F_j(t)$ и $F_k(t)$ во времени.

Очевидно, что, если выполняется неравенство $F_j(t) > F_k(t)$, для некоторого $t \in [t_0; T_p]$, то часть потока $F_j(t)$ будет недоиспользована, если выполняется неравенство $F_j(t) < F_k(t)$, $t \in [t_0; T_p]$, то из-за нехватки части ресурса бизнес-процесс $BP_k(t)$ будет вынужден недоиспользовать свои возможности, например, уменьшив значения выходных потоков. Эти уменьшения выходных потоков бизнес-процесса $BP_k(t)$ приведет, возможно, к рассогласованию потоков со смежным с ним (и следующим за ним) бизнес-процессом и т.д.

Такие рассогласования потоков, как правило, снижают эффективность работы ЭС. Кроме этого, возникая в разных частях бизнес-процесса $\widehat{BP}_s(t)$ они накладываются друг на друга, передавая эффект рассогласований по цепочкам смежных бизнес-процессов в направлении от входных (начальных) процессов к выходным (конечным).

Используя методы моделирования можно оценить возможные потери от снижения эффективности функционирования ЭС, обусловленного рассогласованием потоков смежных бизнес-процессов. Пусть эффективность функционирования ЭС оценивается критерием

$Q_{fu}(\widehat{BP}_s(t), F(t), C(t_0), \bar{Q}(t), \bar{Q}^0(t))$, плановые (номинальные) значения этого критерия получены при решении задачи нахождения оптимального управления $C^*(t)$, и они имеют вид, показанный на Рис. 5.

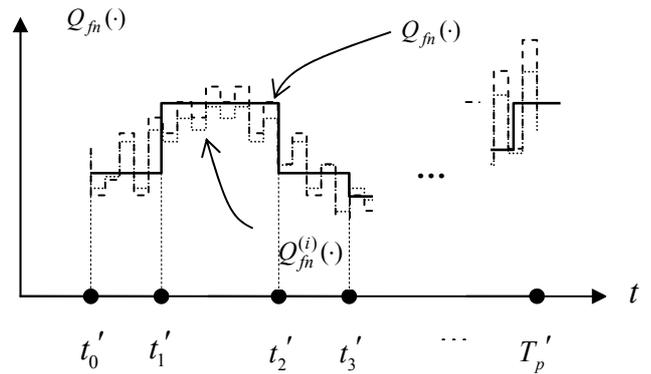


Рис. 5: Плановые (непрерывная линия) и возможные фактические (пунктирные линии) значения критерия Q_{fu} .

Заметим, что моменты времени $t'_0, t'_1, t'_2, \dots, t'_p$, в общем случае не совпадают с моментами t_0, t_1, t_2, \dots

t_p , в которые реализуются управления $\Delta \widehat{BP}_s(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p'$, поскольку результат (последствия) от управлений можно оценить лишь через некоторое время (с задержкой, с лагом). Пусть, зная области неопределенности для потоков (например, области $F_j^-(t)$ и $F_k^-(t)$ для потоков двух смежных бизнес-

процессов $BP_j(t)$ и $BP_k(t)$, рассмотренных выше), удалось оценить (для некоторых $F_j(t) \in F_j^-(t)$, $F_k(t) \in F_k^-(t)$) значения критерия

$Q_{fu}(\widehat{BP}_s(t), F(t), C(t_0), \bar{Q}(t), \bar{Q}^0(t))$ для разных сочетаний рассогласований (см. Рис. 5, пунктирные линии). Они обозначены на этом рисунке через

$$Q_{fu}^{(i)}(\widehat{BP}_s(t), F(t), C(t_0), \bar{Q}(t), \bar{Q}^0(t)),$$

$i = 1, 2, \dots, NM$; NM – количество модельных

расчетов. Тогда на интервале времени $[t'_0; T'_p]$ можно

оценить для каждой из траекторий изменения $Q_{fu}^{(i)}(\widehat{BP}_s(t), F(t), C(t_0), \bar{Q}(t), \bar{Q}^0(t))$,

$t \in [t'_0; T'_p]$, $i = 1, 2, \dots, NM$, суммарные потери и выигрыши в эффективности [3]:

$$(Q_{fu} - Q_{fu}^{(i)})_+^{\Sigma} = \sum_{j=0}^P (Q_{fu}^{(i)}(t'_0 + j \cdot \Delta\tau) - Q_{fu}(t'_0 + j \cdot \Delta\tau))_+;$$

$$(Q_{fu} - Q_{fu}^{(i)})_-^{\Sigma} = \sum_{j=0}^P (Q_{fu}^{(i)}(t'_0 + j \cdot \Delta\tau) - Q_{fu}(t'_0 + j \cdot \Delta\tau))_-;$$

где $p = \left[\frac{T'_p - t'_0}{\Delta \tau} \right]$, $i = 1, 2, \dots, NM$. Заметим, что в

этих формулах в качестве аргумента у критерия

$$Q_{fu} \left(\widehat{BP}_s(t), F(t), C(t_0), \bar{Q}(t), \bar{Q}^0(t) \right)$$

использовано только время и не показаны (для простоты обозначения) другие аргументы. Обозначения $(x - y)_+$

и $(x - y)_-$ были введены в рассмотрение выше. В этом случае общие потери от несбалансированности потоков на одной реализации

$$Q_{fu}^{(i)} \left(\widehat{BP}_s(t), F(t), C(t_0), \bar{Q}(t), \bar{Q}^0(t) \right),$$

$t \in [t'_0; T'_p]$ критерия Q_{fu} составят величину равную

$$\left(Q_{fu} - Q_{fu}^{(i)} \right)_-^\Sigma - \left(Q_{fu} - Q_{fu}^{(i)} \right)_+^\Sigma, \quad i = 1, 2, \dots, NM,$$

при этом предполагается, что эта разность неотрицательна, поскольку в противном случае потерь нет. Наибольшие возможные потери можно оценить величиной:

$$L_{Q_{fu}}^{\max} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, NM\}} \left(\left(Q_{fu} - Q_{fu}^{(i)} \right)_-^\Sigma - \left(Q_{fu} - Q_{fu}^{(i)} \right)_+^\Sigma \right).$$

Еще одной из характеристик возможных потерь, обусловленных рассогласованием потоков смежных бизнес-процессов, может служить множество наибольших возможных потерь в каждый из моментов времени $(t'_0 + j \cdot \Delta \tau)$, $j = 0, 1, \dots, p$, и формально элементы этого множества можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{Q_{fu}}^{\max} \left(t'_0 + j \cdot \Delta \tau \right) &= \\ &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, NM\}} \left(Q_{fu}^{(i)} \left(t'_0 + j \cdot \Delta \tau \right) - Q_{fu} \left(t'_0 + j \cdot \Delta \tau \right) \right), \\ & \quad j = 0, 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Если значение таких потерь устраивает менеджеров (управляющих) ЭС, то никаких дополнительных (вспомогательных) бизнес-процессов вводить в структуру $\widehat{BP}_s(t)$ не нужно. В противном случае необходимо оценить целесообразность реструктурирования ЭС таким образом, чтобы понизить (уменьшить) влияние несбалансированности потоков на эффективность функционирования ЭС (в частности, на уровень потерь, измеряемых показателем Q_{fu}). В качестве элемента в ЭС способствующего решению такой задачи может быть выбран склад (накопитель, емкость, тара и т.д.) (см. [1]). Изобразим графически процесс включения такого элемента в цепочку $BP_j(t) - BP_k(t)$ (см. Рис. 6).

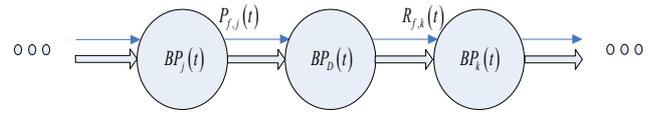


Рис. 6: Иллюстрация к включению бизнес-процесса $BP_D(t)$ в цепочку $BP_j(t) - BP_k(t)$.

На этом рисунке бизнес-процесс, отвечающий за временное хранение элементов потока $P_{f,j}(t)$, обозначен через $BP_D(t) = DP(t)$ (от англ. «depository» – «склад»). Потоки, образующие портрет бизнес-процесса $BP_D(t)$ можно условно разбить на две части: одна из них соответствует затратам на организацию (строительство, обустройство) склада и сопутствующей ему инфраструктуры, а другая – затраты, связанные с работой склада, т.е. связанные непосредственно с обслуживанием потоков $F_j(t) = P_{f,j}(t)$ и $F_k(t) = R_{f,k}(t)$.

Моделируя поведение потоков $F_j(t)$ и $F_k(t)$, можно оценить (наибольшим количеством элементов потока $F_j(t)$, которые могут одновременно находиться на хранении в бизнес-процессе $BP_D(t)$) необходимые размеры (площадь, объем и др.) склада (емкости, тары и т.д.):

$$F_D^{\max} = \max_{i \in \{0, 1, \dots, p\}} F_D'(t_0 + i \cdot \Delta \tau).$$

Здесь количество элементов поступивших на вход бизнес-процесса $BP_k(t)$ в качестве фактического потока $F_k^{real}(t) = R_{f,k}^{real}(t)$ за время $[t_0; t_0 + l \cdot \Delta \tau]$, $l = 0, 1, \dots, p$, можно найти, используя следующую рекуррентную формулу (схему):

$$\begin{aligned} F_D'(t_0 + i \cdot \Delta \tau) &= F_D'(t_0 + (i-1) \cdot \Delta \tau) - \\ & - F_k^{real}(t_0 + (i-1) \cdot \Delta \tau) + F_j(t_0 + i \cdot \Delta \tau); \\ F_k^{real}(t_0 + i \cdot \Delta \tau) &= \\ & = \min \left\{ F_D'(t_0 + i \cdot \Delta \tau), F_k(t_0 + i \cdot \Delta \tau) \right\}; \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, p$,

при начальных условиях $F_D'(t_0) = F_j(t_0)$, $F_k^{real}(t_0) = \min \{ F_j(t_0), F_k(t_0) \}$.

Можно также оценить насколько сильно отличаются потоки $F_k(t)$ и $F_k^{real}(t)$:

$$\Delta F_k(t_0 + i \cdot \Delta \tau) = F_k(t_0 + i \cdot \Delta \tau) - F_k^{real}(t_0 + i \cdot \Delta \tau),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Величины $\Delta F_k(t_0 + i \cdot \Delta \tau)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p$, показывают количество недостающего ресурса для бизнес-процесса $BP_k(t)$ в соответствующие моменты времени. Тогда наибольший дефицит в ресурсе составляет величину равную:

$$F_k^{max} = \max_{i \in \{0, 1, \dots, p\}} \Delta F_k(t_0 + i \cdot \Delta \tau).$$

Если на начальном этапе работы ЭС в бизнес-процессе $BP_D(t)$ сделать запас элементов потока $F_j(t)$ в количестве ΔF_k^{max} (возможно, пересчитав это значение с учетом возможных чрезвычайных форс-мажорных обстоятельств), то спрос на ресурс бизнес-процесса $BP_k(t)$ будет удовлетворен в любой момент времени $(t_0 + i \cdot \Delta \tau)$, $i = 0, 1, 2, \dots, p$.

За выравнивание (приведение к балансу) потоков $F_k(t)$ и $F_k^{real}(t)$ пришлось ввести резерв ресурса в количестве ΔF_k^{max} , который можно оценить, например, в денежном выражении. Зная потоки бизнес-процесса $BP_D(t)$: поток финансов, связанный со строительством или арендой склада, поток, связанный с его обслуживанием, поток, связанный с формированием резерва (ΔF_k^{max}) и т.д., можно построить новую потоковую модель ЭС со складом, например в виде $\widehat{BP}_s'(t)$.

Если оценить эффективность функционирования вновь полученной ЭС критерием Q_{fu} и сравнить полученное значение со значением этого критерия для исходной (неизменной, без склада) ЭС (с моделью $\widehat{BP}_s(t)$), то, тем самым, можно оценить эффективность введения бизнес-процесса $BP_D(t)$, т.е. склада. Заметим, что склад не является основным бизнес-процессом, т.е. тем бизнес-процессом, который прямо влияет на изменение ценности конечного продукта (товара, услуги). Тем не менее, расчетные формулы и методика, приведенные выше, позволяют оценить эффективность его введения в структуру ЭС.

Благодарности

Работа поддержана грантом Минобрнауки по проекту ТП-8.536.2011 "Разработка интеллектуальных технологий, средств компьютерного моделирования и эффективных методов оптимизации, как функционального наполнения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений".

Литература

- [1] Э. Л. Ицкович и Л. Р. Соркин. *Оперативное управление непрерывным производством: задачи, методы, модели*. Наука, М., 1989.
- [2] А. А. Наумов и В. В. Рат. Моделирование деятельности торгово-производственного предприятия на основе процессного подхода. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия Технические науки*, 4(27): 36-43, 2010.
- [3] А. А. Наумов, И. Л. Клавсуц и О. Л. Лямзин. *Инновации. Теория, модели, методы управления*. ОФСЕТ, Новосибирск, 2010.

Оценивание информативности экспериментальных данных

Анатолий Александрович Наумов

Новосибирский государственный технический университет
Новосибирск
a_a_naumov@mail.ru

Аннотация. *Исследован подход к оцениванию информативности экспериментальных данных. Предполагается, что эти данные снимаются с объекта исследования в системе активного экспериментирования и в соответствии с некоторой стратегией эффективного экспериментирования. Показано, что приращение информации на этапах исследования объекта может быть как положительным, так и отрицательным. Продемонстрированы асимптотические свойства наборов данных и их влияние на информативность экспериментов. Предложены информационные критерии для задач управления экспериментом.*

Ключевые слова. *Информативность данных, планирование экспериментов, информативный набор данных, управление экспериментом, стратегии экспериментирования, алгоритмы.*

1 Введение

Известно, какое большое внимание уделяется в теории и практике математической статистики информационным аспектам. В частности, в теории планирования экспериментов (ПЭ) уже сравнительно давно были введены в обращение и плодотворно используются такие понятия как «информационное количество Фишера», «информационная матрица Фишера» и другие (см., например, [1]). По своей сути планирование экспериментов предназначено для организации такого проведения экспериментальных исследований, при котором на каждом шаге (этапе) экспериментирования извлекалась бы наибольшая информация об объекте исследования (в том числе – об экономическом объекте) при ограничениях на расходуемые при это ресурсы. В первую очередь, благодаря этим притягательным свойствам оптимальных планов экспериментов (большая по сравнению с неоптимальными планами информационная емкость, меньшие при том же качестве построенных моделей затраты времени и денежных средств, большая при тех же затратах ресурсов точность построенных моделей), они и получили такое большое применение на практике в самых различных областях химии, физики, биологии, медицины, экономики и т.д.

Рассмотрим уравнение наблюдения вида:

$$y(x) = \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) + \varepsilon(x),$$

где $E(y(x)|x) = \eta(x, \theta) = \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) = \theta^T f(x)$ –

уравнение регрессии, $\varepsilon(x)$ – случайная переменная,

$E(\varepsilon(x)) = 0$, $E(\varepsilon^2(x)) = \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$ (здесь E – символ математического ожидания),

$f^T(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ – базисный вектор,

$y(x)$ – выходная наблюдаемая переменная,

$\theta^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ – вектор неизвестных параметров.

Предположим, что в качестве метода оценивания этих параметров выбран метод наименьших квадратов (МНК).

При управлении экспериментом лучше (логичнее, удобнее) пользоваться не непрерывными, а дискретными (точными) планами экспериментов вида:

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ n_1, & n_2, & \dots, & n_m \end{pmatrix},$$

$$\xi \in \Xi_d = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_m \\ n_1, & n_2, & \dots, & n_m \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} x_i \in X, n_i \geq 0, \\ n_i - \text{целые}, \\ i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m n_i = N \end{array} \right. \right\}.$$

Таким образом, задачи построения дискретных классических планов экспериментов должны решаться на множествах Ξ_d и иметь вид:

$$\xi^* = \text{Arg} \left(\min_{\xi \in \Xi_d} \Phi(M^{-1}(\xi)) \right).$$

Здесь $M^{-1}(\xi)$ – обратная матрица для матрицы Фишера. Итак, если главный критерий – это функционал $\Phi(M^{-1}(\xi))$, а общее число экспериментов (или общая их стоимость) – это ограничение, то логичнее (корректнее) задачу построения классических точных планов экспериментов представить, например, в виде:

$$\Delta^+ \Phi(M^{-1}(\xi)) \rightarrow \min_{\xi \in \Xi_{d, N^*}},$$

где

$$\Delta^+ \Phi(M^{-1}(\xi)) = \left(\Phi(M^{-1}(\xi)) - \Phi^* \right)_+ = \begin{cases} \Phi(M^{-1}(\xi)) - \Phi^*, & \text{если } \Phi(M^{-1}(\xi)) > \Phi^*; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь Φ^* – желаемое значение функционала $\Phi(M^{-1}(\xi))$. Очевидным образом эта задача обобщается на случай, когда известны стоимость экспериментов (затраты на экспериментирование) в точках области экспериментирования X , т.е. функция $C(x)$, $x \in X$, и на случай эффективного управления экспериментом при использовании последовательной схемы экспериментирования с учётом апостериорных оценок дисперсий, оценок параметров и т.д.

Задачу синтеза эффективных стратегий получим из вышерассмотренной задачи, обозначив через $\xi_{(i)}^*$ эффективную стратегию экспериментирования (управления экспериментом) на i -ом шаге:

$$\xi_{(i)}^* = \text{Arg min}_{\xi_{(i)}} \Delta^+ \hat{O}(M^{-1}(\xi_{(i)}^0, y_{(i)}^0)),$$

где

$$\xi_{(i)} \in \Xi_{(i)d, N^*}, M(\xi_{(i)}, y_{(i)}) = F_{1(i)}^T D_{2(i)}^{-1} F_{1(i)};$$

$\hat{O}(\bullet)$ – выпуклый вниз на множестве матриц $M^{-1}(\xi, y)$ функционал; $D_{2(i)} = \text{diag}(\hat{\sigma}_{\bar{y}(i)}^2(x_j))$;

$$\hat{\sigma}_{\bar{y}(i)}^2(x_j) = \frac{1}{n_{j(i)}^0 (n_{j(i)}^0 - 1)} \sum_{l=1}^{n_{j(i)}^0} (\bar{y}_j - y_{jl})^2,$$

$$n_{j(i)}^0 \geq 2, j = 1, 2, \dots, m_{(i)};$$

$$\Xi_{(i)d, N^*} = \left\{ \xi \left\{ \begin{array}{l} \xi = \left\{ \begin{array}{l} x_j \\ n_j \end{array} \right\}_{j=1, 2, \dots, m_{(i)}}, x_j \in X, j = 1, 2, \dots, m_{(i)}; \\ n_j \geq 0, n_j - \text{целые,} \\ j = 1, 2, \dots, m_{(i)}, \sum_{j=1}^{m_{(i)}} n_j = N_{(i)} \leq N^* \end{array} \right. \right\},$$

$$y_{(i)}^0 = \begin{pmatrix} y_{(i-1)}^0 \\ y_{(i)} \end{pmatrix}; \xi_{(i)}^0 = \xi_{(i-1)}^{*0} \dot{\cup} \xi_{(i)}, \xi_{(i)}^{*0} = \xi_{(i-1)}^{*0} \dot{\cup} \xi_{(i)}^*,$$

$$N_{(i)}^0 = N_{(i-1)}^0 + N_{(i)}, N_{(i)} = \sum_{j=1}^{m_{(i)}} n_{j(i)}, i = 1, 2, \dots$$

Здесь i – номер шага экспериментирования; $\xi_{(0)}^{*0} = \xi_{(0)}^*$ – известная начальная стратегия экспериментирования, $\xi_{(i)}^*$ – эффективная стратегия экспериментирования на i -ом шаге; $\xi_{(i)}^0$ – «итоговая» (сводная) стратегия управления экспериментом, «накопленная» (составленная) из стратегий $\xi_{(0)}^*, \xi_{(1)}^*, \dots, \xi_{(i-1)}^*, \xi_{(i)}^*$ и «собранный» в единую стратегию $\xi_{(i)}^0$; $y_{(i)}^0$ – вектор всех значений выходной переменной, полученных за i шагов экспериментирования; N^* – верхняя граница для общего количества экспериментов.

2 Информационная емкость экспериментальных данных

Цель проведенного исследования состояла в том, чтобы связать задачу планирования экспериментов (проведения экспериментальных исследований) с задачей оценивания информационной емкости, получаемых в соответствии с оптимальными планами исследования объектов, данных. Введем обозначения для схемы последовательного экспериментирования [2]: $\hat{O}^{(1)} = Q(u, T)$ – функционал, с помощью которого строится наилучший оценщик (метод оценивания параметров модели) T^* , $\hat{O}^{(2)}$ – функционал, характеризующий качество стратегии экспериментирования. Для экспериментатора основной интерес представляет критерий $\hat{O}^{(2)} = \hat{O}$ (критерий эффективного управления экспериментом), а функционал \hat{O} зависит от будущих (ещё нереализованных) результатов экспериментирования. Через $\tilde{P}_{(i)} = \tilde{\xi}_{(i)}(x)$ можно обозначить мешающие параметры (неучтённая, неконтролируемая помеха, неточности в априорной информации и т.д.); $C_{(i)}^*$ – ограничение на ресурсы экспериментального исследования. Индекс « (i) », присутствующий в обозначениях множеств и элементов задачи, соответствует номеру шага последовательной схемы управления экспериментом. Так, например, запись « $C_{(i)}^*$ » означает, что на i -том шаге экспериментирования выделены ресурсы в количестве $C_{(i)}^*$. Кроме этого возможно изменение (или уточнение) базисных векторов моделей (рабочей $f(x)$ и «истинной» $\tilde{f}(x)$).

Следует отметить различие в характере некоторых из видов априорной информации. Одни из них (такие, как $f_{(i)}(x)$, $\tilde{f}_{(i)}(x)$, $\sigma_{(i)}^2$ и др.) могут уточняться (корректироваться) в соответствии с поступлением новых данных с объекта экспериментирования ($y_{(i)}$), а другие могут определяться вне системы исследователем и алгоритмически (в самой системе автоматизации экспериментальных исследований) не изменяться ($X_{0(i)}$, $X_{(i)}$, $C_{(i)}^*$, $\Xi_{(i)}$ и др.). С учётом этого, в схеме управления экспериментальными исследованиями можно выделить в контуре управления подсистему идентификации и анализа.

Пусть $Y_{\xi_{(i)}} -$ набор данных $\left\{ \begin{array}{l} y_{(i)}^0 \\ \xi_{(i)}^{*0} \end{array} \right\}$, полученных к i -

тому шагу экспериментирования включительно. Через $\Phi(Y_{\xi_{(i)}}) = \Phi(\xi_{(i)}^{*0}, y_{(i)}^0)$ обозначим значение критерия на наборе $Y_{\xi_{(i)}}$. Информация, содержащаяся в наборе $Y_{\xi_{(i)}}$, зависит от вида критерия $\Phi(\bullet)$ и самого набора

данных $Y_{\xi(i)}$ и может быть представлена, например, через некоторый функционал $\Psi(\bullet): I_{(i)} = \Psi(\Phi, Y_{\xi(i)})$ или $I_{(i)} = \Psi(\Phi(\xi_{(i)}^*, Y_{(i)}^0))$. Вид функционала $\Psi(\bullet)$ может быть определен индивидуально каждым из экспериментаторов (или исследователей) и, в силу этого, он не может быть записан в некоторой общей (универсальной, единой) форме. Однако, свойства количества информации, содержащейся в наборах данных $Y_{\xi(i)}$, могут быть охарактеризованы с достаточно общих позиций.

Так, например, очевидны выполнения следующих свойств:

$$1) I_{(i)} > I_{(i-1)} \Leftrightarrow \Phi(\xi_{(i)}^*, Y_{(i)}^0) < \Phi(\xi_{(i-1)}^*, Y_{(i-1)}^0)$$

(напомним, что критерий эффективности $\Phi(\bullet)$, характеризующий результаты проведенных исследований (и свойства построенной модели), минимизируется);

$$2) \Delta I_{(i)} = (I_{(i)} - I_{(i-1)}) > 0 \Leftrightarrow \Delta \Phi_{(i)} = \Phi(\xi_{(i)}^*, Y_{(i)}^0) - \Phi(\xi_{(i-1)}^*, Y_{(i-1)}^0) < 0$$

(положительное приращение количества информации на i -ом шаге экспериментирования);

$$3) \text{аналогично пп. 2), но } \Delta I_{(i)} < 0 \Leftrightarrow \Delta \Phi_{(i)} > 0.$$

Отметим, что отрицательное приращение количества информации, $\Delta I_{(i)} < 0$, при увеличении общего количества экспериментальных данных в $Y_{\xi(i)}$ по сравнению с $Y_{\xi(i-1)}$ является характерным свойством стохастических систем и, в общем случае, на i -ом шаге исследования значение $\Delta I_{(i)}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Таким образом, задача извлечения наибольшего объема (количества) информации об объекте исследования на i -ом шаге экспериментирования сводится к максимизации приращения

$$\Delta I_{(i)} \rightarrow \max_{\xi_i} \text{ при } \xi_i \in \Xi_i.$$

В общем случае сходимость $\Delta I_{(i)}$ от номера шага i может выглядеть так, как это показано на Рис. 1.

Причем, очевидно, что в среднем $|\Delta I_{(i)}| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, а сами значения $\Delta I_{(i)}$ являются реализациями некоторой случайной величины. Можно сделать предположение, что для детерминированных задач моделирования (построения моделей) на каждом из шагов исследования

объекта будет выполняться неравенство $\Delta I_{(i)} \geq 0, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

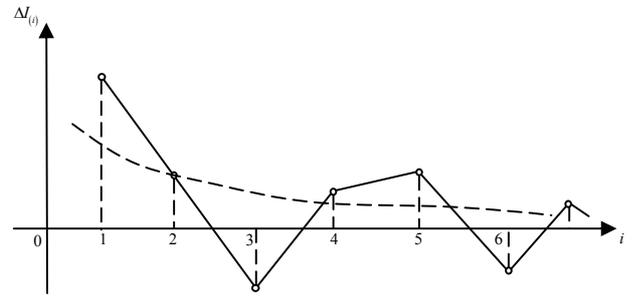


Рис. 1: Сходимость $\Delta I_{(i)}$ в зависимости от номера шага i .

Таким образом, приращение информации $\Delta I_{(i)}$ характеризует то, насколько успешно или неуспешно решается задача исследования объекта относительно критерия $\Phi(\bullet)$ с использованием на каждом из шагов набора данных $Y_{\xi(i)}$. Можно также сделать вывод о том, что, по-видимому, не представляется разумным оценивать абсолютные значения количеств информации $I_{(i)}$, т.к. они зависят от точного (конечного) решения задачи исследования объекта в соответствии с критерием $\Phi(\bullet)$, которое, в общем случае, неизвестно. Последнее означает, что, возможно, нет смысла говорить о количестве информации, содержащейся в наборах $Y_{\xi(i)}$, однако, можно оценить информативность перехода от набора $Y_{\xi(i-1)}$ к набору $Y_{\xi(i)}$. Следует также заметить, что изменения критерия $\Delta \Phi_{(i)}$, через которые и пересчитываются приращения в количествах информации $\Delta I_{(i)}$, в общем, ведут себя так, как показано на Рис. 2 (см. [2]).

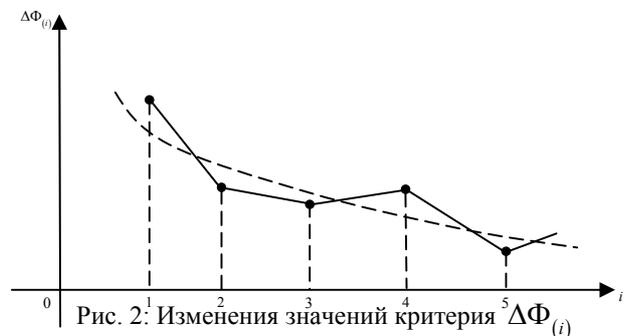


Рис. 2: Изменения значений критерия $\Delta \Phi_{(i)}$ в зависимости от номера шага.

Очевидно, чем больше неопределенность (разброс характеристик, интенсивность шумов, ошибок и т.д.) в поведении объекта, тем больше колебательность (волатильность, разброс относительно средних

значений) процессов $\Delta\Phi_{(i)}$ и $\Delta I_{(i)}$ при изменении (увеличении) значения i (или общего числа наблюдений за объектом).

Следовательно, более удачным представляется подход, использующий оценивание (измерение) относительных (в смысле – зависящих от приращений, приростов) показателей количеств информации, содержащихся в наборах $Y_{\xi_{(i)}}$, а измерение абсолютных значений количеств сопряжено с неопределенностями, обусловленными незнанием окончательного (конечного, точного) решения задачи исследования объекта в соответствии с критерием $\Phi(\bullet)$.

Предположим, что одно и то же значение критерия $\Phi(\xi_{(i)}^{*0}, Y_{(i)}^0)$ получатся в результате использования дополнительных количеств информации $\Delta I_{(i)}^1$ и $\Delta I_{(i)}^2$, соответствующих двум значениям функционалов $\Phi(\xi_{(i-1)1}^{*0}, Y_{(i-1)1}^0)$ и $\Phi(\xi_{(i-1)2}^{*0}, Y_{(i-1)2}^0)$ (см. Рис. 3).

Тогда можем записать следствие

$$\begin{aligned} & \left\| \Phi(\xi_{(i-1)1}^{*0}, Y_{(i-1)1}^0) - \Phi(\xi_{(i)}^{*0}, Y_{(i)}^0) \right\| < \\ & < \left\| \Phi(\xi_{(i-1)2}^{*0}, Y_{(i-1)2}^0) - \Phi(\xi_{(i)}^{*0}, Y_{(i)}^0) \right\| \Rightarrow \left| \Delta I_{(i)}^1 \right| < \left| \Delta I_{(i)}^2 \right|. \end{aligned}$$

Здесь $\|\bullet\|$ – норма в пространстве (возможно, векторном) значений критерия эффективности $\Phi(\bullet)$.

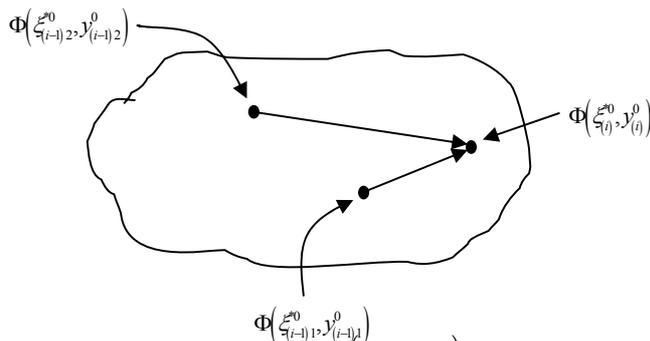


Рис. 3: Значение критерия $\Phi(\xi_{(i)}^{*0}, Y_{(i)}^0)$ получается в результате использования дополнительных количеств информации $\Delta I_{(i)}^1$ и $\Delta I_{(i)}^2$.

Пусть имеется два набора данных $Y_{\xi_{(i)1}}$ и $Y_{\xi_{(i)2}}$, которые получены в результате дополнения новыми данными одного общего набора $Y_{\xi_{(i-1)}}$. Тогда, если Φ^* – желаемое значения критерия эффективности $\Phi(\bullet)$ и выполняется неравенство

$$\left\| \Phi^* - \Phi(\xi_{(i)1}^{*0}, Y_{(i)1}^0) \right\| < \left\| \Phi^* - \Phi(\xi_{(i)2}^{*0}, Y_{(i)2}^0) \right\|, \quad (1)$$

то отсюда следует, что $\left| \Delta I_{(i)}^1 \right| > \left| \Delta I_{(i)}^2 \right|$. Здесь $\Delta I_{(i)}^1$ и $\Delta I_{(i)}^2$ – приращения информации за счет переходов от набора $Y_{\xi_{(i-1)}}$ к наборам $Y_{\xi_{(i)1}}$ и $Y_{\xi_{(i)2}}$ соответственно (см. Рис. 4). Набор данных $Y_{\xi_{(i)1}}$ можно назвать более информативным, чем набор данных $Y_{\xi_{(i)2}}$ относительно критерия $\Phi(\bullet)$ (для фиксированного желаемого значения Φ^*). Этот факт формально можно записать следующим образом $Y_{\xi_{(i)1}} \succ_{I, \Phi, \Phi^*} Y_{\xi_{(i)2}}$.

Если вместо знака строгого неравенства в (1) будет использован знак нестрогого неравенства или знак равенства, то это будет соответствовать нестрогому предпочтению в смысле информативности или эквивалентности относительно соответствующих наборов данных (т.е. $\succsim_{I, \Phi, \Phi^*}$ или \sim_{I, Φ, Φ^*} соответственно).

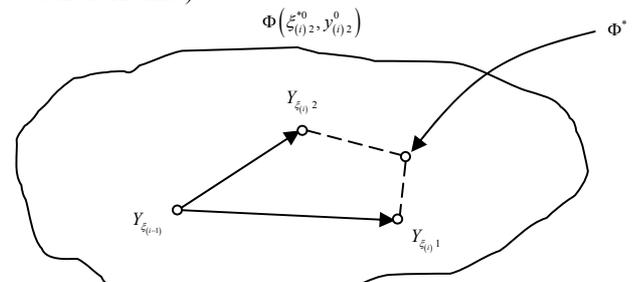


Рис. 4: Наборы данных $Y_{\xi_{(i)1}}$ и $Y_{\xi_{(i)2}}$ получены в

результате дополнения новыми данными общего набора $Y_{\xi_{(i-1)}}$.

Следует заметить, что для стохастического объекта исследования не имеет смысла говорить о более информативной стратегии экспериментирования, поскольку только одна она не определяет, к сожалению, значение критерия $\Phi(\bullet)$, а это, в свою очередь, означает, что для фиксированной стратегии экспериментирования соответствующие ей наборы данных могут давать различные приращения информации, как по абсолютным значениям, так и по знакам (т.е., возможно, как $\Delta I_{(i)} > 0$, так и $\Delta I_{(i)} \leq 0$).

Для задач исследования объектов, для которых критерии $\Phi(\bullet)$ не зависят от выходных данных объекта (от результатов наблюдений за выходной переменной) $Y_{(i)}^0$, или объект является детерминированным, можно говорить о большей информативной эффективности одной стратегии экспериментирования по отношению к другой стратегии экспериментирования.

Так, классические критерии $D-$, $A-$, $E-$ оптимальности (и многие другие) не зависят от вектора наблюдений $Y_{(i)}^0$ и поэтому соответствующие им планы экспериментов можно сравнивать по критерию информативности. Для всех этих критериев в наборах данных $Y_{\xi_{(i)}}$ присутствуют только стратегии экспериментирования, т.е. $Y_{\xi_{(i)}} = \{\xi_{(i)}^{*0}\}$, а это означает, что сравнение двух наборов данных, например, $Y_{\xi_{(i)1}} \succ_{I, \Phi, \Phi^*} Y_{\xi_{(i)2}}$, будет сводиться исключительно к сравнению соответствующих стратегий экспериментирования $\xi_{(i)1}^{*0}$ и $\xi_{(i)2}^{*0}$. Поскольку все эти критерии зависят от матрицы $M(\xi)$ или обратной для нее матрицы $D(\xi)$ (дисперсионной матрицы), то, тем самым, оправдано название матрицы $M(\xi)$, как «информационной матрицы Фишера». В этом случае, функционал $\Phi(\bullet)$ от этой матрицы определяет информативность соответствующих стратегий экспериментирования. В более общем случае (см. выше), функционал $\Phi(\bullet)$ зависит как от этой матрицы, так и от экспериментальных данных (результатов наблюдений за объектом) и, таким образом, информативность стратегий зависит не только от матрицы Фишера. Набор данных $Y_{\xi_{(i)}}$ вместе с матрицей $M(\xi)$ может быть назван информационным множеством (информационным набором), информационная эффективность которого зависит от вида функционала $\Phi(\bullet)$. Заметим, что, в общем, информационное множество может не включать в себя матрицу Фишера. Таким образом, информационная эффективность (мощность, информативность) информационного множества $\{Y_{\xi_{(i)}}, M(\xi)\}$ оценивается значениями функционала $\Phi(\bullet)$ и, в общем случае, такое множество может включать в себя и другие элементы, присутствие которых в этом множестве определяется особенностями конкретной задачи экспериментального исследования объекта.

Так, например, если вместо метода наименьших квадратов (МНК) в качестве метода оценивания параметров регрессионной модели использовать другие методы оценивания (метод наименьших модулей, метод M -оценок и т.д.), то информационное множество может не содержать в себе матрицу Фишера. Вместо неё в это множество следует включить другие элементы, влияющие на информативность исследования объекта.

Таким образом, при экспериментальном исследовании сумма приращений количества информации на отдельных шагах ($\sum_i \Delta I_{(i)}$) в целом увеличивается (хотя на

отдельных шагах эта сумма может и уменьшаться), что говорит об общем уменьшении приращений количества информации в измерениях на отдельных шагах исследования с увеличением номера шага.

Сделаем важные замечания.

Замечание 1. Для фиксированного объекта исследования и критерия эффективности $\Phi(\bullet)$ большим количеством данных в наборе $Y_{\xi_{(i)}}$ не обязательно соответствует большее приращение количества информации $\sum_i \Delta I_{(i)}$.

Замечание 2. Удаление части данных из набора $Y_{\xi_{(i)}}$ не обязательно должно приводить к уменьшению общего приращения количества информации $\sum_i \Delta I_{(i)}$.

Замечание 3. Очевидно, в общем случае следствие

$$\begin{aligned} & \left\| \Phi\left(\xi_{(i-1)}^{*0}, Y_{(i-1)}^0\right) - \Phi\left(\xi_{(i)2}^{*0}, Y_{(i)2}^0\right) \right\| > \\ & > \left\| \Phi\left(\xi_{(i-1)}^{*0}, Y_{(i-1)}^0\right) - \Phi\left(\xi_{(i)1}^{*0}, Y_{(i)1}^0\right) \right\| \Rightarrow \Delta I_{(i)}^2 > \Delta I_{(i)}^1. \end{aligned} \quad (2)$$

не выполняется.

Однако, если предположить, что выполняются неравенства

$$\Phi\left(\xi_{(i)2}^{*0}, Y_{(i)2}^0\right) < \Phi\left(\xi_{(i-1)}^{*0}, Y_{(i-1)}^0\right) \quad (3)$$

и

$$\Phi\left(\xi_{(i)1}^{*0}, Y_{(i)1}^0\right) < \Phi\left(\xi_{(i-1)}^{*0}, Y_{(i-1)}^0\right), \quad (4)$$

то следствие (2) будет выполняться.

Более того, если в (3) и (4) знаки неравенств поменять на противоположные, то в (2) (в его правой части) знак неравенства тоже необходимо поменять на противоположный, т.е. будет выполняться неравенство $\Delta I_{(i)}^2 < \Delta I_{(i)}^1$.

Замечание 4. Если известны асимптотические свойства критерия $\Phi(\bullet)$ при увеличении количества данных в наборе $Y_{(i)}^0$ (при $i \rightarrow \infty$), то можно оценить относительные потери информации при отбрасывании части данных из набора $Y_{\xi_{(i)} \rightarrow \infty}$, т.е. из асимптотически оптимального набора данных.

Заметим, что в классическом планировании экспериментов непрерывные оптимальные планы экспериментов (такие, как $D-$, $A-$, $E-$ оптимальные и некоторые другие) образуют асимптотически оптимальный набор данных, не зависящий от вектора результатов измерений $Y_{(i)}^0$.

В классическом планировании экспериментов также считается, что переход от асимптотически оптимального набора данных к просто оптимальным при конечном числе наблюдений за объектом (например, при переходе к дискретным планам экспериментов) позволяет оценить относительные потери информации (по сравнению с асимптотически оптимальным набором). Однако, поскольку при таком переходе вместо асимптотически эффективной матрицы $D(\xi)$ следует пользоваться эффективной матрицей $D(\xi_{(i)}^0, y_{(i)}^0) = M^{-1}(\xi_{(i)}^0, y_{(i)}^0)$, то информационное множество должно иметь вид $(Y_{\xi_{(i)}}, M(\xi_{(i)}^0, y_{(i)}^0))$, а не $(Y_{\xi} = \{\xi\}, M(\xi))$ (как это принято считать в классической теории планирования экспериментов).

Замечание 5. В классическом планировании экспериментов (для случаев D -, A -, E - оптимального планирования и для некоторых других видов критериев оптимальности) информационное множество состоит из пары $(\xi, M(\xi))$ и, таким образом, еще до проведения экспериментов (наблюдений за объектом) может быть решена задача оценивания информативности данных. Конечно, это возможно только для асимптотического набора данных Y_{ξ} . Это один из парадоксов классической теории планирования экспериментов – судить о ценности информации об объекте, не опираясь на результаты наблюдений за ним (т.е. на вектор $y_{(i)}^0$).

Благодарности

Работа поддержана грантом Минобрнауки по проекту ТП-8.536.2011 "Разработка интеллектуальных технологий, средств компьютерного моделирования и эффективных методов оптимизации, как функционального наполнения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений".

Литература

- [1] В. В. Федоров. *Теория оптимального эксперимента*. Наука, М., 1971.
- [2] А. А. Наумов и В. В. Сенич. *Введение в теорию управления экспериментом*. ОФСЕТ, Новосибирск, 2004.

Использование сценарного подхода и операции наращивания финансовых потоков в задачах оценивания эффективности проектов

Анатолий Александрович
Наумов

Новосибирский государственный
технический университет
Новосибирск
a_a_naumov@mail.ru

Сергей Витальевич
Крюков

Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону
sergundy@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается оценивание эффективности инвестиционных проектов с помощью методики компаундирования и сценарного подхода. Предлагается использование показателя чистого будущего дохода NFV для проведения сравнительного анализа эффективности проектов.

Ключевые слова. Инвестиционные проекты, оценивание эффективности, чистый будущий доход, сценарный метод.

1 Введение

Рассмотрена задача определения наиболее эффективного инвестиционного проекта из заданного пакета проектов. Актуальность данной задачи обусловлена тем, что при выборе направления для капитальных вложений инвесторы, как правило, сталкиваются с необходимостью выбора наилучшей альтернативы из ряда возможных.

Представим каждый проект в пакете с помощью кортежа параметров:

$$IP_i = \langle W_i(t), R_i(t), Z_i(t), P(t), X_i(t), r_i, q_i, m_i \rangle, \\ t = 0, 1, 2, \dots, m_i, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $W_i(t)$ – объем работ, который необходимо выполнить в рамках i -ого инвестиционного проекта в момент времени t ,

$R_i(t)$ – объем ресурсов, который необходимо затратить в рамках i -ого инвестиционного проекта в момент времени t ,

$Z_i(t)$ – объем финансовых затрат в рамках i -ого инвестиционного проекта в момент времени t ,

$P_i(t)$ – объем произведенной продукции или оказанных услуг в рамках i -ого инвестиционного проекта в момент времени t ,

$X_i(t)$ – величина положительных финансовых результатов в рамках i -ого инвестиционного проекта в момент времени t ,

r_i – ставка внешнего использования выходных финансовых потоков по i -ому проекту,

q_i – ставка заимствования для входных финансовых потоков по i -ому проекту,

n – количество проектов в пакете, $m_i + 1$ – длительность реализации i -ого проекта (измеренное во временных тактах).

Будем рассматривать ситуацию, когда в качестве источника для инвестиций выступают только заемные средства. Таким образом, имеем набор из n проектов, время реализации каждого из которых состоит из $m_i + 1$ периодов (тактов). Для определения наиболее привлекательного с точки зрения максимизации прибыли проекта, необходимо оценить эффективность каждого из проектов, входящих в пакет. В настоящее время основным методом, используемым при оценке эффективности инвестиционных проектов различного типа, продолжает оставаться метод дисконтированных денежных потоков ($ДДП$ или DCF), к основным показателям которого можно отнести чистый дисконтированный доход ($ЧДД$ или NPV), внутреннюю норму доходности ($ВНД$ или IRR), индекс рентабельности ($ИР$ или PI) и дисконтированный период окупаемости ($ДСО$ или DPP). Доступность в понимании и огромный накопленный опыт в использовании во многом объясняют такую распространенность этого метода. Кроме того, его использование закреплено законодательно в Методических рекомендациях [2], утвержденных в 1999г., имеющих вторую редакцию от 2000г. и действующих по настоящий момент на территории РФ.

Однако все больше специалистов указывают на ограниченность в возможностях применения $ДДП$ к оценке эффективности инвестиционных проектов [1], [3], [4]. К числу основных недостатков данного метода относят то, что потоки пересчитываются (дисконтируются) в направлении противоположном движению этих потоков по проектам. Так, например, расчеты (погашения, выплаты) по заемным средствам, внутренние перетоки денежных средств, хранение на депозитных счетах временно свободных средств и т.д. происходят в направлении увеличения (возрастания) времени. Кроме этого, для элементов входного (затратного) потока их дисконтирование лишено смысла, поскольку эти элементы не должны быть в наличии на начало жизни проекта (в момент времени $t = 0$). Также

среди недостатков метода ДДП можно выделить невозможность учета в полной мере влияния неэкономических факторов на формирование денежных потоков по оцениваемому проекту и учета различных рисков, сопряженных с реализацией инвестиционных проектов. В работе сделана попытка показать возможность использования для оценивания эффективности проектов расчетных схем, основанных на операции компаундирования (наращивания) потоков и применении сценарного метода.

Так, в качестве альтернативны для NPV может быть использован показатель NFV и его модификации. Последний может быть вычислен по формуле [3], [5]:

$$NFV = \sum_{t=0}^m G(t)(1+r)^{m-t} - \sum_{t=0}^m S(t)(1+q)^{m-t}, \quad (2)$$

где r – ставка внешнего использования выходных финансовых потоков проекта,

q – ставка заимствования для входных финансовых потоков проекта,

$G(t)$ – суммарный доход от реализации инвестиционного проекта в момент времени t ,

$S(t)$ – суммарные затраты при реализации инвестиционного проекта в момент времени t .

2 Оценивание эффективности проектов на основе сценарного подхода

Одним из подходов к учету влияния различных рисков и как экономических, так и неэкономических факторов на формирование денежных потоков инвестиционных проектов является сценарный метод. Его применение позволяет провести существенно более детализированный и широкий анализ эффективности сравниваемых проектов, по отношению к возможностям оценки и анализа с помощью показателей ДДП в рамках одного наиболее вероятного сценария. Чем больше рассматривается сценариев, тем более точную оценку эффективности проекта возможно получить. В то же время, рассмотрение большого числа сценариев с оценкой эффективности проектов в рамках каждого из них может составить очень объемную работу, затруднительную для выполнения без специального программного обеспечения и хорошего уровня владения методами, использующими теорию вероятности (например, метод Монте-Карло). Таким образом, использование сценарного подхода для оценки эффективности инвестиционных проектов представляется компромиссом между простотой и доступностью метода, с одной стороны, и глубиной анализа с другой.

Используем сценарный метод оценивания эффективности инвестиционных проектов на основе показателя NFV для нахождения наиболее привлекательного проекта из заданного множества.

Будем рассматривать h сценариев, где в рамках каждого k -ого сценария ($k = \overline{1, h}$) задаются значения входных параметров всех сравниваемых инвестиционных

проектов. Тогда кортеж параметров каждого отдельного i -ого проекта в пакете в рамках k -ого сценария можно представить следующим образом:

$$IP_{i,k} = \langle W_{i,k}(t), R_{i,k}(t), Z_{i,k}(t), P_{i,k}(t), X_{i,k}(t), r_{i,k}, q_{i,k}, m_i \rangle, \quad (3)$$

Таким образом, из выражения (3) видно, что для каждого из оцениваемых проектов от сценария к сценарию могут меняться значения всех входных и выходных параметров, кроме периода реализации проектов – $m_i + 1$.

3 Оценивание эффективности и рисков проектов в сценарном подходе

В качестве показателя эффективности инвестиционных проектов в рамках каждого из сценариев будем использовать NFV . Для его расчета необходимо привести входные и выходные параметры каждого проекта к соответствующему виду. Входные параметры $W_{i,k}(t)$ и

$R_{i,k}(t)$ кортежа (3) необходимо пересчитать в денежном выражении и суммировать попериодно с значениями показателя $Z_{i,k}(t)$. Представим полученную последовательность сумм для i -ого проекта по k -ому сценарию как параметр $S_{i,k}(t)$, где $t = 0, \dots, m_i$.

Соответственно значения выходного параметра $P_{i,k}(t)$

также необходимо представить в денежном выражении и суммировать попериодно с значениями параметра $X_{i,k}(t)$. Обозначим последовательность полученных сумм для i -ого проекта по k -ому сценарию $G_{i,k}(t)$, где $t = 0, \dots, m_i$.

Таким образом, для каждого из сравниваемых проектов в рамках k -ого сценария становится возможным рассчитать показатель NFV по следующей формуле:

$$NFV_{i,k} = \sum_{t=0}^{m_i} G_{i,k}(t)(1+r_{i,k})^{m_i-t} - \sum_{t=0}^{m_i} S_{i,k}(t)(1+q_{i,k})^{m_i-t}, \quad (4)$$

где $NFV_{i,k}$ – значение показателя NFV для i -ого проекта в рамках k -ого сценария.

Определим вероятности реализации каждого из сценариев. В зависимости от условий решаемой задачи эти вероятности могут быть определены экспертным путем или на основе имеющихся статистических данных, полученных в результате моделирования сценариев. Обозначим вероятность реализации k -ого сценария через p_k , $k = \overline{1, h}$.

Рассчитаем по всем сценариям для каждого из проектов в пакете значение $NFV_{i,k}$. Имея в распоряжении

вероятности реализации каждого из сценариев, можно построить распределение вероятностей для показателя NFV_i (соответственно для каждого из проектов), как для случайной дискретной величины. На основании характеристик этой случайной величины становится возможным дать оценку эффективности каждого из инвестиционных проектов в пакете и провести их сравнительный анализ. Рассмотрим такую характеристику показателя NFV_i , как математическое ожидание, и рассчитаем с ее помощью значение такого показателя рисков оцениваемого проекта, как наибольшие возможные абсолютные потери.

Математическое ожидание NFV_i дает представление об усредненном значении этого показателя, взвешенном с учетом возможности реализации каждого из рассмотренных сценариев. Рассчитав значения математического ожидания для каждого из проектов, получим вектор:

$$E = (E_1, \dots, E_n) = (E(NFV_1), \dots, E(NFV_n)), \quad (5)$$

где $E_i = E(NFV_i)$ – математическое ожидание показателя NFV для i -ого проекта.

Наибольшие возможные абсолютные потери рассчитываются по следующей формуле (см., например, [3], [5]):

$$Risk_i = E_i - NFV_{i,min}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где $Risk_i$ – значение наибольших возможных абсолютных потерь, E_i – математическое ожидание показателя NFV для i -ого проекта, $NFV_{i,min}$ – наименьшее значение показателя NFV для i -ого проекта.

Отметим, что такой показатель является более удачной характеристикой риска, чем дисперсия или среднеквадратическое отклонение, с той точки зрения, что он учитывает отклонения показателя NFV только в сторону уменьшения его значений, которые в действительности составляют риск потерь. Выбор лучшего проекта из пакета проектов с учетом рисков

может быть осуществлен, например, на основе анализа пар вида:

$$(E_i, Risk_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Такой анализ можно построить на основе различных решающих правил. Приведем пример одного из таких правил. Решающее правило:

$$IP_{i^*} = \left\{ IP_i \left| \begin{array}{l} E_i - \overline{Risk}_i \geq E_j - \overline{Risk}_j, \\ j = \overline{1, n}, i = \overline{1, n}, j \neq i \end{array} \right. \right\},$$

где \overline{Risk}_i и \overline{Risk}_j – показатели риска, характеризующие средние возможные потери соответственно на промежутках $[NFV_{i,min}; E_i]$ и $[NFV_{j,min}; E_j]$, и которые рассчитываются по формулам:

$$\overline{Risk}_i = \frac{\sum_{k=1, NFV_{i,k} \in [NFV_{i,min}; E_i]}^{h_i} NFV_{i,k}}{h_i},$$

$$\overline{Risk}_j = \frac{\sum_{k=1, NFV_{j,k} \in [NFV_{j,min}; E_j]}^{h_j} NFV_{j,k}}{h_j}. \quad (8)$$

Здесь h_i и h_j – количество сценариев, для которых выполняются неравенства $NFV_{i,k} \leq E_i, \quad i = \overline{1, n}$ и

$NFV_{j,k} \leq E_j, \quad j = \overline{1, n}$ соответственно. Эта

формальная запись решающего правила означает, что лучшим является проект, для которого значение его среднего ожидаемого дохода с учетом его средних потерь является наибольшим.

Введенные показатели эффективности проектов и их риски можно представить в виде таблицы (см. Табл. 1).

Вероятности Проекты	Сценарии			Характеристики NFV		
	p_1	...	p_h	Матем. ожидание (E_i)	Наибольш. возможные абс. потери ($Risk_i$)	Основа для решающего правила ($E_i - \overline{Risk}_i$)
IP_1	$NFV_{1,1}$...	$NFV_{1,h}$	E_1	$Risk_1$	$E_1 - \overline{Risk}_1$
...
IP_n	$NFV_{n,1}$...	$NFV_{n,h}$	E_n	$Risk_n$	$E_n - \overline{Risk}_n$

Таблица 1: Показатели эффективности проектов.

Благодарности

Работа поддержана грантом Минобрнауки по проекту ТП-8.536.2011 "Разработка интеллектуальных технологий, средств компьютерного моделирования и эффективных методов оптимизации, как функционального наполнения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений".

Литература

- [1] С. В. Крюков. *Методы и модели оценки и выбора инвестиционных проектов*. Рост. гос. экон. унив., Ростов н/Д., 2001.
- [2] *Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов. Вторая редакция, исправленная и дополненная*. Утв. Минэкономки РФ, Минфином РФ и Госстроем РФ от 21 июня 1999г. № ВК 477. Экономика, М., 2000.
- [3] A. A. Naumov, and M. V. Soltyk. A Modification of *NFV*- Criterion for Estimation of Efficiency of Investment Projects. *Информационные системы и технологии. Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф.* Изд-во НГТУ, Новосибирск, 1: 130–135, 2003.
- [4] T. A. Luehrman. *Strategy as a portfolio of real options*. Harvard Business Review. 5(76): 89–100. 1998.
- [5] А. А. Наумов и М. А. Максимов. *Управление экономическими системами. Процессный подход*. Изд-во ОФСЕТ, Новосибирск, 2008.

Особенности формирования маркетингового комплекса ВУЗа

Анжелика Владимировна Новачук

Сибирский Федеральный университет,
Институт экономики и управления бизнес-процессами,
Красноярск
angelikanovachuk@mail.ru

Аннотация. *Определение составляющих маркетингового комплекса вуза позволяет использовать маркетинговый инструментарий в оценке характеристик не только образовательной услуги, но и “продуктов” дополнительных маркетинговых комплексов, что дает возможность более продуманной организации самой маркетинговой деятельности ВУЗа.*

Ключевые слова. *Комплекс маркетинга, двусторонний маркетинг, образовательная услуга, продукт, цена, способ доведения продукта до потребителя, продвижение продукта.*

В сфере образования, на наш взгляд, можно выделить три взаимосвязанные единицы (ВУЗ, преподаватели/сотрудники, потребитель), образующие три звена, нуждающихся в контроле: ВУЗ – потребитель; ВУЗ – преподаватели/сотрудники; преподаватели/сотрудники – потребитель. Для повышения конкурентоспособности ВУЗа необходимо развивать три стратегии, направленные на эти три звена.

Стратегия, направленная на звено “вуз – потребитель”, является достаточно традиционной и связана с вопросами ценообразования на образовательные услуги, коммуникаций и каналами распространения. Стратегия внутреннего маркетинга направлена на звено “вуз – преподаватели/сотрудники” и связана с мотивацией персонала вуза на качественную работу. Наконец, стратегия двустороннего маркетинга направлена на звено “преподаватели/сотрудники – потребитель” и связана с контролем качества оказания услуги, происходящим в процессе взаимодействия персонала и потребителей.

Для рассмотрения последней стратегии приведем определение Ф. Котлера: “Двусторонний маркетинг – маркетинг организаций сферы услуг, который предполагает, что воспринимаемое качество услуг в значительной степени зависит от качества взаимодействия покупателя и продавца”. Что предлагают преподаватели ВУЗа покупателю образовательной услуги? Осуществление этой услуги, ради которой тот, заплатив своим “доверием”, обратился в данное учебное заведение, что предполагает и реализацию той или иной степени ее качества.

Если характеристикой двустороннего маркетинга является сам процесс оказания образовательной услуги, то что является ценой такого продукта? Нель-

зя не признать, что осуществление образовательной услуги невозможно без соучастия студента. И “качество” соучастия, на наш взгляд, и является одной из составляющей цены, которую потребитель образовательной услуги “платит” преподавателю, осуществляющему данную услугу. Чем выше качество предоставляемой образовательной услуги, тем большую “цену” (большой уровень “соучастия”) преподаватель вправе требовать от студента.

Однако такое представление о “цене” в комплексе двустороннего маркетинга не было бы полным. Спецификой услуг вообще является тот факт, что с точки зрения потребителя именно сотрудники, непосредственно осуществляющие услугу, ее и “продают”. То же касается о образовательных услугах в частности. Следовательно, для комплекса двустороннего маркетинга в категории “цена” мы будем иметь дело и с некоторой проекцией категории “базовая стоимость образовательной услуги” на ось отношений “преподаватели/сотрудники – потребитель”.

Категория “способ доведения продукта до потребителя” может быть транспонирована в категории тех способов обучения, которые использует конкретный преподаватель при предоставлении образовательной услуги. Это могут быть активные формы обучения в виде деловых игр или тренингов; использование различных программных продуктов и т.п. Описание этой категории может включать и такое понятие, как форма общения. Например, ролевая функция “друга” или “строгостоящего наставника”, принимаемая на себя преподавателем; реализация функции “сопричастности” или “отстраненности” и т.д.

“Продвижение продукта” в данном контексте предполагает создание и поддержание постоянно действующих информационных потоков между преподавателем, осуществляющим услугу, и студентом, а также наполненность этих потоков положительной для последнего информацией.

Таким образом, управляемыми параметрами двустороннего маркетинга являются:

- продукт — процесс осуществления образовательной услуги и, как следствие, ее качество;
- цена — степень соучастия студента в процессе обучения, а также реальная цена образователь-

ной услуги, получаемая вузом;

- способ доведения продукта до потребителя — стиль поведения, выбранный преподавателем;
- продвижение продукта — информационные потоки, создаваемые и поддерживаемые сотрудниками ВУЗа.

Расширение спектра управляемых параметров за счет “продуктов” дополнительных маркетинговых комплексов (двусторонний маркетинг (звено “преподаватели/сотрудники – потребитель”), внешний маркетинг (звено “ВУЗ – потребитель”), внутренний маркетинг (звено “ВУЗ – преподаватели/сотрудники”) позволяет наращивать конкурентные преимущества вуза, дает возможность более продуманной организации самой маркетинговой деятельности.

Управление пожарным риском в естественных условиях и на технических объектах

Новоселов Аркадий Арсеньевич

Сибирский Федеральный Университет
Институт математики
НИИ проблем пожарной безопасности
Красноярск
arcady@novosyolov.ru

Аннотация. В работе рассмотрены некоторые методы расчета риска повреждения в результате пожара для объектов различной физической природы и геометрических характеристик, а также математические модели управления пожарным риском.

Ключевые слова. Риск, опасность, карта риска, барьер, измерение риска, управление риском.

1 Введение

Проблема вычисления пожарного риска имеет давнюю историю, и во многом решена с доведением до методик, используемых в практической деятельности, и даже до программных продуктов. Можно упомянуть, например, работы [1], [3] и многие другие. Управлению пожарным риском уделялось существенно меньшее внимание. Так, в принятом стандарте [4] риск описывается в виде вероятности повреждения в результате пожара, или в виде математического ожидания понесенного ущерба, без учета изменчивости, что существенно снижает качество управления риском.

В настоящей работе описываются некоторые вероятностные и детерминированные модели распространения пожарного риска, способы количественной оценки пожарного риска, а также предлагаются подходы к управлению пожарным риском на основании известных моделей распространения пожара в различных средах (природных и инженерных) и представления мероприятий пожарной безопасности в виде некоторого барьера.

2 Модели распространения

Среди моделей распространения пожара наиболее известны вероятностные модели [1], основанные на теории случайных множеств, и детерминированные модели [3], основанные на уравнениях газо- и термодинамики.

Вероятностные модели обычно устроены следующим образом. На правильной дискретной сетке задаются вероятности перехода пожара на соседние узлы, что позволяет по заданному очагу возгорания строить вероятностный прогноз распространения пожара

с течением времени. Прогноз в большинстве случаев строится методом Монте Карло, то есть, методом статистического разыгрывания. В некоторых простейших случаях удается получить решение и в замкнутой форме. Вероятности перехода могут быть как постоянными, так и меняться в зависимости от направления перехода и от текущего положения. Это может быть связано с имеющейся информацией о направлении ветра, воспламеняемости материалов в различных участках, еще не охваченных пожаром, и тому подобных обстоятельств.

Детерминированные модели используют дифференциальные уравнения в частных производных для описания массопереноса, распространения тепла, волн и прочих динамических процессов. Прогноз по таким моделям при использовании мелких сеток, особенно нестандартной конфигурации, может потребовать значительных вычислительных ресурсов. Настройка таких моделей обычно осуществляется по шаблонам, полученным в ходе натурных экспериментов.

В первом приближении можно считать, что вероятностные модели лучше приспособлены для описания относительно медленных процессов, протекающих на значительных территориях, скажем, лесных пожаров. Детерминированные модели, в свою очередь, лучше описывают быстротекущие процессы в зданиях и сооружениях, особенно, связанные со взрывами.

3 Карты риска

На основании моделей распространения пожара можно строить карту риска данной территории или инженерного объекта. Например, на географической карте выбранной территории по имеющей статистической информации несложно дать количественные оценки вероятности возникновения пожара в типичных очагах, после чего с помощью моделей распространения "перенести" вероятность поражения пожаром на все элементы карты.

В рамках вероятностной модели распространения пожара эту процедуру можно формализовать следующим образом. Обозначим X множество точек плос-

кости, образующих правильную прямоугольную сетку. Эту сетку можно трактовать, как дискретное представление карты местности. Далее, обозначим $T = \{0, 1, \dots\}$ совокупность дискретных моментов времени. Для каждого момента времени $t \in T$ заданы следующие параметры: функция

$$P_t : X \rightarrow [0, 1], \quad (1)$$

значение которой в точке $x \in X$ имеет смысл вероятности возникновения пожара в точке $x \in X$ в момент времени $t \in T$, а также векторно-значная функция $Q_t : X \rightarrow [0, 1]^4$, координаты значений которой

$$Q_t(x) = (p_t^u(x), p_t^d(x), p_t^r(x), p_t^l(x)) \quad (2)$$

обозначают вероятности возгорания точек сверху, снизу, справа и слева от x в *следующий* момент времени $t + 1$ при условии, что в *текущий* момент времени t точка x захвачена пожаром. При этом предполагается, что за один шаг во времени пожар может распространиться не более, чем на один шаг по пространству, хотя допускается одновременное распространение по нескольким направлениям.

Развитие пожара с течением времени описывается с помощью последовательного применения вероятностного оператора (2) на каждом шаге по времени. Точнее этот процесс можно записать в следующем виде. Обозначим $l(x), r(x), u(x), d(x)$ точки из X , лежащие слева, справа, сверху и снизу от $x \in X$, соответственно. Далее, обозначим $R_\tau(x, y)$ вероятность распространения пожара из начальной точки x в точку y за время τ . Точнее, $R_\tau(x, y)$ — это вероятность того, что в момент времени τ точка y будет захвачена пожаром *при условии*, что в момент времени 0 пожаром была захвачена *единственная* точка x . Тогда распространение пожара из начальной точки x можно описать посредством процесса

$$\begin{aligned} R_{\tau+1}(x, y) &= p_r R_\tau(x, l(y)) + p_l R_\tau(x, r(y)) \\ &+ p_u R_\tau(x, d(y)) + p_d R_\tau(x, u(y)), \end{aligned} \quad (3)$$

где y пробегает все множество X . Вероятностное распределение на X , полученное после t шагов процесса (3), можно назвать контуром пожара по истечении t моментов времени.

Карту риска пожара можно создать следующим образом. В качестве очагов возникновения пожара выбираем подмножество точек $X_0 \subset X$, не слишком плотно заполняющее X . Последнее условие обеспечивает малую вероятность достижения пожаром точек сетки из двух и более очагов одновременно, что позволяет приближенно считать такие события несовместными. По имеющимся наблюдениям строим оценки вероятности возникновения пожара в узлах $x \in X_0$. Пожары, возникавшие в точках не из X_0 , приписываем ближайшим узлам из X_0 . Далее, фиксируем некоторый временной горизонт карты $t \in T$,

и для каждого $x \in X_0$ строим контур пожара по формулам (3) для $\tau = 0, 1, \dots, t - 1$. Если некоторые контуры, соответствующие различным очагам $x_1, x_2 \in X_0$, все же пересекаются, в качестве значения вероятности $R_t(y)$ захвата пожара точек y из пересечения выбираем наибольшую из вероятностей $R_t(x_1, y), R_t(x_2, y)$.

Детерминированные модели распространения пожара [3] используются аналогичным образом для описания распространения пожара от сформированных источников с учетом вероятностей возникновения пожара (1).

Итоговую карту риска можно представить в виде цветной или полутоновой картинкой, в которой (цвет) интенсивность раскраски точки y зависит от значения $R_t(y)$.

Для последующего использования в процедурах принятия решений полезно подготовить некоторый интегральный показатель риска, например, максимальное значение вероятности захвата пожаром среди всех точек $y \in X$, или взвешенное среднее значение этих вероятностей

$$S_t = \sum_{y \in X} w(y) R_t(y), \quad (4)$$

где веса w неотрицательны и удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{y \in X} w(y) = 1. \quad (5)$$

Значениями весов можно отрегулировать различную важность различных точек местности с точки зрения пожарной безопасности, например, точкам, расположенным в населенных пунктах и вблизи них можно приписать больший вес.

4 Управление риском

Управление пожарным риском целесообразно осуществлять силами экспертов в данной области с информационной поддержкой с помощью представленных здесь моделей.

Сама процедура управления обычно сводится к поиску путей наилучшего использования имеющегося бюджета, причем, в качестве критерия для сравнения различных способов используются те или иные количественные показатели пожарной безопасности. Примером такого показателя может служить взвешенный риск пожарной опасности (4), который желательно сделать по возможности меньшим.

Более продвинутый пример, в котором учитывается не только факт пожара, но и его экономические последствия, строится следующим образом. Обозначим

$$V(x), \quad x \in X \quad (6)$$

убыток, который наносит пожар в случае его распространения до узла x . Это может быть как стоимость имущества, расположенного в этой части местности, и погибающего в результате пожара, так и стоимость восстановительных работ, которые необходимо провести для ликвидации последствий пожара. Косвенным образом можно учесть здесь и вред здоровью и жизни людей, причиненный произошедшим пожаром. При этом критерием может служить ожидаемый размер убытка

$$S_t^{(1)} = \sum_{y \in X} V(y)R_t(y). \quad (7)$$

Поскольку среднее значение убытка не отражает индивидуального отношения к риску [2], в частности, не учитывает неприятие риска, присущее большинству людей, можно развить критерий в направлении учета неприятия риска. Сделать это можно несколькими способами. Один из них состоит во введении функции полезности

$$U : R \rightarrow R \quad (8)$$

и рассмотрении вместо (6) следующего критерия

$$S_t^{(2)} = \sum_{y \in X} U(-V(y))R_t(y). \quad (9)$$

Этот критерий называется ожидаемой полезностью, и при выполнении некоторых условий для функции U отражает неприятие риска [2].

Возможно использование и других критериев вместо (4), (7), (9) в зависимости от конкретных условий задачи. Мы не будем здесь подробнее останавливаться на этих вопросах, которые освещены, например, в [2].

Перейдем к процедуре оптимизации. В задачах управления пожарным риском редко удается представить множество управляющих воздействий в виде, удобном для формальной оптимизации. Поэтому наиболее распространенным методом оптимизации является перебор некоторого, относительно небольшого, количества сценариев управляющих воздействий. Сами эти сценарии, оценка стоимости их реализации, а также оценка эффективности реализации (снижение вероятностей возгорания, распространения, или снижение стоимости повреждений) производится экспертным путем.

Таким образом, процедура оптимизации заключается в следующем. Основываясь на имеющемся бюджете, эксперт разрабатывает комплекс мер по изменению конфигурации противопожарных средств, закупке дополнительного оборудования, размещению средств пожаротушения и прочих действий, направленных на снижение вероятности неблагоприятных событий, или на уменьшение потенциального размера ущерба в результате реализации неблагоприятных событий. Такие меры служат своего рода *барьерами*

на пути распространения пожарной опасности. Для данного комплекса мер вычисляется значение выбранного критерия S , $S^{(1)}$ или $S^{(2)}$. Затем разрабатывается другой комплекс (сценарий), для него вся процедура повторяется, и т.д. После разработки нескольких сценариев производится сравнение вычисленных значений критериев, в результате отбирается наилучший сценарий, который и принимается к реализации.

5 Заключение

В работе рассмотрены некоторые известные методы моделирования распространения пожара в открытых пространствах и в сооружениях, предложены методы количественной оценки риска, связанного с пожарной опасностью, а также способы управления риском, основанные на предлагаемых методах оценки риска. Отмечается, что меры по укреплению пожарной безопасности удобно интерпретировать как *барьеры*.

Благодарности

Автор выражает свою искреннюю признательность профессорам Сергею Петровичу Амельчугову и Олегу Юрьевичу Воробьеву за плодотворное обсуждение результатов работы, послужившее выработке многих ее идей.

Список литературы

- [1] О.Ю. Воробьев. *Среднемерное моделирование*. Наука, М., 1984.
- [2] А.А. Новоселов. *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения*. Наука, Новосибирск., 2001.
- [3] С.В. Пузач. *Методы расчета тепломассообмена при пожаре в помещении и их применение при решении практических задач пожаровзрывобезопасности*. МЧС РФ, М., 2005.
- [4] *Менеджмент риска. Процедуры управления пожарным риском на предприятии*. Стандартиформ, М., 2010.

Об одном подходе к решению задач параметрической и структурной идентификации вероятностных распределений с учетом совокупных ошибок в статистических данных

Шамсутдин Нуритдинов

Ташкентский исламский университет
кафедра информатики
Ташкент
6166app@gmail.com

Абдурахим Абдушукуров

Национальный университет Узбекистана
Кафедра теории вероятностей и
математической статистики
Ташкент
a_abdushukurov@rambler.ru

Нурмухаммад Турсунов

Ташкентский исламский университет
кафедра информатики
Ташкент
mtursunov@gmail.com

Борихан Шаумаров

Региональное представительство управления
ООН по наркотикам и преступности
Ташкент
bshaumarov@yahoo.com

Аннотация. В работе предложенный ранее авторами интегральный критерий максимального правдоподобия для идентификации моделей с ошибками в переменных применяется для решения задач аппроксимации вероятностных распределений по выборке в сопоставлении с традиционными регрессионными методами и методами ортогональной регрессии и моментов. Приведены имитационные данные по улучшению оценок и примеры синтеза модели распределения в классе кусочно-линейных и сплайновых функций.

Ключевые слова. Идентификация модели, распределение вероятностей, имитационные вычисления, оценка параметров, интегральный критерий правдоподобия, синтез структуры модели, сплайн, дисперсия.

1 Введение

В работах [1,2] был предложен и исследован подход к формализации закономерностей в данных, основанный на интегральном учете совокупных ошибок и позволяющий эффективно решать задачи параметрической и структурной идентификации математических моделей. Получены аналитические выражения для оценок параметров линейной модели, сформулированы и доказаны теоремы об их состоятельности. Многократными представительными имитационными вычислительными экспериментами получены сопоставительные результаты по предложенным и традиционным подходам для типичных случаев, включая нелинейные, многозначные, многомерные, статические и динамические модели прогноза. Выявлены ситуации, при которых достигается уменьшение погрешностей оценок от тридцати процентов до нескольких раз.

Целью настоящей работы является попытка приложить упомянутый выше подход к задаче теоретической и эмпирической аппроксимации вероятностных

распределений при постулировании наличия совокупных нормально распределенных ошибок, как в значениях интервалов частот, так и в значениях частот.

Вид интегрального критерия:

$$R(A) = \prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^n \frac{\int p(S, x_i, y_i) dS}{\int dS} \quad (1)$$

Отдельные множители представляют собой плотности вероятности наблюдения i -ой точки при представлении модели в виде $y = f(x, a)$ с областью значений S (здесь: x – вектор независимых переменных, a вектор параметров модели, n – объем выборки).

В качестве универсальной характеристики близости выборки к модели естественно применить среднегеометрическую плотность вероятности принадлежности выборки к модели:

$$L = \exp\left(\frac{\ln(R)}{n}\right)$$

2 Исследование параметрической идентификации

С помощью специальной функции вычисляются значения одномерной нормальной функции распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией в диапазоне от -1 до 1 с равномерным шагом, обратно пропорциональным количеству точек выборки, и генерируются не коррелированные между собой ошибки к абсциссам и ординатам по двумерному нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и заданными дисперсиями (σ_x и σ_y). Составлены программы на MATLAB для оценки параметра уравнения Гаусса

методом регрессионного анализа, методом ортогональной регрессии и «интегральным» методом.

Точности параметрической идентификации (средние и средние абсолютные ошибки оценки), достигнутые при 133-х кратном повторе, объеме выборки $n=8$, при σ_x равном интервалу частоты и $\sigma_y=0.2$, количестве шагов интегрирования 2500, представлены в Табл.1. В таблицах обозначены: 1 - метод наименьших квадратов, 2- метод ортогональной регрессии, 3 - метод «интегральной» регрессии, 4 - метод моментов, 5 - скорректированный метод моментов.

Таблица 1: Ошибки оценок

Показатели \ Методы	1	2	3	4	5
d_1	0.21	-0.1378	0.0659	0.0080	0.2171
d_2	0.25	0.2389	0.1784	0.1747	0.3702

В случае двухпараметрического уравнения ошибки оценки математического ожидания и дисперсии одновременно (средние и средние абсолютные ошибки оценки), достигнутые при 100 кратном повторе, объеме выборки $n=10$, при σ_x равном половине интервала частоты и $\sigma_y=0.05$, количестве шагов интегрирования 2500, диапазоне интегрирования от 0 до 2, номинальных значениях параметров (1, 0.5), представлены в Табл.2 и 3.

Таблица 2: Ошибки оценок математического описания

Показатели \ Методы	1	2	3	4	5
d_1	0.005	0.007	0.0052	0.0042	0.1431
d_2	0.032	0.032	0.0312	0.0317	0.1465

Таблица 3: Ошибки оценок дисперсии

Показатель и \ Методы	1	2	3	4	5
d_1	0.0214	-0.023	-0.0006	-0.091	0.1521
d_2	0.0412	0.0424	0.0350	0.0953	0.1844

Один из вариантов аппроксимации приведен на Рис.1

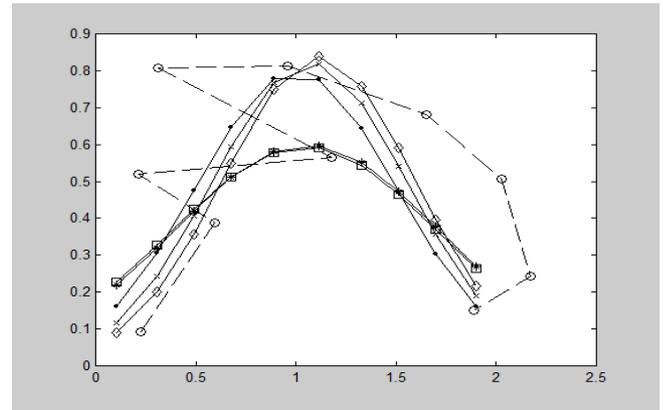


Рис. 1. Аппроксимации различными методами.

Здесь: “точки” - истинные значения; “кружки” с пунктирами - возмущенные значения; “квадратики” - по 1-методу; “ромбики” - по 2-методу; “крестики” - по 3-методу; “звездочки” - по 4-методу.

Таким образом, при увеличении количества параметров модели наблюдаются различные эффекты взаимовлияния и встает вопрос упорядочения точек.

3 Исследование структурной идентификации

Для иллюстрации возможностей рассматриваемого подхода к структурной идентификации модели вероятностных распределений в качестве реального примера использована выборка из архива МЕТЕОПРОГ.UZ по температуре воздуха в г.Ташкенте за 2010 г.

На Рис.2 показаны относительные частоты часовых распределений температуры за 2010 и 2011 гг., из которых можно сделать вывод о том, что дисперсия колебаний частот повторений определенных значений температуры составляет приблизительно 0.0030.

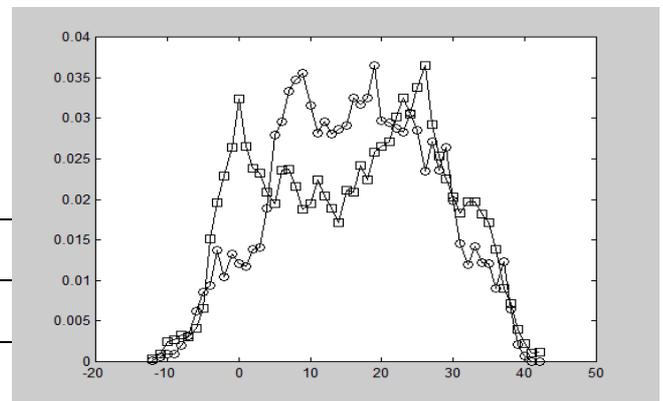


Рис. 2: Относительные частоты температуры воздуха

Полученные численные значения параметров распределения Гаусса представлены в Табл.4.

Таблица 4: Оценки параметров распределения температуры

Показатели\ Методы	1	2	3	4	5
Математическое ожидание температуры	16.2197	16.2306	16.2104	16.1437	16.8287
Дисперсия распределения	11.8986	11.8716	11.8703	10.7079	11.5341

Вычисленные значения «интегрального» критерия близости приведены в Табл.5, где в качестве 6-го метода приведены результаты аппроксимации кусочно-линейной функцией «интегральным» методом.

Таблица 5: Уровень правдоподобия моделей и быстрдействие методов

Показатели\ Методы	1	2	3	4	5	6
Значения критерия L	1.0258	1.0259	1.0259	0.8311	0.9770	1.7868
Время вычисления, в сек.	0.1100	6.2300	9.3100			173.970

На Рис. 3 показаны графики различных аппроксимирующих функций, полученные различными методами (обозначения соответствуют обозначениям к Рис. 1, с той лишь разницей, что точки выражают узлы кусочно-линейной модели).

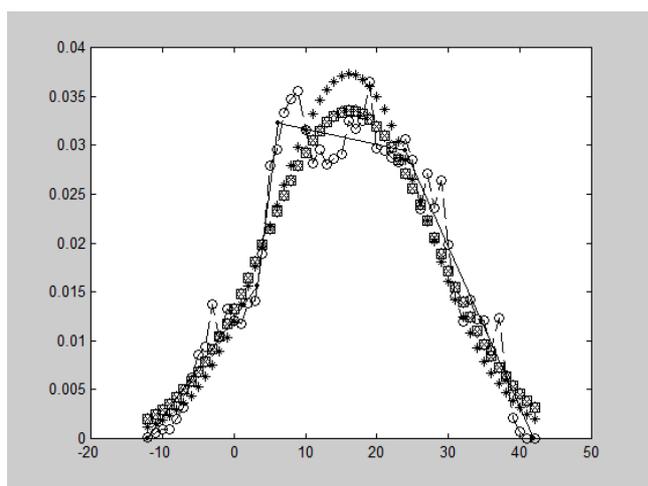


Рис. 3: Графики различных аппроксимирующих функций, полученных различными методами.

Исследования показали, что при указанных выше данных высокими результатами по достоверности (по «интегральному» критерию) обладают обработки интерполяцией и сплайн-аппроксимацией (см. Рис.4), при этом параметр соотношения близости и гладкости может быть подобран оптимизацией именно по этому критерию L.

Однако с расширением ширины интервала частот более достоверные результаты получаются прямым синтезом кусочно-линейных моделей (см. Рис.5). Так, при укрупнении данных с интервалом 4°C и при допущении погрешности значений интервала, равной $0,5^{\circ}\text{C}$, достигается значение критерия 0.56831, тогда как при интерполировании 0.51764 и при сплайн-аппроксимации наивысший показатель - 0.51988. А при допущении погрешности значений интервала, равной $2,5^{\circ}\text{C}$, имеем соответственно 0.37808, 0.33705 и 0.33570.

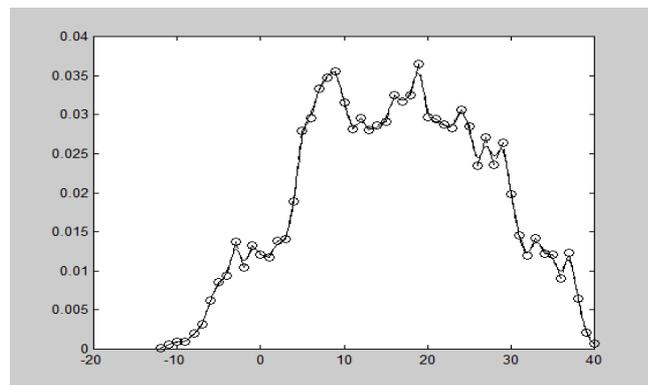


Рис. 4: Графики интерполирующих и сплайн-аппроксимирующих функций

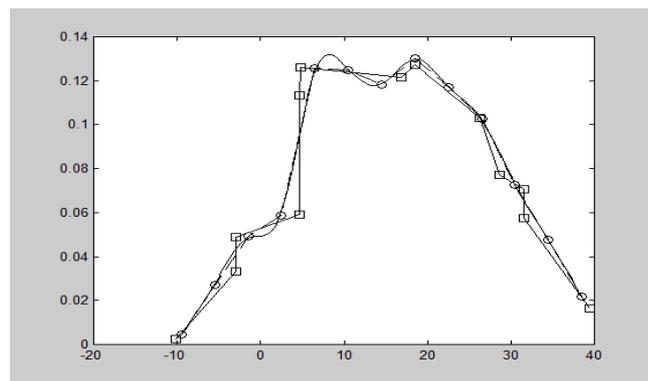


Рис. 5: Графики аппроксимирующих функций для укрупненных частот

Наряду с ним увеличивается и время вычислений, необходимое для поиска максимума R по 26 координатам точек, являющихся параметрами модели (496 и 444 сек соответственно).

Разработанный подход к идентификации математических моделей позволит значительно уточнить описание закономерностей с учетом совокупных ошибок в данных и устранить парадоксы закона регрессии, а также (и это самое главное) полностью формализовать процедуры синтеза структуры модели. Предложенный интегральный синтез и прогноз могут быть широко и эффективно использованы во всех областях науки и практики, связанных с количественным анализом статистических взаимосвязей, таких как естествознание, техника и технологии, эконометрика, социология, политология и другие; алгоритмизация и программная реализация данного подхода заложат основу для новых поколений интеллектуальных систем. Нами также разработаны принципиально другие подходы к решению поставленных задач, сокращающие объем вычислений в миллионы раз при достижении одинаковой точности оценок.

Литература

- [1] Sh. Nuritdinov, B. Shaumarov, A.Odilov. Synthesis of regularities and prognosis of them at postulation of errors in variables. *Sixth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation, WCIS – 2010*. b-Quadrat Verlag, 2010. p.56-59.
- [2] N. Yusupbekov, J.Mukhitdinov, Sh. Nuritdinov, B. Shaumarov. *Calculation of interphase balance on the basis of models with errors in variables. Sixth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation, WCIS – 2010*. b-Quadrat Verlag, 2010. p.145-148.

Анализ пространственной структуры: постановка гипотез

Овчинников Александр Евгеньевич

Красноярский государственный торгово-экономический институт
Красноярск
ergopotes@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается один из подходов к постановке гипотез о закономерностях и характеристиках пространственной структуры древостоя. Подход основан на визуальном эмпирическом выделении характерных структурных образований, которое становится возможным за счет использования специального программного обеспечения.

Ключевые слова. Гипотеза, древостой, пространственная структура, визуальный анализ.

1 Тезисы доклада

Анализ пространственной структуры можно разделить на три этапа: подготовка данных для анализа, постановка гипотез и проверка гипотез.

Первый этап реализуется за счет формирования унифицированной базы данных, включающей в обязательном порядке информацию о пространственном расположении деревьев. Также в базу могут быть включены значения различных морфометрических характеристик деревьев и иная информация, способствующая анализу пространственной структуры.

Проверка гипотез проводится различными статистическими методами и в общем случае не требует разработки новых подходов и приемов. При этом достоверность подтверждения или отклонения гипотезы может оспариваться, но сама реализация этапа проверки достаточно технологизирована.

Этап же постановки гипотез о пространственной структуре древостоя слабо технологизируем в большинстве случаев. Относительно просто формулируются гипотезы о пространственной структуре, связанные с особенностями рельефа, почв или особых климатических условий. Если же стоит задача выделения неизвестной структурной зависимости, то формулировка гипотезы становится проблематичной из-за большого количества возможных вариантов и проблемы “слабых сигналов”, когда пространственные структуры представлены отдельными фрагментами, разбросанными по всей пробной площади.

Однако, предлагаются различные вспомогательные способы постановки гипотез о пространственной структуре. Одним из продуктивных подходов является визуальное эмпирическое анализ графиков размещения деревьев на пробной площади и выделение

пространственных структуры, реальное наличие которых может быть проверено в дальнейшем.

В работе [1] предлагается следующий способ решения проблемы “слабых сигналов”.

“Действительная закономерность расположения деревьев на пробной площади вскрыта посредством усиления слабых сигналов методом суммирования. С этой целью положение, занимаемое каждым из 430 деревьев в своем квадрате, нанесено на лист кальки, размер которого соответствует размеру одного квадрата плана насаждения. В результате изучения полученного отображения выявлены структуры кольцевой и линейной формы, которые акцентированы усилением тона окраски.”

Предложенный метод и полученные с его помощью результаты вызывают определенные сомнения, так как нанесение деревьев со всех квадратов на один не позволяет выделить пространственную структуру пробной площади. Это связано с тем, что первичное разбиение на квадраты может быть любым, и не обосновано закономерностями пространственного размещения. Следовательно, изменяя стартовую разбивку пробной площади, можно получить различные “интегральные планы” с различными закономерностями.

Однако, сам подход визуальное-эмпирическое анализа размещения деревьев на пробной площади может достаточно продуктивно использоваться для постановки гипотез о пространственной структуре древостоя. Особенно в случае использования программного обеспечения, позволяющего делать визуальную разметку деревьев по значениям морфометрических и иных характеристик.

В докладе представлены результаты первичного анализа пространственной структуры древостоя одной из пробных площадей.

Список литературы

- [1] М.И. Фисенко А.Н. Прилуцкий, Д.Е. Кислов. Механизмы дифференциации видового состава древостоя высокоотравного дубняка. *Бюлл. БСИ ДВО РАН [Электронный ресурс]* : науч. журн., Вып. 8:14–27, 2011.

К вопросу размещения открытых Интернет-ресурсов в классических библиотечных системах

Борис Васильевич Олейников

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
oleynik48@mail.ru

Андрей Игоревич Шалабай

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
andrsh@gmail.com

Аннотация. *Рассмотрены тенденции изменения объема информации в классических библиотеках и сети Интернет, предложен новый подход к формированию цифровой распределенной библиотечной сети на основе концепции агрегатора цифровых информационных ресурсов с использованием Grid-технологий, который позволяет распределенно в автоматизированном режиме накапливать, описывать и предоставлять цифровые информационные ресурсы, осуществлять их тематический и полнотекстовый поиск.*

Ключевые слова. *сеть Интернет, распределенная библиотечная сеть, агрегатор ресурсов, коллекция полнотекстовых ресурсов, электронные библиотеки, Grid.*

Из-за разобшенности и непрерывного роста [1] количества информации, размещаемой в сети Интернет, возникает потребность создания системы, которая позволит:

- Обеспечить сохранность цифровой литературы на протяжении длительного периода времени.
- Каталогизировать информацию по тематическим направлениям.
- Объединить возможности полнотекстового и тематического поиска (полнотекстовый поиск среди документов определенной, достаточно узкой области знаний), причем единая поисковая система должна работать сразу с множеством источников (сайты сети Интернет, электронные и классические библиотеки, авторские работы).
- Консолидировать описания электронной и бумажной литературы в едином хранилище.

В настоящей работе рассматривается один из подходов решения этой задачи, основанный на использовании Grid-технологий [2,3], а также автоматизированных процедур представления и поиска легальных ресурсов, включая их описание, требуемое при размещении ресурса в библиотеках. Концепция распределенной библиотечной системы строится на основании следующих положений:

- Полные тексты документов хранятся в узлах Grid-сети, являющихся территориально распределенными клиентскими рабочими местами, имеющими выход в Интернет. Каждый

узел Grid-сети направлен на сосредоточение определенной тематической информации (тематик может быть и несколько), часть из которой может быть задействована другими узлами. В создании таких узлов может использоваться принцип личных полнотекстовых библиотек [4]. Предполагается, что при этом наиболее актуальная информация будет дублироваться на локальных ресурсах множества компьютеров и, следовательно, даже с отключением части узлов, остается доступной в сети. Данный подход позволяет экономить серверные ресурсы и обеспечивать более высокую скорость обмена информацией.

- На узлах Grid-сети обеспечивается поиск Интернет-документов, порождение требуемых библиографических описаний, индексирование документов, а также их резервное долговременное хранение в виде полных текстов. Таким образом, узлы Grid-сети являются резервными держателями представляющих интерес документов. Сформированные библиографические описания, а также список ссылок на полные тексты Интернет-документов направляются в централизованное хранилище (центральную электронную библиотеку Grid-сети). Использование такого хранилища позволяет оперативно осуществлять поиск требуемых документов в библиотечной сети без непосредственного поиска в Интернет и последовательного опроса узлов (принцип одного окна). Дополнительно появляются возможности централизованной каталогизации ценных документов сети Интернет, а также обмена библиографической информацией с существующими библиотечными системами, находящимися в разных городах и организациях с целью расширения внешней аудитории по поиску интересующих документов.
- Механизмы, обеспечивающие заинтересованность узлов Grid-сети в таком взаимодействии, могут быть достаточно разнообразны, начиная от некоторой материальной заинтересованности, обеспечиваемой, например, какими-либо программами, включая федеральные, направленными на организацию такого взаимодействия, и заканчивая механизмами, работающими по принципу непосредственного

обмена «ты мне, я тебе», широко распространенному в файлобменных сетях, с начислением определенных бонусов. Внешний пользователь (получатель информации) после осуществления поиска в хранилище, выбирает определенные документы для скачивания, которые предоставляются ему с ближайшего доступного в данный момент узла Grid-сети. При доступности источников полнотекстовых данных скачивание происходит по технологии р2р, в противном случае специальная серверная служба постоянно отслеживает их подключение, самостоятельно скачивает и отправляет получателю требуемые данные.

- Узлам сети присваиваются определенные полномочия, например добавление новой информации определенных тематик (размещение информации в хранилище), её модификация, возможность блокировки определенных узлов с изъятием полученных от них данных и т.д. Также целесообразно для каждого узла разделять полномочия для документов разной области знаний.
- Составление библиографического описания найденного узлом Grid-сети документа, в основном, должно осуществляться автоматически, при этом не исключая возможности непосредственного участия человека-сотрудника узла в случаях когда невозможно автоматически определить требуемые данные. Так, для текстового документа, размещенного в Интернет, как правило возможно автоматически установить название документа, дату его создания (размещения), а в некоторых случаях автора и тематику по УДК. В случае же невозможности автоматического определения части этих характеристик документа (большей частью это относится к УДК) эта задача ложится на сотрудника узла Grid-сети, размещающего документ в сети. Корректность определения всей библиографической информации проверяется модераторами соответствующего раздела области знаний при получении библиографического описания от узла Grid-сети, после чего описание записывается в хранилище. Следует отметить, что эта часть работы по распределенной каталогизации Интернет-документов нуждается в более детальном рассмотрении.
- Для осуществления обмена библиографическими описаниями с существующими библиотечными системами и формирования единого каталога, включающего как цифровые, так и бумажные издания предлагается внедрить возможности экспорта и импорта данных в формате RusMarc [5] (или Marc21). Учитывая, что передачу документов предлагается осуществлять по технологии р2р, с целью исключения дублирования записей для

одинаковой информации, а также для подтверждения идентичности копий документа, описанных в различных организациях (узел Grid-сети, библиотека), предлагается ввести в RusMarc дополнительное поле (или использовать из числа незадействованных) для размещения контрольной суммы документа (MD5).

- Доступ к полнотекстовым документам может осуществляться различными способами: возможно отображение списка всех полнотекстовых документов каждого конкретного узла, формирование каталога с документами определенной тематики, полнотекстовый поиск по всему хранилищу или его части.
- Целесообразным является заключение соглашений с издательствами о предоставлении доступа к определенным документам на коммерческой основе. В этом случае становится частично реализуемой задача предотвращения нелегального скачивания контента, являющегося объектом имущественного права путем серверного ограничения доступа адресов местонахождения всех копий конкретных документов, размещенных в узлах Grid-сети. В случае оплаты доступа пользователь получает право скачать документ вне зависимости от места его хранения.

Общая схема взаимодействия по размещению и использованию любых полнотекстовых документов в распределенной электронной библиотеке представлена на Рис.1.

Стабильность и надежность работы распределенной библиотечной сети при большом числе узлов не зависит от каждого человека, поскольку наиболее популярная или ценная литература дублируется на различных узлах. Предполагается, что для каждого документа должно существовать не менее 2-х его копий размещенных на разных узлах. За состоянием дублирования должен следить специализированный робот-менеджер, который в случае нарушения этого требования автоматически формирует нужные копии документа и направляет их согласно принятой политике на другие узлы (случайно выбранные или в соответствии с некоторыми правилами).

Кроме того, наиболее востребованные полные тексты (небольшая доля от общего количества) могут размещаться и непосредственно в хранилище. В силу этого Grid-сеть не имеет строго фиксированного количества узлов: в любой момент могут подключаться новые, либо отключаться существующие.

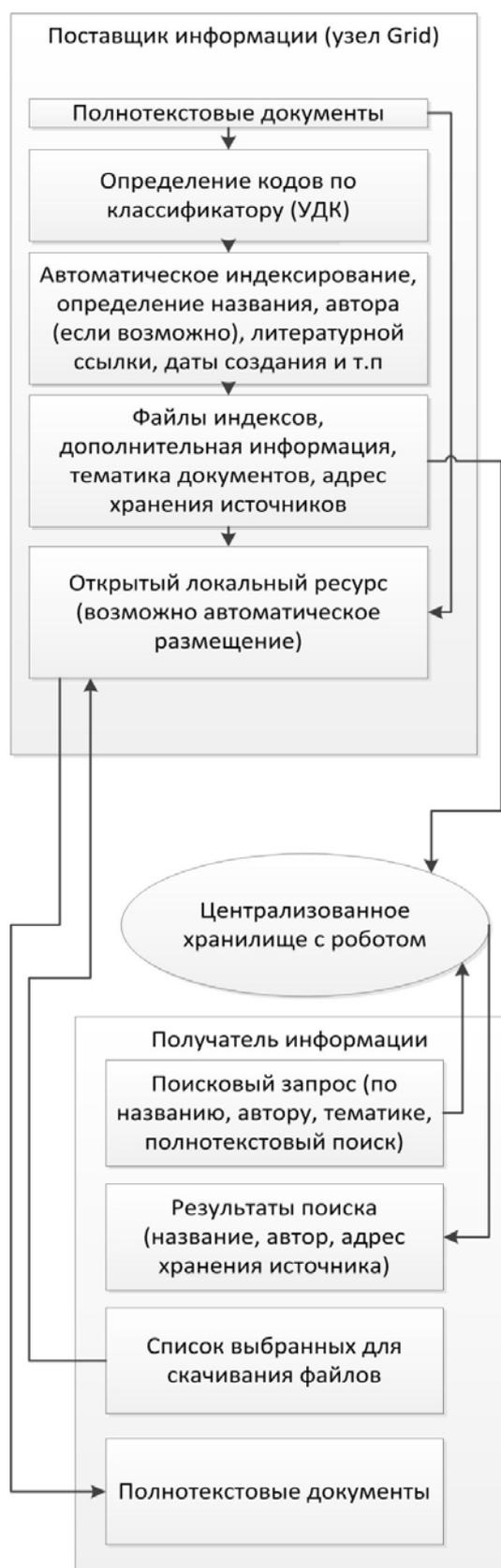


Рис 1: Общая схема взаимодействия.

Возможности описания документов, размещаемых в узлах Grid-сети, определяются в зависимости от их типа:

- Текстовые документы (статьи, книги, электронные таблицы), изначально хранящиеся на локальных ресурсах пользователей и частных (личных) библиотеках в большинстве случаев содержат библиографические выходные данные, которые могут быть использованы в описании.
- Веб-ресурсы, отбираемые созданными узлами Grid-сети, в большинстве случаев явно не предоставляют информацию для формирования библиографических выходных данных, однако, для таких документов возможно автоматически получать источник (URL), название документа, в некоторых случаях географическое расположение и дату создания ресурса с помощью перехвата адресной строки из окна браузера, а также (при использовании определенных алгоритмов классификации текстов) частичного или даже полного номера УДК.
- Ресурсы, не поддающиеся автоматической классификации: книги в формате djvu, отдельные изображения, аудио и видеoinформация. Описание для подобных данных сотрудник узла должен формировать (заполнять поля) вручную; с целью исключения появления недостоверного описания, их добавление разрешено только особо доверенным узлам с обязательным привлечением модератора.

Для второго типа документов, в случае невозможности автоматической классификации, определение УДК самим узлом «вручную» в силу его узкой специализации может быть менее затратным по времени, чем для профессионального библиотекаря.

Распространение библиотечных Grid-сетей позволит обеспечить надежную сохранность ценных документов, размещаемых в сети интернет, расширить состав библиотечных фондов актуальными и востребованными документами без значительных временных и материальных затрат на их формирование, что особенно важно для современных российских библиотек (в силу их недостаточного финансирования для пополнения фондов), будет способствовать усилению имиджа библиотек, как центров предоставления современной актуальной информации, вернет частично утраченную роль библиотек, как единых хранилищ любой информации (включая цифровую), что особенно важно для образования и научных исследований.

Можно предположить, что представленная схема, предусматривающая минимальное человеческое участие в формировании фондов интернет-документов, возможно, явит собой новый этап развития

библиотечного обслуживания и привлечет в библиотечную сеть множество людей, желающих поделиться накопленными цифровыми ресурсами.

Литература

- [1] Digital Information Growth Outpaces Projections, Despite Down Economy. // EMC. URL: <http://www.emc.com/about/news/press/2009/20090518-01.htm>
- [2] Интернет-портал по Grid-технологиям // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. URL: <http://gridclub.ru>
- [3] Каменщиков М.А. Сервисы GRID, как объекты стандартизации // Журнал радиоэлектроники. М: Радиотехника, 12:22-31, 2002.
- [4] Олейников Б.В. Создание эффективного инструмента формирования личных полнотекстовых коллекций для научной и образовательной деятельности // Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции: Труды Восьмой Всероссийской научной конференции (RCDL-2006). Суздаль, 17-19 октября 2006. / Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова. - 2006. - С.176-183.
- [5] Национальная служба развития системы форматов RusMarc. URL: <http://rusmarc.ru>

Об автоматическом формировании библиографических описаний Интернет-ресурсов в формате RusMarc

Борис Васильевич Олейников

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
oleynik48@mail.ru

Андрей Игоревич Шалабай

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
andrsh@gmail.com

Аннотация. Для обеспечения гарантий сохранности, реализации технологий поиска информационных документов во множестве источников по принципу одного окна, создания единых каталогов Интернет-ресурсов, а также обмена библиографическими данными с существующими библиотечными системами необходима система, позволяющая в автоматическом режиме формировать описания Интернет-ресурсов в общепринятом формате RusMarc.

Ключевые слова. RusMarc, библиографическое описание, Интернет-ресурс, личные полнотекстовые коллекции.

В настоящее время Интернет является основным местом для размещения публичной информации. По данным аналитического агентства IDC количество информации в Интернет растет в геометрической прогрессии и удваивается каждые 18 месяцев [1].

Обеспечивая легкость, оперативность, во многих случаях гипертекстовую связность размещения информации, Интернет вместе с тем несет негативные моменты, связанные, прежде всего, с отсутствием гарантий долговременной сохранности Интернет ресурсов и невозможностью объединения с традиционными хранилищами информации (библиотеки, архивы и пр.). Как следствие, это приводит к невозможности консолидированного тематического поиска по всем источникам, осуществляемого по принципу одного окна.

Для обеспечения сохранности цифровых данных многие ведущие организации предпринимают определенные усилия для массового архивирования цифровых документов, включая ресурсы сети Интернет [2,3]. Но, в связи с непрерывным ростом количества доступной информации, необходимо иметь возможность совершать отбор наиболее востребованной информации.

Указанные проблемы могут быть решены, если для каждого документа будет сформировано его библиографическое описание. В этом случае возможно проводить архивирование только определенных, например научных и образовательных, документов. Также это позволит консолидировать каталоги электронных и бумажных источников и создать единую гибкую систему поиска, обладающую следующими преимуществами:

- Объединенный тематический и полнотекстовый поиск электронных документов. Пользователь

указывает требуемую тематику, автора, название, а также список ключевых слов или фраз, которые должны присутствовать в тексте. Подобный подход более релевантен используемого в современных поисковиках (Google, Яндекс, Yahoo и т.д.), поскольку позволяет отфильтровывать ресурсы рекламного, развлекательного характера и статьи не удовлетворяющие указанной области знаний.

- В результатах поиска могут присутствовать и записи из каталогов классических библиотек, без возможности скачивания полных текстов, но с указанием почтового адреса их хранения.

Главными требованиями, необходимыми для создания подобной системы, являются автоматизация процесса формирования библиографических описаний и их соответствие библиотечным требованиям.

В классических библиотеках для описания литературы применяется одна из версий формата Marc (в России используется его локализация RusMarc или Marc21). Применяя подобный подход и формируя библиографические данные для Интернет-ресурсов возможно значительно упростить процедуру поиска информации, создать единые каталоги, объединяющие сведения о цифровых и бумажных документах.

Для начала необходимо определить набор полей, который будет, во-первых пригоден для полностью автоматического заполнения информацией, получаемой из распространенных браузеров, и, во-вторых являться достаточным для размещения описания в классических библиотеках.

Общая структура RusMarc содержит поля с нумерацией от 001 до 899. Из них, согласно [4], поля 001, 100, 101, 200, 230, 300, 801 являются обязательными для заполнения данными об электронных ресурсах, содержащих текстовую информацию. Отметим, что поле 300 не рассматривается в данной работе, так как представляет собой текстовое примечание произвольного формата, оно играет сопроводительную роль и практически не учитывается в процессе поиска информации. Указанный набор полей предлагается расширить полями 102, 675, 700, 856, которые могут быть также заполнены в автоматическом режиме, их использование позволит приблизить описание электронного ресурса к описанию традиционного (бумажного).

Очевидно, что из-за огромного числа Интернет-ресурсов ни одна организация не способна составить библиографические описания всего множества электронных документов. Одним из решений этой проблемы может служить создание специализированного программного обеспечения, формирующего библиографические описания в формате RusMarc в автоматическом режиме. Целесообразно выборочно каталогизировать только ту информацию, которая интересна определенным людям или организациям: при сохранении определенных веб-страниц или их фрагментов с помощью стандартных средств браузера возможно запускать процесс автоматического формирования описания в формате RusMarc и передавать полученные данные в единое сетевое хранилище.

Библиотека может самостоятельно формировать каталог библиографических данных, но более эффективен будет вариант, при котором пополнение базы данных описаний информационных ресурсов будет обеспечивать распределенная система, в которой поставщиками информации являются рядовые пользователи персональных компьютеров. Одним из направлений, обеспечивающих их привлечение в этот процесс, является создание личных полнотекстовых коллекций, базирующихся на использовании современных полнотекстовых библиотечных систем, которые размещаются на локальных компьютерах и предоставляют возможность полнотекстового поиска [5]. Человек, создавая такую коллекцию, непосредственно заинтересован в её удобном размещении и составлении описания каждого документа, так как главным потребителем информации является он сам. Подобный подход дает дополнительные преимущества:

- Формирование библиографических описаний силами обычных пользователей персональных компьютеров и некоммерческих организаций позволит создать единый каталог цифровой литературы при минимальном финансировании: необходимы только первоначальные затраты на закупку серверного оборудования, маркетинговое продвижение разрабатываемого программного обеспечения и выплату заработной платы нескольким сотрудникам, отвечающим за модерирование поступающего контента.
- Обеспечивается надежность хранения библиографической информации, так как она расположена не только в специализированном хранилище, но и рассредоточена у поставщиков информации. В случае потери данных на сервере, их можно запросить повторно.

Разрабатываемое в настоящее время программное обеспечение работает по двум направлениям:

- Непрерывное отслеживание появления новых файлов в определенных директориях, в которые пользователь сохраняет информацию из Интернет. Каталогизация при этом запускается

непосредственно в момент появления новых файлов, до того, как браузер будет закрыт или произойдет переход на другую страницу.

- Перехват информации, поступающей в буфер обмена из браузера. При этом возможно автоматически сохранять содержимое буфера и каталогизировать полученный документ. Подобный подход позволяет сохранять веб-страницу не целиком, а только её определенный фрагмент, содержащий востребованную информацию, исключая рекламу и прочее оформление ресурса.

В дальнейшем, необходимо сформировать библиографическое описание до того, как пользователь покинет сохраненную веб-страницу (т.е. в активном окне браузера отображается заголовок, URL и другие данные текущего документа).

При заполнении описания в формате RusMarc в качестве дополнительного идентификатора (помимо поля 001, в которое обычно заносится ISBN) предлагается использовать контрольную сумму (MD5) источника, помещая её в некоторое дополнительное поле. Это обеспечит требуемую уникальность идентификатора, предоставит возможность объединения нескольких описаний (полученных в разных местах) одного документа и позволит скачивать полные тексты одновременно из нескольких мест их хранения (подобный подход широко используется в сетях p2p [6]).

Информацию для заполнения других полей возможно получить с помощью механизма DDE (например, URL) и стандартных функций WinAPI (например, заголовок веб-страницы, который в большинстве случаев может рассматриваться как основное заглавие документа) из окна браузера, а также используя онлайн-сервисы проверки доменных имен Whois на сайтах официальных координаторов конкретных доменных зон.

Следует отметить, что для определения УДК можно воспользоваться одним из алгоритмов автоматической классификации текстов. И, хотя, ни один из них в настоящее время не может дать точный результат, все же, учитывая, что УДК имеет иерархическую структуру, можно производить несколько попыток классификации каждого документа, начиная с наиболее определения наиболее общей тематики. Очевидно, что при успешном определении даже первого уровня УДК (например, 53 – физика, 59 – зоология и т.д.) дальнейший поиск документов значительно сокращается.

При запуске разрабатываемая программа не отображается на экране. Только после наступления одного из двух описанных выше событий пользователь видит диалоговое окно, в котором отображаются наиболее важные элементы библиографического описания (автор, название, URL, код УДК и др.), которые формируются автоматически и могут быть

отредактированы вручную. После внесения изменений сформированная библиографическая информация размещается в едином публичном сетевом хранилище и может быть использована как при поиске требуемого информационного ресурса (включая использование протокола Z39.50), так и при её передаче другим библиотечным системам (возможно, с представлением её по ISO 2709).

Используя предложенный подход к заполнению полей стандартного описания информационного ресурса (документа), в одной библиотеке может быть обеспечена консолидация в рамках общепринятого описания:

- традиционных (бумажных) ресурсов
- самостоятельно созданных электронных ресурсов (изначально подготовленных или оцифрованных традиционных)
- размещаемых в библиотеке открытых ресурсов сети Интернет (в том числе и представленных на различных специализированных порталах, например, образовательных) с возможностью единой технологии их поиска в библиотеке, а также обмена ими.

Данная технология позволяет вести тематическое архивирование открытых Интернет ресурсов и последующего доступа к ним в рамках традиционных хранилищ (библиотек), создавая тем самым неограниченные возможности по автоматическому пополнению электронных фондов библиотек и повышению их статусности как основных хранилищ человеческого знания.

В процесс тематического архивирования ресурсов сети Интернет можно привлечь самые широкие слои пользователей сети, объединяя их в рамках проектируемых GRID-библиотечных систем [7].

Предложенный подход обеспечивает в условиях ограниченного финансирования возможность автоматического формирования описаний Интернет-ресурсов, удовлетворяющих библиотечным требованиям, что позволит накапливать эту информацию в множестве обычных автоматизированных библиотечно-информационных систем (АБИС), базирующихся на международном формате Marc и поддерживающих межкоммуникативный формат стандарта ISO 2709 и клиент-серверный протокол Z39.50 (например, в таких широко используемых в отечественной практике АБИС, как Ирбис, Liber Media, Марк-SQL, Руслан и др).

Литература

- [1] Digital Information Growth Outpaces Projections, Despite Down Economy. // EMC. URL: <http://www.emc.com/about/news/press/2009/20090518-01.htm>
- [2] Бизнес-аналитика IBM в системах интеллектуального архивирования данных // Электронный журнал BYTEMag URL: <http://www.bytemag.ru/articles/detail.php?ID=16118>
- [3] Pandora – Australia's web archive. URL: <http://pandora.nla.gov.au/>
- [4] Российский коммуникативный формат представления библиографических записей в машиночитаемой форме. Структура формата // Российская библиотечная ассоциация. URL: <http://www.rba.ru/rusmarc/rusmarc/structf.htm>
- [5] Олейников Б.В. Создание эффективного инструмента формирования личных полнотекстовых коллекций для научной и образовательной деятельности // Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции: Труды Восьмой Всероссийской научной конференции (RCDL-2006). Суздаль, 17-19 октября 2006. / Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова. - 2006. - С.176-183.
- [6] Гуркин Ю.Н., Семенов Ю.А. Файлообменные сети P2P: основные принципы, протоколы, безопасность / Сети и системы связи // http://www.ccc.ru/magazine/depot/06_11/read.html?0302.htm
- [7] Олейников Б.В., Шалабай А.И. Разработка подхода тематического агрегирования цифровых ресурсов на основе Grid-технологий // В мире научных открытий. 6:27-30, 2010.

Применение высокоэффективных технологий расчета пожарного риска

А.С. Охроменко

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

А.В. Обухов

Сибирский федеральный университет
Институт нефти и газа
Красноярск

Аннотация. *Целью исследований стало получение объективных данных о аварийных ситуациях для разработки предложений по обеспечению безопасности, а так же уменьшение пожарного риска.*

Ключевые слова. *Риск, пожар, безопасность.*

Допустимые значения пожарного риска являются одним из условий эксплуатации объектов нефти добычи. Достижение законодательно установленных величин пожарного риска обеспечивается комплексом организационно-технических мероприятий. Поэтому некорректно произведенные расчеты могут повлечь либо излишнюю ответственность должностных лиц, либо излишние материальные затраты. Использование современных технологии расчета пожарного риска позволяет оптимизировать реализацию мероприятий направленных на обеспечение пожарной безопасности. Технология расчета пожарных рисков построена на симбиозе российских и зарубежных стандартных методик построения полей опасных факторов пожара или взрыва.

Целью исследований стало получение объективных данных о аварийных ситуациях для разработки предложений по обеспечению безопасности, а так же уменьшение пожарного риска.

На сегодняшний день, как в России, так и за рубежом существует достаточное количество методик, руководств и стандартов по оценке риска. В гораздо меньшем количестве присутствуют руководства и методики по разработке противопожарных мероприятий на объектах повышенной опасности, к которым относятся объекты нефтегазовой отрасли.

В нашей работе будет использованы высокоэффективные технологии расчета пожарного риска. Применение специализированных программных комплексов сокращает время проведения параметрических исследований, при этом объем и качество получаемой информации возрастает.

На данный момент Россия только подходит к методологии "гибкого" нормирования. Стало больше внимания уделяться методам математического моделирования, основанным на решении полевых уравнений (уравнений Навье-Стокса). Происходит интенсивное внедрение полевого метода для моделирования пожаров и взрывов в области инженерных расчетов. В ближайшем будущем именно полевые методы

станут основным инструментом расчетов пожаров и взрывов, это связано как с ростом вычислительных мощностей, так и развитием математических моделей описывающих процессы, происходящие при пожаре и взрыве, и алгоритмов их решения. Использование такого мощного инструмента как математическое моделирование позволит адекватно проводить оценку риска для промышленных объектов и разработать соответствующие тактические приемы по ликвидации чрезвычайной ситуации.

Моделирование взрыва резервуара проводилось с помощью специализированного программного комплекса FLACS, являющегося разработкой норвежского института CMR и предназначенного для расчета избыточного давления и динамики взрыва. Этот вычислительный инструмент основывается на таких стандартах, как ISO 13702, NORSOK Z-013, ISO/DIS 19901-3. FLACS может использоваться для оценки следующей информации:

- Источник силы (давления) от взрыва;
- Дисперсия, формы и концентрации газа или парового облака;
- Динамические эффекты в ближнем и дальнем поле;
- Отражение и фокусировка воздействия ударных волн;
- Время воздействия волны давления.

На основании проведенного анализа и результатов проведенного расчетного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Инструменты численного моделирования позволяют достоверно оценить распространение опасных факторов пожара и взрыва; восстановить параметры произошедшего события для оценки последствий; адекватно провести анализ и оценку риска для объектов нефтегазовой отрасли.
2. На основании результатов численного моделирования и анализа риска можно усовершенствовать систему противопожарной защиты объекта и разработать безопасные тактические приемы тушения пожаров.

3. Вычислительное моделирование позволяет на ранней стадии проектирования объектов нефтегазового комплекса предусмотреть снижение затрат на строительство зданий, сооружений и конструкций, не попадающих в зону поражения волной давления.
4. Инструменты численного моделирования позволяют восстанавливать параметры произошедшего события с заданной точностью;
5. Численное моделирование взрывов на нефтегазовых объектах позволяет разработать безопасные тактические приемы тушения пожаров.
6. С появлением нового термина "риск" в Федеральном законе, это позволяет применять новые приемы управления пожарной безопасностью объектов. В результате этого возможно создание оптимальной системы защиты объекта на основе результатов полученных при расчете риска с использованием высокоэффективных технологий расчета пожарного риска.

Об оценивании локальной плотности людского потока

Егор Викторович Попел

ИКИТ Сибирского федерального университета
Красноярск
evpopel@gmail.com

Екатерина Сергеевна Кирик

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск
kirik@icm.krasn.ru

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о численном оценивании локальной плотности людского потока в задаче математического моделирования движения людей. Проведено исследование различных методов оценки, приводится их сравнительный анализ.

Ключевые слова. Численная оценка плотности потока людей, метод Монте-Карло, оценка Розенблат-Парзена, математическое моделирование движения людей.

1 Введение

Одним из актуальных направлений математического моделирования является создание математических моделей движения людей. Такие модели используются при решении задач комплексной безопасности в части оценивания времени эвакуации людей из помещений, зданий, сооружений при различных сценариях развития чрезвычайной ситуации.

Многочисленные экспериментальные исследования показали [1], что существует устойчивая качественная зависимость между скоростью движения потока людей и его плотностью: с ростом плотности скорость убывает. Эта зависимость называется фундаментальной диаграммой. Существуют как табличные, так и аналитические выражения фундаментальной диаграммы [2]. Удовлетворение свойствам фундаментальной диаграммы является одним из критериев качества математической модели движения людей. Кроме того, существуют математические модели (например, индивидуально-поточного типа), в которых для описания перемещения используется зависимость скорости человека (потока людей) от текущей плотности в явном виде [3]. Как следствие, при компьютерном моделировании движения людей возникает задача оценивания плотности потока в момент времени t на локальном участке. Поясним, что в силу сравнимых линейных размеров среды и рассматриваемых объектов в этой среде (людей), в задачах и движении людей термин плотность имеет несколько иной смысл, чем принято его понимать в физических задачах, например гидродинамики. Здесь под плотностью понимается мера заполненности пространства людьми. Причем интересует именно локальная (относительно конкретного человека) характеристика.

Методам решения задачи численного оценивания плотности людского потока и посвящена данная работа: формулируется постановка задачи, описываются возможные методы решения, приводится их сравнительный анализ.

2 Постановка задачи

Предполагаем, что граничные условия (плоская область, в которой моделируется движение людей) известны и заданы в глобальной системе координат. Каждый человек в момент времени t задан своей проекцией на плоскость, форма проекции – диск, радиуса R , [м], с центром в точке (x, y) . В области расположено произвольное число людей с учетом принципа исключения (проекции не пересекаются).

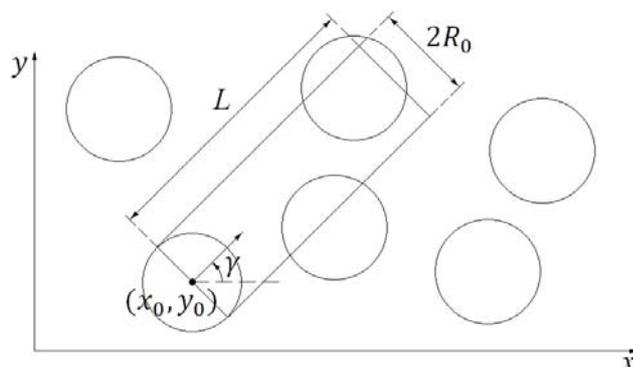


Рис. 1: Иллюстрация к постановке задачи.

Считаем, что размер и форма участка, на котором требуется оценить плотность людей, известны. Как правило, это определяется моделью движения людей. В данном случае будем рассматривать прямоугольный участок V ширины $2R_0$, [м], и длины L , [м] (как изображено на Рис. 1). В качестве точки привязки участка V определим координату (x_0, y_0) , которая совпадает с центром одного из дисков радиуса R_0 , а так же считаем, что участок находится под углом наклона γ относительно оси Ox глобальной системы координат. Требуется оценить плотность покрытия участка V другими дисками.

3 Решение задачи

Было разработано и программно реализовано несколько методов оценивания плотности потока. Способы отличаются количеством вычислительных операций, точностью и физической интерпретацией. Сначала рассматриваются методы, дающие равномерную оценку плотности, затем – взвешенную.

Во всех алгоритмах в первую очередь исключаются из рассмотрения все те диски, которые вообще не пересекаются с участком V . Далее происходит переход к новой системе координат $Ox'y'$:

$$\begin{cases} x' = (x_i - x_0)\cos \gamma + (y_i - y_0)\sin \gamma \\ y' = -(x_i - x_0)\sin \gamma + (y_i - y_0)\cos \gamma \end{cases}$$

где (x_i, y_i) – координаты центра i -го диска, пересекающего участок V .

Таким образом, наклон участка V совпадает с осью Oy' , что упрощает все формулы и вычисления в алгоритме, в то время как сам переход к новой системе координат занимает незначительное число операций.

3.1 Аналитический метод

Аналитический метод состоит в нахождении точной площади покрытия дисками рассматриваемого участка V и последующее соотнесение этой площади с общей площадью участка:

$$D = \hat{S}/S_V$$

Были разработаны алгоритм идентификации положения каждого диска относительно участка V и соответствующие геометрические формулы вычисления площади пересечения фигур (участка V и рассматриваемого диска).

3.2 Сеточный метод

Сеточный метод заключается в разбиении участка V на маленькие ячейки и проверке на пересечение каждой ячейки каким-либо диском. Отношение количества пересекаемых ячеек к общему числу ячеек дает искомую оценку плотности:

$$D = \hat{N}/N_0$$

3.3 Метод Монте-Карло

В соответствии с известным методом Монте-Карло внутри участка V генерируется P точек. Если точка попадает на диск, то инкрементируется счетчик, который в итоге содержит значение \hat{P} – количество точек, которые лежат в одном из дисков. Отношение

$$D = \hat{P}/P$$

дает равномерную оценку плотности покрытия участка V другими дисками.

3.4. Взвешенная оценка плотности Розенבלата-Парзена

Здесь рассматривается метод, дающий взвешенную оценку плотности. Такая оценка позволяет численно различать одинаковые с точки зрения ранее приведенных

методов ситуации как, например, представленные на Рис. 2.



Рис. 2: Пример расчетной ситуации.

Причем в первом случае движение невозможно, во втором – возможно.

Вычисление взвешенной оценки плотности состоит из двух шагов. Сначала, согласно методу Монте-Карло, генерируется P случайных точек и выбирается \hat{P} попавших на диски в рамках участка V . Обозначим координаты последних $(x_i, y_i), i = \overline{1, \hat{P}}$. При вычислении плотности каждая такая точка наделяется некоторым “весом” – функцией, зависящей от расстояния от этой точки до точки (x_0, y_0) . Для этого используется известная непараметрическая ядерная оценка плотности Розенבלата-Парзена [4] с ядром Епанечникова [5]:

$$D = \frac{1}{C_1 C_2 P} \sum_{i=1}^{\hat{P}} \phi\left(\frac{x_0 - x_i}{C_1}\right) \phi\left(\frac{y_0 - y_i}{C_2}\right)$$

где D – итоговая суммарная взвешенная плотность, C_1, C_2 – коэффициенты размытости для x и y -координаты, $C_1 = R_0 \cdot 5^{-\frac{1}{2}}, C_2 = L \cdot 5^{-\frac{1}{2}}, \phi(t) = 0.335 - 0.067t^2, (x_0, y_0)$ – координаты центра точки привязки, (x_i, y_i) – координаты i -ой точки, попавшей на какой-нибудь круг.

4 Анализ рассмотренных методов оценивания локальной плотности потока людей

Самым точным методом является аналитический, так как погрешность в результате может возникать только вследствие погрешности записи чисел в памяти компьютера. Также данный метод является самым быстрым, он на порядок быстрее, чем метод Монте-Карло и сеточный. Однако, используя аналитический алгоритм оценки плотности сложно перейти к желаемой взвешенной плотности. В исследованиях аналитических метод использовался для проверки качества расчетов другими методами.

Численные методы Монте-Карло и сеточный работают примерно с одинаковой скоростью, однако сотни вычислительных экспериментов показали, что при одном и том же числе генерируемых точек и ячеек

соответственно сеточный метод дает менее точный результат. Уже при 5000 точек в методе Монте-Карло на участке площадью $5 \times 0,4 \text{ м}^2$ точность оценивания плотности достигает 99 %. Сеточный метод дает такую же точность при количестве ячеек в 20 раз большем - 100000 ячеек.

Время выполнения каждого из рассмотренных алгоритмов по каждому методу для наглядности представлены в виде сравнительной таблицы, Табл. 1. Было сделано по 1000 расчетов плотности для одного и того же расчетного случая (при абсолютно одинаковых условиях) каждым методом. Параметры в алгоритмах подобраны таким образом, чтобы точность вычисления в среднем была не менее 99 %.

Таблица 1: сравнительные характеристики методов оценивания плотности.

Метод нахождения плотности	Время 1000 вычислений, в секундах
Аналитический	0,119
Монте-Карло	1,230
Розенблата-Парзена	1,250
Сеточный	12,63

5 Заключение

Исследования показали хорошие вычислительные характеристики двух численных методов оценивания плотности (метод Монте-Карло и оценка плотности Розенблата-Парзена). Аналитический метод самый быстрый, но привязан к геометрическим формам участка V и проекции человека, которые используются в математической модели движения людей. Это является большим недостатком метода с точки зрения его использования при компьютерном моделировании движения людей, поскольку практические приложения накладывают многообразие форм проекций людей [1], [2].

В противовес численные методы Монте-Карло и взвешенного оценивания плотности являются универсальными, не требуют явного выписывания расчетных формул. Определенное нормирование позволяет получить оценку плотности в единицах [чел/м²].

Так же отметим следующую специфику рассмотренной постановки задачи. В данном случае речь идет о методе оценивании локальной плотности в конкретный момент времени от первого лица, к тому же в заданном направлении. Это есть следствие постановки задачи моделирования движения человека [3], когда предполагается (и это согласуется с реальным процессом), что только обстановка по направлению движения влияет на скорость человека. Наглядным примером является движение в прямом коридоре. На начальной стадии движения (во время переходного процесса, если использовать терминологию теории динамических систем) наблюдается растягивание движущейся массы людей за счет достаточно быстро шагающей фронтальной части (поскольку впереди свободно). Средняя часть потока движется существенно медленнее из-за несвободного пространства по ходу движения. Хвостовая часть может некоторое время находиться без движения.

Литература

- [1] В. М. Предтеченский и А. И. Милинский. Проектирование зданий с учетом организации движения людских потоков. Стройиздат, Москва, 1975.
- [2] В.В. Холщевников и Д.А. Самошин. Эвакуация и поведение людей при пожарах. Академия ГПС МЧС России, Москва, 2009.
- [3] E. Kirik, T. Yurgel'yan, A. Malyshev. On discrete-continuous stochastic floor field pedestrian dynamics model SIgMA.DC. In W.Jaskolowski, P.Керка, editors, book "Emergency evacuation of people from buildings", pages 155-161, 2011.
- [4] E. Parzen. On estimation of probability Density Function. Ann. Math. Stat., 33:1065–1076, 1962.
- [5] В. А. Епанечников. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности. Теория вероятностей и ее приложения, XIV:156–161, 1968.

Актуализация процесса моделирования взаимодействия в информационно-обучающей среде

Ольга Аркадьевна Попова

Сибирский федеральный университет
Институт космических и информационных технологий
Красноярск
olgaarc@yandex.ru

Сергей Афанасьевич Ковязин

Сибирский федеральный университет
Институт космических и информационных технологий
Красноярск

Аннотация. В работе рассматривается моделирование взаимодействия участников образовательного процесса в информационно-обучающей среде.

Ключевые слова. информационно-образовательные среды, информационно-телекоммуникационные технологии, модель взаимодействия.

1 Введение

Образование как реальный социальный заказ, отражающий изменения в социуме, может ускорять или тормозить его развитие. Многочисленные исследования доказывают, что высокий интеллектуально-творческий потенциал профессионала — гарантия новых идей и технологий. Поэтому появление новых технологий в обществе и образовательной системе находятся в постоянной взаимосвязи: изменения в обществе ведут к изменениям в образовании, а изменения в образовании, в свою очередь, влияют на жизнь общества.

Важной составляющей высшего образования является педагогическое взаимодействие как основа профессионального становления и личностного совершенствования преподавателя и студента. Поэтому модернизация современного образования предполагает совершенствование взаимоотношений между преподавателем и студентом, развитие диалога между ними, активизацию познания друг друга. Этим и объясняется высокий интерес к проблеме взаимного познания преподавателя и студента со стороны исследователей и практиков.

2 Информационно-образовательная среда вуза

Применение компьютерных технологий в процессе преподавания, подготовке методического материала, а затем использования их на занятиях, в большей степени теперь зависит не от оснащенности компьютерной техникой, не от возможностей учебного заведения, хотя и здесь все время возникают все новые перспективы и направления, требующие своего развития и внедрения, а от подготовленности в области ИКТ непосредственно самого преподавателя.

При этом речь идет уже не просто о внедрении новых информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), а о создании информационно-образовательной среды (ИОС) вуза как системы инструментальных средств и ресурсов, обеспечивающих условия для реализации образовательной деятельности на основе информационных и телекоммуникационных технологий [2], содержащая в своем составе информационную, учебную и организационно-методическую системы. В свою очередь, эти системы могут создавать новые системы (подсистемы), функционирующие внутри данной ИОС: администрирование, документирование, библиотечную, организации учебного процесса, контроля знаний (тестовую) и т.п., взаимодействующие друг с другом.

Разработке и функционированию ИОС образовательных учреждений, в настоящее время уделяется большое внимание специальной литературе, при этом, зачастую лишь умозрительно рассматриваются требования к ИОС, ее возможности, аппаратное и программное обеспечение, как правило, без учета особенностей не только видов учебных учреждений (вуз, колледж, школа, лицей), но и специфики и традиций организации учебного процесса конкретного учебного заведения. При этом составляющие ИОС системы, как и сама ИОС создаются, развиваются и функционируют стихийно исходя из финансовых возможностей образовательного учреждения, изучаемых в нчм дисциплин и подготовленности в области ИКТ преподавательского состава.

3 Моделирование в ИОС

В настоящее время наблюдается актуализация применения метода моделирования для изучения реальных процессов, протекающих в информационно-обучающей среде. Например, с помощью метода моделирования на основе статистического и имитационного подхода изучаются такие вопросы, как выбор траектории обучения студента в системе зачетных единиц, описывается зависимость количества знаний от времени в процессе обучения.

Рассмотрим проблему, обусловленную одной из важных составляющих таких процессов как взаимосвязь, взаимодействие и взаимовлияние как всех

субъектов, включенных в данную среду, так и условий, формирующих ее и обеспечивающих собственное присутствие субъектов в ней. Для описания особенностей этих процессов рассмотрим понятие “информационно-обучающая” среда, а именно два ее аспекта: информационный и обучающий. Информационный аспект актуализировался впервые в работах Ю. А. Шрейдера, который рассматривает информационную среду не только как проводника информации, но и как активное начало, воздействующее на ее участников. Под учебной средой исследователи, как правило, понимают прежде всего взаимосвязь конкретных материальных, коммуникационных и социальных условий, обеспечивающих процессы преподавания и учения. В этом случае предполагается присутствие обучаемого или обучаемых в среде, взаимовлияние, взаимодействие окружения с субъектом. Субъект рассматривается в трех основных направлениях; как участник коммуникационного процесса в основном с точки зрения своей способности представить личное знание в форме информации, как элемент системы с позиции исторически сложившихся форм коммуникации и информационной инфраструктуры. Понятие обучающая среда тесно связано с понятием обучение, которое необходимо рассматривать прежде всего как сложный динамический многофункциональный процесс с обратными связями, включающий деятельность обучающего, того, кто передает знания, и обучаемых, которые эти знания получают.

Анализ публикаций показал, что каждый из выделенных аспектов характеризующие процессы, протекающие в информационно-обучающей среде, изучался, в том числе и с использованием метода моделирования. Например, хорошо известны математические модели поведения человека, использующие аппарат математической психологии. В числе таких моделей можно назвать стохастические модели обучения Буша, Мостеллера, Аткинсона, Бауэра, Эстеса, М.Л. Цетлина и другие. Однако, как отмечает В.Ю. Крылов, каждая из этих моделей описывает поведение человека для ограниченного круга ситуаций и не учитывает рефлексивную динамику процесса обучения. Поэтому в настоящее время актуализируется задача изучения процессов, протекающих в информационно-обучающих средах, с позиции комплексного подхода, учитывающего рефлексивную динамику взаимодействия и взаимовлияния всех субъектов вовлеченных в процесс обучения. В качестве возможного метода решения данной задачи предлагается использовать рефлексивно-игровой подход, представленный в работах Антипина А.С. и Поповой О.А. [3]. В предложенной авторами модели предлагается представить процесс обучения как игру двух лиц в смешанных стратегиях, в котором имеются два игрока: первый Π преподаватель, второй Π группа студентов. Оба игрока обладают по-

тенциальным набором стратегий Π действий, которые в модели Стратегии первого игрока определяют уровень сложности знаний, передаваемых студентам, стратегии второго игрока определяют распределение студентов по подгруппам в зависимости от интеллектуальной подготовки и уровня усвоенных знаний.

Для адекватного описания ситуации обучения выделяются две составляющие. Первая характеризует рациональный аспект игры, который описывается утилитарной (или платежной) матрицей, другая - иррациональный аспект, учитывающий социально-психологические характеристики и морально-этические настроения игроков. В модели интересы преподавателя и группы студентов представлены в виде целевых функций, как суммы билинейной и квадратичной составляющих. Билинейные компоненты этих функций отражают зависимость или воздействие одного игрока на другого, если один из них выбрал свою стратегию. Квадратичные компоненты согласно концепции теории принятия решений описывают предпочтения каждого из игроков при выборе альтернативы на своем стратегическом множестве. В работе [3] показано, что биматричная игра в смешанных стратегиях с равновесием по Нэшу является адекватным инструментом для описания рассматриваемой ситуации.

В настоящее время разрабатывается компьютерная система поддержки мониторинга (КСПМ), где реализуется рефлексивно-игровой подход при моделировании процесса взаимодействия участников в ИОС.

Список литературы

- [1] Кечиев Л. Н., Путилов Г. П., Тумковский С. Р. Информационно-образовательная среда технического вуза. Электронный ресурс. *Режим доступа:* http://www.cnews.ru/reviews/free/edu/it_russia/institute.shtml.
- [2] Старых В.А., Башмаков А.И. Профиль стандартов и спецификаций информационно-образовательных сред. Общая структура и принципы построения [электронный ресурс] / В.А. Старых, А.И. Башмаков. *ФГУ ГНИИ ИТТ Информика. Режим доступа:* www/citforum.ru/consulting/articles/staryjh.
- [3] Антипин А.С., Попова О.А. Игра двух лиц в смешанных стратегиях как модель обучения. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, 45:9:1566–1574, 2005.

Измерение полного сет-расстояния и сет-рассеяния множества событий

Маргарита Игоревна Попкова

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
margomana@mail.ru

Аннотация. В статье будут рассмотрены новые эвентологические понятия сет-расстояния, полной ковариации и сет-рассеяния.

Ключевые слова. сет-расстояние множества событий, полная ковариация множества событий, сет-рассеяние множества событий.

1 Понятие сет-расстояния

Обычно расстояние определяется лишь для пар элементов, а не для произвольных множеств элементов. Сет-функция Δ_X , определяемая для $X \subseteq \mathfrak{X}$ как

$$\Delta_X = P\left(\bigcup_{x \in X} x\right) - \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} P(x),$$

называется сет-расстоянием множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$. Данная функция обобщает понятие вероятностного расстояния между двумя событиями $x, y \in \mathfrak{X}$:

$$\Delta_{x,y} = \frac{1}{2} P(x \Delta y),$$

а так же для произвольного $X \subseteq \mathfrak{X}$ обладает привычными свойствами расстояния: неотрицательностью и симметричностью.

Далее, определим расстояние события до множества. Пусть $x \in \mathfrak{X}$, расстоянием этого события до множества $X \subseteq \mathfrak{X}$ называется действительная числовая функция $d: \mathfrak{X} \times 2^{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathbb{R}$, которая на $(x, X) \in \mathfrak{X} \times 2^{\mathfrak{X}}$ принимает значение

$$d(x, X) = \frac{1}{|X|} P\left\{x \Delta \left(\bigcup_{y \in X} y\right)\right\},$$

Расстояние между событием и множеством событий – это частный случай расстояния между множествами событий. Расстоянием между множествами событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ и $Y \subseteq \mathfrak{X}$ называется действительная числовая функция

$$d: 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathbb{R},$$

которая на $(X, Y) \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ принимает значение, равное вероятности симметрической разности объединений этих двух множеств событий:

$$d(X, Y) = \frac{1}{|X| \cdot |Y|} P\left\{\left(\bigcup_{x \in X} x\right) \Delta \left(\bigcup_{x \in Y} x\right)\right\},$$

Следует отметить, что в этих определениях идет речь о псевдометриках, т.к. для этих двух определений не выполняется аксиома нуля.

2 Ковариации множества событий и их метрические интерпретации

Рассмотрим произвольное конечное множество событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ из алгебры вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) . События $x \in \mathfrak{X}$ имеют вероятности $P(x)$. В случае, если $\mathfrak{X} = \{x, y\}$ – дуплет, получаем следующую формулу парной ковариации:

$$\text{Kov}_{xy} = P(x \cap y) - P(x)P(y),$$

которая имеет следующую метрическую интерпретацию:

$$2\text{Kov}_{xy} = P^i(x \Delta y) - P(x \Delta y),$$

где $P(x \Delta y) = P(x \cup y) - P(x \cap y)$ – вероятностное расстояние между событиями в общем случае, а $P^i(x \Delta y) = P(x \cup y) - P(x)P(y)$ – вероятностное расстояние между независимыми событиями, имеющими те же вероятности, что и x и y . Аналогично можно выписать формулы для М-дополнения $\{x, y\}^c$ дуплета событий $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$:

$$\text{Kov}_{\{x,y\}^c} = P(x^c \cap y^c) - P(x^c)P(y^c),$$

которая совпадает с парной ковариацией дуплета событий $\{x, y\}$. Парная ковариация М-дополнения дуплета событий так же имеет метрическую интерпретацию:

$$2\text{Kov}_{\{x,y\}^c} = P^i(x^c \Delta y^c) - P(x^c \Delta y^c),$$

Таким образом, парная ковариация, а также парная ковариация М-дополнения дуплета событий являются мерами зависимости событий из дуплета, а их метрические интерпретации имеют смысл разности вероятностных расстояний между событиями дуплета в общем и независимом случаях.

Рассматривая вместо дуплета произвольное подмножество событий из \mathfrak{X} можем определить

мультиарные ковариации множества событий, а также его М-дополнения:

$$\begin{aligned} \text{Kov}_X &= P\left(\bigcap_{x \in X} x\right) - P^i\left(\bigcap_{x \in X} x\right), \\ \text{Kov}_{X^c} &= P\left(\bigcap_{x \in X} x^c\right) - P^i\left(\bigcap_{x \in X} x^c\right), \end{aligned}$$

Мультиарные ковариации множества событий и его М-дополнения представляют собой обобщение понятия парных ковариаций дуплета событий и определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \text{Kov}_X &= \Delta_{X^c}^i - \Delta_{X^c}, \\ \text{Kov}_{X^c} &= \Delta_X^i - \Delta_X \end{aligned}$$

3 Сет-рассеяние множества событий

Полная ковариация, или сет-рассеяние, множества событий \mathfrak{X} определяется как величина, равная сумме произведений мультиарных ковариаций Kov_X подмножеств $X \subseteq \mathfrak{X}$ на мощности этих подмножеств:

$$\overline{\text{Kov}}_{\mathfrak{X}} = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} |X| \text{Kov}_X$$

Полная ковариация (сет-рассеяние) множества событий метрически интерпретируется как разность полных сет-расстояний этого множества в тотально независимом и общем вариантах:

$$\overline{\text{Kov}}_{\mathfrak{X}} = \bar{\Delta}_{\mathfrak{X}}^i - \bar{\Delta}_{\mathfrak{X}}$$

где $\bar{\Delta}_{\mathfrak{X}}$ - полное сет-расстояние, которое определяется как сумма сет-расстояний всех подмножеств данного множества:

$$\bar{\Delta}_{\mathfrak{X}} = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} (\Delta_X)$$

Отметим, что сет-рассеяние есть совокупная метрическая характеристика структуры зависимости множества событий.

В качестве практического примера можно рассмотреть любую задачу на измерение полного сет-расстояния и сет-рассеяния множества событий.

Литература

- [1] О.Ю. Воробьев. Меры рассеяния множества событий по пространству элементарных исходов. Труды XV Международ. ЭМ конференции по эвентологической

математике, Красноярск: СФУ, НИИППБ (под ред. Олега Воробьева):54–63, 2011.

- [2] О.Ю. Воробьев. Эвентология. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с.
[3] Е.Е. Голденко. О некоторых полезных интерпретациях сет-рассеяния множества событий. Труды XV Международной ЭМ конференции по эвентологической математике и смежным вопросам, Красноярск, 2011.

Обобщение эвентологической функции принадлежности в теории нечетких событий

**Марина Игоревна
Рыбникова**

Сибирский федеральный университет
Красноярск
smeiky@yandex.ru

**Дарья Владиславовна
Семенова**

Сибирский Федеральный Университет
Институт математики
Красноярск
dariasdv@gmail.com

**Яков Викторович
Нартов**

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
yanartov1@gmail.com

Аннотация. Данная статья предлагает обобщение индикатора нечеткого события, общепринятого в эвентологической теории нечетких событий: индикатор нечеткого события представим в виде взвешенной суммы индикаторов “обычных” колмогоровских событий, порождающих данное нечеткое событие.

Ключевые слова. Эвентология, нечеткое событие, весовая функция, индикатор нечеткого события, Эвентологическая функция принадлежности нечеткого события.

1 Введение

В математике проблема определения числовых характеристик совокупности событий/ множеств стоит достаточно остро [5], [7]. Понятие “события” является ключевым понятием в эвентологической теории [9]. Таким образом, возникает необходимость в определении числовых характеристик как одного события, так и совокупности событий.

С развитием эвентологической теории, в особенности ее прикладного направления, все чаще исследователи задаются целым рядом вопросов относительно высказываемых агентами мнений по поводу изучаемых явлений/ событий: на сколько мнения агентов согласованы между собой, на сколько мнения агентов в действительности отражают складывающуюся ситуацию. Наиболее важным вопросом является вопрос о равноценности мнения агентов в свете изучаемого явления/ события.

Именно на данной почве и возникает ряд вопросов: а правомерно ли “усреднять” всех экспертов/ их мнения? А присутствуют ли среди данных агентов те, чьи мнения/ данные особенно ценны при принятии решения в той или иной области? [3], [6].

На фоне данных размышлений и возникла идея обращения к теории весовой функции, развитая в данной работе.

2 Определение базовых понятий

Множество случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$,

или (что эквивалентно), случайное множество событий

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}) \quad (1)$$

под конечным множеством событий \mathfrak{X} можно определить эквивалентным образом, задав на множестве $2^{\mathfrak{X}}$ всех подмножеств конечного множества \mathfrak{X} одну из следующих функций множеств [9], где $X \in 2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}(\text{ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right) \quad (2)$$

— эвентологическое распределение (Э-распределение) I-рода,

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \mathbf{P}(\text{ter}_X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \quad (3)$$

— Э-распределение II-рода,

$$p^X = \mathbf{P}(K \subseteq X) = \mathbf{P}(\text{ter}^X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right) \quad (4)$$

— Э-распределение III-рода.

Таким образом, случайное множество событий определяется как частный вариант случайного элемента со значениями $K(\omega) \subseteq \mathfrak{X}$, которые интерпретируются как случайные множества [2]. Данные случайные множества сформированы из тех событий x , которые наступают при наступлении $\omega \in \Omega$:

$$K(\omega) = \{x \in \mathfrak{X} : \omega \in x\} \subseteq \mathfrak{X}.$$

Вероятностные распределения, определяющие множество случайных событий \mathfrak{X} и случайное множество событий K , попарно связаны взаимнообратными формулами обращения Мебиуса [9]. К примеру, вероятности I-го и II-го рода (где $X \in 2^{\mathfrak{X}}$):

$$p_X = \sum_{X \subseteq Y} p(Y), \quad p(X) = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y. \quad (5)$$

Множество случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$,

и случайное множество событий $K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}})$, определенное под множеством избранных событий \mathfrak{X} , позволяют записывать одни и те же события, измеримые относительно алгебры \mathcal{F} , двумя способами:

- на языке событий – подмножеств Ω ;
- на языке множеств событий – подмножеств \mathfrak{X} .

Пусть множество \mathfrak{X} – это конечное множество имен, а множество \mathfrak{M} – это конечное множество агентов. Определим декартово произведение

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{M} = \{(x, \mu) : x \in \mathfrak{X}, \mu \in \mathfrak{M}\}.$$

Рассмотрим множество $2^{\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}}$, содержащее все подмножества декартова произведения $\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$. Количество элементов в таком множестве не сложно подсчитать:

$$|2^{\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}}| = 2^{|\mathfrak{X}| \cdot |\mathfrak{M}|}.$$

Определение 48. *Соответствие между двумя множествами \mathfrak{X} и \mathfrak{M} – произвольное подмножество \mathcal{C} декартова произведения $\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$.*

Очевидно, что совокупность всех соответствий между \mathfrak{X} и \mathfrak{M} совпадает со множеством $2^{\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}}$ [2].

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Вложим следующий смысл в декартово произведение $\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$. Каждая пара $(x, \mu) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$ является подмножеством Ω . Обозначим $x_\mu = (x, \mu) \subseteq \Omega$. Событие x_μ состоит из таких элементарных исходов $\omega \in \Omega$, что агент $\mu \in \mathfrak{M}$ считает, что произошло событие с именем $x \in \mathfrak{X}$. Таким образом, элементами декартова произведения $\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$ “занумерованы” “обычные” колмогоровские события. Итак,

Определение 49. *Матрица избранных событий определяется при помощи двух конечных множеств \mathfrak{X} и \mathfrak{M} как множество событий*

$$\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu, x \in \mathfrak{X}, \mu \in \mathfrak{M}\} = \{\sim\}, \quad (6)$$

где $x_\mu \in \mathfrak{F}$ – измеримые относительно алгебры \mathfrak{F} случайные события. Таким образом, каждая пара $(x, \mu) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$ определяет одно случайное событие $x_\mu \subseteq \Omega$ [9].

Определим случайное соответствие [2] как случайный элемент со значениями в пространстве соответствий между конечными множествами. Случайным соответствием \mathcal{C} между конечными множествами \mathfrak{X} и \mathfrak{M} называется измеримое отображение

$$\mathcal{C} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (2^{\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}}, 2^{2^{\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}}}).$$

Таким образом, случайное соответствие \mathcal{C} – это случайное множество со значениями в $2^{\mathfrak{X} \times \mathfrak{M}}$.

Таким образом, если мы рассматриваем матрицу избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ как обычное множество избранных событий из алгебры \mathcal{F} вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, тогда случайное соответствие \mathcal{C} – это измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в измеримое пространство $(2^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}}, 2^{2^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}}})$:

$$\mathcal{C} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (2^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}}, 2^{2^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}}}),$$

где

- $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ – выделенное из алгебры конечное множество избранных событий,
- $2^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}}$ – множество всех подмножеств $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$, или булеан множеств,
- $2^{2^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}}}$ – алгебра, состоящая из множества всех подмножеств $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

И это отображение измеримо, это означает, что для любого $A \in 2^{\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}}$ существует прообраз $\mathcal{C}^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, такой, что

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\mathcal{C}^{-1}(A)).$$

Каждое конечное множество событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{F}$ разбивает пространство элементарных исходов Ω на события-терраски, им порожденные:

$$\Omega = \sum_{V \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}} \text{ter}(V),$$

где

$$\text{ter}(V) = \bigcap_{v \in V} v \bigcap_{v \in V^c} v^c. \quad (7)$$

Здесь $V \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$, $V^c = \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} - V$, $v \in V \subset \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$, $v^c = \Omega - v$.

В эвентологии *случайный эксперимент* заменяется *нечетким экспериментом* [9]. Фундаментальное отличие между *нечетким экспериментом* и *случайным экспериментом* заключается в непосредственном участии в нечетком эксперименте множества индивидуальных разумов \mathfrak{M} .

Рассмотрим некий случайный эксперимент в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, за которым наблюдают множество агентов \mathfrak{M} .

Для некоторого агента μ множество событий \mathfrak{X}_μ , (столбец с номером μ матрицы избранных событий) можно трактовать как “видение” или восприятие агентом μ множества событий \mathfrak{X} при некотором случайном эксперименте. Очевидно, что $\mathfrak{X}_\mu \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{F}$.

Рассмотрим агента μ . Рассмотрим соответствие $\mathfrak{X} \times \mu \subseteq \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$. И определим случайное соответствие между конечными множествами \mathfrak{X} и агентом μ :

$$\mathcal{C}_\mu : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (2^{\mathfrak{X}_\mu}, 2^{2^{\mathfrak{X}_\mu}}).$$

Обозначим $\omega_\mu = \omega \in \Omega$ — элементарное событие из пространства Ω .

Напомним, что в общем случае мы не можем различать элементарные события $\omega \in \Omega$, однако мы можем различать события-терраски, в которое оно попадает.

Множество событий \mathfrak{X}_μ разбивает пространство элементарных исходов на $2^{|\mathfrak{X}_\mu|}$ событий-террасок:

$$\text{ter}_\mu(X_\mu | \mathfrak{X}_\mu) = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} x_\mu \bigcap_{X^c \in \mathfrak{X}} x_\mu^c, \quad X_\mu \subseteq \mathfrak{X}_\mu.$$

Очевидно, что все события-терраски, порожденные множеством событий \mathfrak{X}_μ , “складываются” из событий-террасок $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

В общем виде для всех $X_\mu \subseteq \mathfrak{X}_\mu$, $\mu \in \mathfrak{M}$ имеем следующую формулу [2]:

$$\text{ter}_\mu(X_\mu | \mathfrak{X}_\mu) = \sum_{Z \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} \setminus \mathfrak{X}_\mu} \text{ter}(X_\mu + Z). \quad (8)$$

Таким образом, каждый агент $\mu \in \mathfrak{M}$ “порождает” свое разбиение исходного пространства элементарных событий

$$\Omega = \Omega_\mu = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \text{ter}_\mu(X_\mu | \mathfrak{X}_\mu),$$

и, следовательно, свою алгебру событий $\mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}$ [2]. Таким образом, получаем набор из $|\mathfrak{M}|$ -измеримых пространств $\{(\Omega, \mathcal{F}_\mu), \mu \in \mathfrak{M}\}$.

В соответствии с этим, каждый агент $\mu \in \mathfrak{M}$ воспринимает один и тот же случайный эксперимент в своем частном вероятностном пространстве $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mathbf{P})$. Тогда

Определение 50. Множества элементов “столбцов” $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu, x \in \mathfrak{X}\}$ будем называть \mathfrak{X} -нечеткими событиями

$$\tilde{\mu} = \{x_\mu, x \in \mathfrak{X}\} = \mathfrak{X}_\mu,$$

образующими множеством $\tilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}\}$.

Аналогичные рассуждения можно провести при фиксированном $x \in \mathfrak{X}$, т.е. при фиксированной строке матрицы избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

В общем виде для всех $x_W \subseteq x_{\mathfrak{M}}$, $x \in \mathfrak{X}$ имеем формулу

$$\text{ter}_x(x_W | x_{\mathfrak{M}}) = \sum_{Z \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} \setminus x_{\mathfrak{M}}} \text{ter}(x_W + Z). \quad (9)$$

Таким образом, каждое имя события $x \in \mathfrak{X}$ “порождает” свое разбиение исходного пространства элементарных событий

$$\Omega = \Omega_x = \sum_{W \subseteq \mathfrak{M}} \text{ter}_x(x_W | x_{\mathfrak{M}}),$$

и, следовательно, свою алгебру событий $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}$ [2]. И снова получаем набор из $|\mathfrak{X}|$ измеримых пространств $\{(\Omega, \mathcal{F}_x), x \in \mathfrak{X}\}$.

Определение 51. Множества элементов “строк” $x_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$ будем называть \mathfrak{M} -нечеткими событиями $\tilde{x} = \{x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\} = x_{\mathfrak{M}}$, образующими множество $\tilde{\mathfrak{X}} = \{\tilde{x}, x \in \mathfrak{X}\}$.

Далее преимущественно будем рассматривать пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$.

Определение 52. Измеримое пространство \mathfrak{M} -нечетких событий — это $|\mathfrak{M}|$ -множество

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}) = \{(\Omega, \mathfrak{F}_\mu), \mu \in \mathfrak{M}\}, \quad (10)$$

состоящее из измеримых пространств событий.

Необходимо подчеркнуть тот факт, что эвентологическая теория говорит о вероятности события $\mathbf{P}(x_\mu)$ как об одном из существенных свойств события $x_\mu \subseteq \Omega$, которое воспринимается и познается разумом. Без вероятности $\mathbf{P}(x_\mu)$ событие x_μ существовать не может. Точно также, как и вероятность $\mathbf{P}(x_\mu)$ не может существовать без события x_μ . Вероятность события характеризует вероятность разума “со-быть”, степень возможности разума “со-быть” — воспринять и осознать наступление ($\omega \in x_\mu$) данного события x_μ в результате исхода бытия $\omega \in \Omega$. Вероятность бытия отражает основополагающее отношение разума события и бытия. Вероятность события лежит в основе вероятностных закономерностей, описывающих природу объективной и субъективной неопределенности [9].

В [9] было предложено определять вероятность нечеткого события \tilde{x} как среднее арифметическое вероятностей “обычных” колмогоровских событий, порождающих данное нечеткое событие, то есть

$$\mathbf{P}(\tilde{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \cdot \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(x_\mu).$$

Однако, не смотря на то, что сама по себе проблема подбора экспертов является одной из наиболее сложных в теории и практике экспертных исследований [3], [6], возникает вопрос: на сколько правомерно уравнивать мнения всех агентов? Или же: на сколько правомерно оценивать одинаково все события, воспринимаемые разумом, влияние которых на результат исследований является непосредственным.

В эвентологической теории нечетких событий также возникает необходимость обращения к весовой функции, вызванная тем, что исследование событий и явлений основаны на мнениях определенного множества разумов (\sim агентов/ экспертов).

Таким образом, авторами данной статьи предлагается каждому эксперту/ агенту присвоить некоторый

“вес” — свою значимость при проведении того или иного исследования. Стоит признать, что во многих решаемых задачах данный вопрос очень важен [3]. Это касается, в особенности, задач управленческого характера [?].

Однако, на этом авторы не останавливаются и идут несколько дальше: здесь также предлагается и каждому событию x из \mathfrak{X} присвоить свой весовой коэффициент.

В качестве весовой функции мы будем использовать индикатор нечеткого события.

3 Индикатор нечеткого события как взвешенная функция

Весовой функцией принято считать математическую конструкцию, используемую при проведении суммирования, интегрирования или усреднения с целью придания некоторым элементам большего веса в результирующем значении по сравнению с другими элементами [5]. Подобная задача нередко возникает в статистике и математическом анализе, тесно связана с теорией меры [4]. Отметим, что весовые функции могут быть использованы как для дискретных, так и для непрерывных величин. Итак,

Определение 53. Дискретная весовая функция

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^+$$

представляет собой положительную функцию, определенную на дискретном множестве значений A , которое обычно конечно или счетно.

Если функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ определена на области вещественных чисел, то взвешенная сумма, определяется как

$$\sum_{a \in A} f(a) \cdot \varphi(a).$$

Основным плюсом такого подхода является возможность задания различных функций в качестве весовых, и тем самым, возможность моделировать различные ситуации. Заметим, что такое задание функций является дискретным, так как мы фактически задаем значения функции на ограниченном количестве элементов.

Рассмотрим дискретную весовую функцию

$$a : \mathfrak{M} \rightarrow [0, 1], \quad (11)$$

нормированную единицей, т.е. $a(\mu) = a_\mu$ для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ и $\sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu = 1$.

Так как функция дискретная, она полностью определяется набором значений $a_{\mathfrak{M}} = \{a_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$. Для заданного множества \mathfrak{M} мы можем рассматривать

$|\mathfrak{M}| - 1$ мерный симплекс значений

$$\Lambda_{\mathfrak{M}} = \{a_{\mathfrak{M}} \mid a_\mu \geq 0, \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu = 1\}.$$

Очевидно, что ранее рассматриваемая функция $\{a_\mu = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}, \forall \mu \in \mathfrak{M}\} \in \Lambda_{\mathfrak{M}}$.

Если рассматривать измеримое пространство (Ω, \mathfrak{F}) и избранное множество событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{F}$, то для любого события x_μ из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ можно определить индикатор $\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$:

$$\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in x_\mu, \\ 0, & \text{если } \omega \notin x_\mu, \end{cases}$$

являющийся \mathfrak{F} -измеримой функцией на Ω [4]. О значениях индикатора события x_μ можно говорить как о степенях принадлежности э-событий $\omega \in \Omega$ событию x_μ . Сам индикатор $\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$, как функцию на Ω , естественно называть *функцией степени принадлежности* э-событий “обычному” событию x_μ [9].

Далее рассмотрим $|\mathfrak{M}|$ -измеримое пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$ и нечеткое событие \tilde{x} .

Определение 54. Эвентологическая функция принадлежности \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{x} описывается формулой (12).

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}}(\omega) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad (12)$$

где $\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$ представляет собой индикатор “обычного” колмогоровского события x_μ .

Аналогичным образом вводится понятие индикатора \mathfrak{X} -нечеткого события. По-прежнему работая в пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$, определим дискретную весовую функцию b

$$b_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow [0, 1], \quad (13)$$

— поставим каждому событию x из \mathfrak{X} в соответствии некоторый коэффициент b_x , то есть $b(x) = b_x$. Данную функцию также нормируем единицей: $\sum_{x \in \mathfrak{X}} b_x = 1$.

Так как функция дискретная, то она полностью определяется набором значений $b_{\mathfrak{X}} = \{b_x, x \in \mathfrak{X}\}$. Для заданного множества \mathfrak{X} мы также можем рассматривать $|\mathfrak{X}| - 1$ мерный симплекс значений

$$\Lambda_{\mathfrak{X}} = \{b_{\mathfrak{X}} \mid b_x \geq 0, \sum_{x \in \mathfrak{X}} b_x = 1\}.$$

Также становится очевидным, что ранее рассматриваемая функция $\{b_x = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}, \forall x \in \mathfrak{X}\} \in \Lambda_{\mathfrak{X}}$.

Заметим, что как функция $a_{\mathfrak{M}}$, также как и функция $b_{\mathfrak{X}}$ является мерой [5], [4].

Таким образом,

Определение 55. Эвентологическая функция принадлежности \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$ описывается формулой (14).

$$\mathbf{1}_{\tilde{\mu}}(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} b_x \cdot \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \mu \in \mathfrak{M}, \quad (14)$$

где $\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$ представляет собой индикатор “обычного” колмогоровского события x_μ .

Индикатор “обычного” события по определению является измеримой по Борелю функцией [5], [7]. Тогда и индикатор нечеткого события также будет функцией измеримой.

Данный подход — с использованием взвешенных функций — имеет некоторое преимущество. Происходит это по причине того, что в настоящее время экспертный опрос может быть признан одним из немногих инструментов практического обоснования и выработки прогнозов в условиях слабой структуры объектов прогнозирования и их окружения [?].

В практике прикладных социологических исследований могут возникать ситуации, когда для оценки какого-либо явления трудно либо вообще невозможно выделить объект — носитель проблемы. И, как следствие, становится невозможным его использование в качестве источника информации. Чаще всего такие ситуации связаны с попыткой прогнозировать изменение того или иного социального явления, процесса. Такая ситуация может прослеживаться и в связи с необходимостью представить состояние интересующего предмета через 1, 2, 5 и более лет. Также, порой, возникает необходимость давать объективную оценку таким сторонам деятельности и качествам людей, по которым их самооценка может оказаться искаженной. Подобная информация может исходить только от компетентных лиц — экспертов. Эксперт должен иметь глубокие знания о предмете или объекте исследования [6].

Если нет практической возможности определить значения весовых коэффициентов $a_\mu, \forall \mu \in M$, то теоретически можно полагать, что $a_\mu = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}$ для всех $\mu \in \mathfrak{M}$. Тогда (12) представляет собой эвентологическую функцию принадлежности, предложенную О.Ю.Воробьевым [9].

Таким образом, становится очевидным, что (12) представляет собой обобщение общепринятой в эвентологической теории нечетких событий функции принадлежности (12).

Те же рассуждения можно провести и с коэффициентами $b_x, \forall x \in \mathfrak{X}$.

Далее приведем формулы, которые представляют индикаторы \mathfrak{X} - и \mathfrak{M} -нечетких событий в более конструктивном виде. Данные формулы значительно облегчают практическое использование данных осново-

полагающих характеристик нечетких событий. Однако, для начала, рассмотрим простой пример “Возраст”. Данный пример достаточно хорошо изучен как в классической теории нечетких множеств Заде [10], так и в эвентологической теории нечетких событий О.Ю.Воробьева [9]. Здесь подобный пример позволит продемонстрировать и понять смысл и методику использования весовых функций, а также продемонстрировать обобщение некоторых теоретических положений, которые хорошо известны в эвентологической теории нечетких событий [9].

Пример 1. Пусть нечеткий эксперимент происходит в пространстве (Ω, \mathfrak{F}) . Пусть отрезок действительной оси выступает как множество элементарных событий Ω . Таким образом, элементарное событие $\omega \in \Omega$ является точкой действительной оси.

Пусть в нечетком эксперименте, в котором участвует агент (разумный объект) из конечного множества \mathfrak{M} . Каждый агент $\mu \in \mathfrak{M}$ характеризует каждую синтагму x из множества \mathfrak{X} . Случайное событие x_μ является решением агента $\mu \in \mathfrak{M}$, в котором он сопоставляет некоторый отрезок действительной оси из Ω с некоторой синтагмой $x \in \mathfrak{X}$ [11].

Пусть $\mathfrak{X} = \{x, y\}$, где $x = \{\text{молодой мужчина}\}$ и $y = \{\text{молодая женщина}\}$. Пусть $\mathfrak{M} = \{\mu, \lambda\}$. Рассмотрим числовое нечеткое событие “возраст”. Тогда в качестве множества элементарных событий Ω выступает отрезок действительной оси, например, $[0, 50]$. Элементарным событиям $\omega \in \Omega$ соответствует точка действительной оси, тогда “50” = $\max_{\omega \in \Omega} \omega$. Пусть матрица случайных избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ задается таблицей 1.

\tilde{x}	[20, 30]	[25, 30]
\tilde{y}	[18, 33]	[25, 35]
	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\lambda}$

Таблица 1: Матрица избранных случайных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ при $|\mathfrak{X}| = 2$ и $|\mathfrak{M}| = 2$.

Согласно Определению 51, \mathfrak{M} – нечеткие события \tilde{x} и \tilde{y} в данном случае представимы в виде (15).

$$\tilde{x} = \{[20, 30], [25, 32]\}, \quad \tilde{y} = \{[18, 33], [25, 35]\}. \quad (15)$$

Проинтерпретируем \mathfrak{M} -нечеткие события: каждое из них представляет из себя множество мнений (в нашем случае каждое из данных множеств состоит из двух элементов) агентов $(\mu, \lambda \in \mathfrak{M})$ на пару событий x, y .

Также в соответствии с Определением 50, \mathfrak{X} -нечеткие события $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\lambda}$ в рассматриваемом случае принимают вид (16).

$$\tilde{\mu} = \{[20, 30], [18, 33]\}, \quad \tilde{\lambda} = \{[25, 32], [25, 35]\}. \quad (16)$$

Далее определим весовые функции. Пусть $a_{\mathfrak{M}} = \{0.6, 0.4\}, b_{\mathfrak{X}} = \{0.55, 0.45\}$.

Графически \mathfrak{M} -нечеткие события \tilde{x} и \tilde{y} представлены на рисунке 1, \mathfrak{X} -нечеткие события $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\lambda}$ — на рисунке 2.

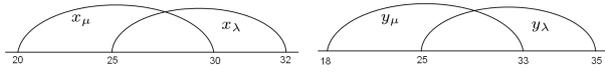


Рис. 1: Графическое представление \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} и \tilde{y} из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

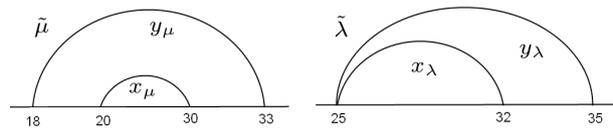


Рис. 2: Графическое представление \mathfrak{X} -нечетких событий $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\lambda}$ из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

В соответствии с [9] события-терраски второго вида представимы в виде набора формул (17) для \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{x} и в виде набора формул (18) для \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{y} .

$$\begin{aligned} \text{ter}_x(\{\emptyset_x\}) &= [0, 20) \cup (32, 50], \\ \text{ter}_x(\{\mu\}) &= [20, 25), \text{ter}_x(\{\lambda\}) = (30, 32], \\ \text{ter}_x(\{\mu, \lambda\}) &= [25, 30]. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{ter}_y(\{\emptyset_y\}) &= [0, 18) \cup (35, 50], \\ \text{ter}_y(\{\mu\}) &= [18, 25), \text{ter}_y(\{\lambda\}) = (33, 35], \\ \text{ter}_y(\{\mu, \lambda\}) &= [25, 33]. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее представим подробно определение индикатора \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{x} .

Итак, проходя постепенно все значения ω от наименьшего (то есть от 0) до наибольшего (то есть до 50), определим значения “обычных” колмогоровских событий x_μ и x_λ . В соответствии с данными значениями индикаторов “обычных” событий и формулой (12), получим индикатор нечеткого события \tilde{x} .

Пусть, для начала, $\omega \in [0, 20)$, тогда, в соответствии с (17), $\omega \in \text{ter}_x(\{\emptyset\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{x}} = 0 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0$.

Если $\omega \in [20, 25)$, то $\omega \in \text{ter}_x(\{\mu\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = 1$, $\mathbf{1}_{x_\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{x}} = 1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0.6$.

Далее если $\omega \in [25, 30]$, то событие ω попадает в событие-терраску $\text{ter}_x(\{\mu, \lambda\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = 1$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{x}} = 1 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.4 = 1$.

Если $\omega \in (30, 32]$, то $\omega \in \text{ter}_x(\{\lambda\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = 0$, $\mathbf{1}_{x_\lambda} = 1$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{x}} = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.4 = 0.4$.

И, наконец, если $\omega \in (32, 50]$, то событие ω снова попадает в событие-терраску $\text{ter}_x(\{\emptyset\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{x}} = 0 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0$.

Тогда, объединяя все значения индикатора \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{x} в одну формулу, получаем формулу (рис. 3).

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \text{ter}_x(\{\emptyset_x\}), \\ 0.4, & \omega \in \text{ter}_x(\{\lambda\}), \\ 0.6, & \omega \in \text{ter}_x(\{\mu\}), \\ 1, & \omega \in \text{ter}_x(\{\mu, \lambda\}). \end{cases} \quad (19)$$

Аналогичным образом получается индикатор \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{y} (см. формулу (20) и рис. 3).

$$\mathbf{1}_{\tilde{y}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \text{ter}_y(\{\emptyset_y\}), \\ 0.4, & \omega \in \text{ter}_y(\{\lambda\}), \\ 0.6, & \omega \in \text{ter}_y(\{\mu\}), \\ 1, & \omega \in \text{ter}_y(\{\mu, \lambda\}). \end{cases} \quad (20)$$

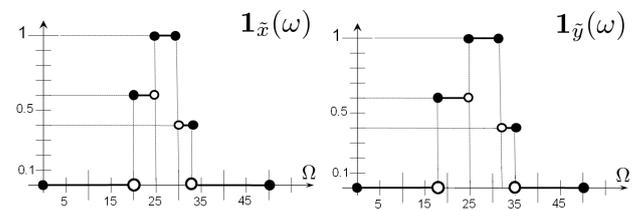


Рис. 3: Графическое представление индикаторов \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} и \tilde{y} из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

Таким образом, обобщая данные формулы, получается Теорема 1 о представлении индикатора \mathfrak{M} -нечеткого события.

Теорема (о представлении индикатора \mathfrak{M} -нечеткого события) Индикатор \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{x} может быть представлен в виде:

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \text{ter}_x(\{\emptyset_x\}), \\ \dots, & \dots, \\ \sum_{\mu \in W_x} a_\mu, & \omega \in \text{ter}_x(W_x), W_x \subseteq \mathfrak{M}, \\ \dots, & \dots, \\ 1, & \omega \in \text{ter}_x(\mathfrak{M}_x), \end{cases} \quad (21)$$

где $\emptyset_x = \emptyset \subseteq \mathfrak{M}$ – пустое, $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ – полное подмножество, и, наконец,

$$\text{ter}_x(W_x) = \bigcap_{\mu \in W_x} x_\mu \bigcap_{\mu \in W_x^c} x_\mu^c, W_x \subseteq \mathfrak{M},$$

– соответствующие события-терраски второго вида, которые образуют собственное разбиение пространства Ω -событий Ω :

$$\Omega = \sum_{W_x \subseteq \mathfrak{M}} \text{ter}_x(W_x).$$

Доказательство. После приведенного Примера 1 доказательство становится прозрачным и следует из построения индикатора \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{x} , подробно рассмотренного в Примере 1.

Пример 2. В рамках Примера 1 и в соответствии с [9] события-терраски первого вида представимы в виде набора формул (22) для \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$ и в виде набора формул (23) для \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\lambda}$.

$$\begin{aligned} \text{ter}_\mu(\{\emptyset_\mu\}) &= [0, 18) \cup (33, 50], \\ \text{ter}_\mu(\{x\}) &= \emptyset, \quad \text{ter}_\mu(\{y\}) = [18, 20) \cup (30, 33], \\ \text{ter}_\mu(\{x, y\}) &= [20, 30]. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{ter}_\lambda(\{\emptyset_\lambda\}) &= [0, 25) \cup (35, 50], \\ \text{ter}_\lambda(\{x\}) &= \emptyset, \quad \text{ter}_\lambda(\{y\}) = (32, 35], \\ \text{ter}_\lambda(\{x, y\}) &= [25, 32]. \end{aligned} \quad (23)$$

Далее представим подробно определение индикатора \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$. Заметим, что индикатор \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$ получается аналогично индикаторам \mathfrak{M} -нечетких событий.

Итак, проходя постепенно все значения ω от наименьшего (то есть от 0) до наибольшего (то есть до 50), определим значения “обычных” колмогоровских событий x_μ и y_μ . В соответствии с данными значениями индикаторов “обычных” событий и формулой (12) получим индикатор нечеткого события \tilde{x} .

Пусть, для начала, $\omega \in [0, 18)$, тогда, в соответствии с (22), $\omega \in \text{ter}_\mu(\{\emptyset_\mu\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{\mu}} = 0 \cdot 0.55 + 0 \cdot 0.45 = 0$.

Если $\omega \in [18, 20)$, то $\omega \in \text{ter}_\mu(\{y\})$. Тогда $\mathbf{1}_{y_\mu} = 1$, $\mathbf{1}_{x_\mu} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{\mu}} = 1 \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.55 = 0.45$.

Далее если $\omega \in [20, 30]$, то $\omega \in \text{ter}_\mu(\{x, y\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = 1$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{\mu}} = 1 \cdot 0.55 + 1 \cdot 0.45 = 1$.

Если $\omega \in (30, 33]$, то $\omega \in \text{ter}_\mu(\{y\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = 0$, $\mathbf{1}_{y_\mu} = 1$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{\mu}} = 0 \cdot 0.55 + 1 \cdot 0.45 = 0.45$.

И, наконец, если $\omega \in (33, 50]$, то $\omega \in \text{ter}_\mu(\{\emptyset\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\tilde{\mu}} = 0 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0$.

Тогда, объединяя все значения индикатора \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$ в одну формулу, получаем формулу (рис. 4).

$$\mathbf{1}_{\tilde{\mu}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \text{ter}_\mu(\{\emptyset_\mu\}), \\ 0.45, & \omega \in \text{ter}_\mu(\{y\}), \\ 1, & \omega \in \text{ter}_\mu(\{x, y\}). \end{cases} \quad (24)$$

Аналогичным образом получается индикатор \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\lambda}$ (см. формулу (25) и рис. 4).

$$\mathbf{1}_{\tilde{\lambda}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \text{ter}_\lambda(\{\emptyset_\lambda\}), \\ 0.45, & \omega \in \text{ter}_\lambda(\{y\}), \\ 1, & \omega \in \text{ter}_\lambda(\{x, y\}). \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, обобщая данные формулы, получается Теорема 2 о представлении индикатора \mathfrak{X} -нечеткого события.

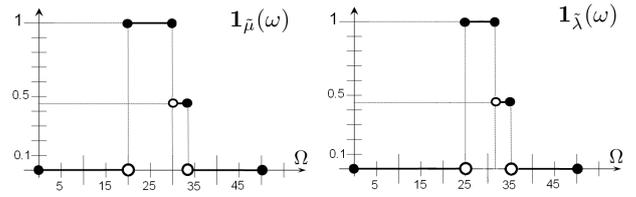


Рис. 4: Графическое представление индикаторов \mathfrak{X} -нечетких событий $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\lambda}$ из \mathfrak{X}_M .

Теорема (о представлении индикатора \mathfrak{X} -нечеткого события) Индикатор \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$ может быть представлен в виде:

$$\mathbf{1}_{\tilde{\mu}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \text{ter}_\mu(\emptyset_\mu), \\ \dots, & \dots, \\ \sum_{x \in X_\mu} b_\mu, & \omega \in \text{ter}_\mu(X_\mu), X_\mu \subseteq \mathfrak{X}, \\ \dots, & \dots, \\ 1, & \omega \in \text{ter}_\mu(\mathfrak{X}_\mu), \end{cases} \quad (26)$$

где $\emptyset_\mu = \emptyset \subseteq \mathfrak{X}$ – пустое, $\mathfrak{X}_\mu = \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$ – полное подмножество, и, наконец,

$$\text{ter}_\mu(X_\mu) = \bigcap_{x \in X_W} x_\mu \bigcap_{x \in X_W^c} x_\mu^c, \quad X_W \subseteq \mathfrak{X},$$

– соответствующие события-терраски первого вида, которые образуют собственное разбиение пространства ω -событий Ω :

$$\Omega = \sum_{X_\mu \subseteq \mathfrak{X}} \text{ter}_\mu(X_\mu).$$

Доказательство. После приведенного Примера 2 доказательство становится прозрачным и следует из построения индикатора \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$, подробно рассмотренного в Примере 2.

Замечание: индикатор нечеткого события не определяет его Между “обычными” событиями и их индикаторами существует взаимнооднозначное соответствие. Данное соответствие состоит в том, что событие определяет свой индикатор, а индикатор – событие. Подобного никак нельзя утверждать об индикаторах нечетких событий [9]. Безусловно, \mathfrak{M} -нечеткое событие \tilde{x} полностью определяет свой индикатор $\mathbf{1}_{\tilde{x}}$ как функцию на Ω . Однако, обратное утверждение неверно. Если на Ω задан индикатор $\mathbf{1}_{\tilde{x}}$, то по его значениям не предоставляется возможности однозначно восстановить множество событий \tilde{x} . Можно лишь сказать, что индикатор каждого нечеткого события служит индикатором целого множества нечетких событий, индикаторы которых совпадают. То же самое, разумеется, относится и к индикаторам \mathfrak{X} -нечеткого события.

Что касается одного-единственного нечеткого события (6), определяемого всей матрицей избранных со-

бытий \mathfrak{X}_m , то его индикатор определяется аналогично как взвешенное индикаторов “обычных” событий, образующих это множество.

Определение 56. Эвентологическая функция принадлежности нечеткого события $\{\approx\}$ описывается формулой (27).

$$\mathbf{1}_{\{\approx\}}(\omega) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{x \in \mathfrak{X}} a_\mu \cdot b_x \cdot \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (27)$$

где $\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$ представляет собой индикатор “обычного” колмогоровского события x_μ .

Далее представим эвентологическую функцию нечеткого события $\{\approx\}$ в альтернативном виде. Однако для начала рассмотрим построение индикатора нечеткого события $\{\approx\}$ на уже хорошо знакомом примере “Возраст”.

Пример 3. В рамках определений Примера 1 рассмотрим конструктивное построение эвентологической функции нечеткого события $\{\approx\}$ при рассмотрении разбиения пространства элементарных событий Ω на события-терраски второго вида (17), (18).

Для более глубокого понимания происходящего представим графически события, образующие нечеткое событие $\{\approx\}$ (см. рис. 5).

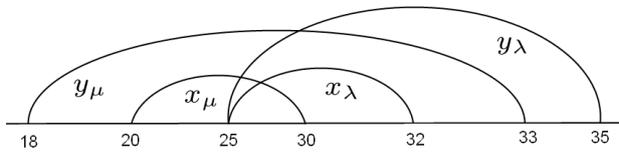


Рис. 5: Графическое представление нечеткого события $\{\approx\}$.

Итак, пусть, для начала, $\omega \in [0, 18)$, тогда событие ω попадает в события-терраски $ter_x(\{\emptyset_x\})$ и $ter_y(\{\emptyset_y\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 0 = 0$.

Если $\omega \in [18, 20)$, то $\omega \in ter_x(\{\emptyset_x\})$ и $\omega \in ter_y(\{\mu\})$. Тогда $\mathbf{1}_{y_\mu} = 0$, $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 0 = 0.27$.

Если $\omega \in [20, 25)$, то $\omega \in ter_x(\{\mu\})$ и $\omega \in ter_y(\{\mu\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = 0$, $\mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 0 = 0.6$.

Если $\omega \in [25, 30]$, то $\omega \in ter_x(\{\mu, \lambda\})$ и $\omega \in ter_y(\{\mu, \lambda\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 1$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 1 = 1$.

Далее, если $\omega \in [30, 32]$, то $\omega \in ter_x(\{\lambda\})$ и $\omega \in ter_y(\{\mu, \lambda\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = 0$, $\mathbf{1}_{y_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 1$.

Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 1 = 0.67$.

Далее, если $\omega \in (32, 33]$, то $\omega \in ter_x(\{\emptyset_x\})$ и $\omega \in ter_y(\{\mu, \lambda\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = 0$, $\mathbf{1}_{y_\mu} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 1$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 1 = 0.45$.

Если $\omega \in (33, 35]$, то $\omega \in ter_x(\{\emptyset_x\})$ и $\omega \in ter_y(\{\lambda\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = 0$, $\mathbf{1}_{y_\lambda} = 1$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 1 = 0.18$.

И, наконец, если $\omega \in (35, 50]$, то $\omega \in ter_x(\{\emptyset_x\})$ и $\omega \in ter_y(\{\emptyset_y\})$. Тогда $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathbf{1}_{\{\approx\}} = 0.6 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.45 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.55 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.45 \cdot 0 = 0$.

Таким образом, получаем следующую формулу (рис. 6):

$$\mathbf{1}_{\{\approx\}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in ter_x(\emptyset_x), ter_y(\emptyset_y) \\ 0.18, & \omega \in ter_x(\{\emptyset_x\}), ter_y(\{\lambda\}), \\ 0.27, & \omega \in ter_x(\{\emptyset_x\}), ter_y(\{\mu\}), \\ 0.45, & \omega \in ter_y(\{\mu\}), ter_y(\{\lambda\}), \\ 0.6, & \omega \in ter_x(\{\mu\}), ter_y(\{\mu\}), \\ 0.67, & \omega \in ter_x(\{\lambda\}), ter_y(\{\mu, \lambda\}), \\ 1, & \omega \in ter_x(\{\mu, \lambda\}), ter_y(\{\mu, \lambda\}). \end{cases}$$

Аналогично, используя определенные в Примере 2 события-терраски первого вида (22), (23), появляется возможность определить индикатор нечеткого события $\{\approx\}$ альтернативным образом: через события-терраски первого вида. Итак (рис. 6),

$$\mathbf{1}_{\{\approx\}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in ter_\mu(\emptyset_\mu), ter_\lambda(\emptyset_\lambda) \\ 0.18, & \omega \in ter_\mu(\{\emptyset_\mu\}), ter_\lambda(\{y\}), \\ 0.27, & \omega \in ter_\lambda(\{\emptyset_\lambda\}), ter_\mu(\{y\}), \\ 0.45, & \omega \in ter_\mu(\{y\}), ter_\lambda(\{y\}), \\ 0.6, & \omega \in ter_\mu(\{x, y\}), ter_\lambda(\{\emptyset_\lambda\}), \\ 0.67, & \omega \in ter_\mu(\{y\}), ter_\lambda(\{x, y\}), \\ 1, & \omega \in ter_\mu(\{x, y\}), ter_\lambda(\{x, y\}). \end{cases}$$

Теорема 2 (Два представления индикатора нечеткого события $\{\approx\}$) Индикатор нечеткого события $\{\approx\}$ может быть представлен в двух эквивалентных видах:

$$\mathbf{1}_{\{\approx\}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} ter_x(\emptyset_x), \\ \dots, & \dots, \\ \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{\mu \in W_x} a_\mu \cdot b_x(\omega), & x \in \mathfrak{X}, \\ \omega \in \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} ter_x(W_x), & W_x \subseteq \mathfrak{M}, \\ \dots, & \dots, \\ 1, & \omega \in \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} ter_x(\mathfrak{M}_x); \end{cases} \quad (28)$$

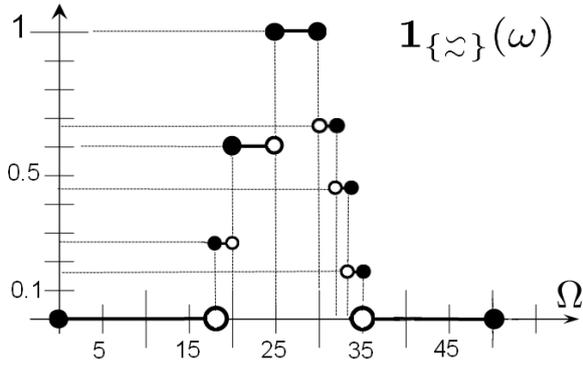


Рис. 6: Графическое представление индикатора нечеткого события $\{\approx\}$.

$$1_{\{\approx\}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \text{ter}_\mu(\emptyset_\mu), \\ \dots, & \dots, \\ \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{x \in X_\mu} a_\mu \cdot b_x, & \mu \in \mathfrak{M}, \\ \omega \in \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \text{ter}_\mu(X_\mu), & X_\mu \subseteq \mathfrak{X}, \\ \dots, & \dots, \\ 1, & \omega \in \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \text{ter}_\mu(\mathfrak{X}_\mu). \end{cases} \quad (29)$$

Здесь $\emptyset_x = \emptyset \subseteq \mathfrak{M}$ — пустое, $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ — полное подмножество; $\emptyset_\mu = \emptyset \subseteq \mathfrak{X}$ — пустое, $\mathfrak{X}_\mu = \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$ — полное подмножество; и, наконец,

$$\text{ter}_x(W_x) = \bigcap_{\mu \in W_x} x_\mu \bigcap_{\mu \in W_x^c} x_\mu^c, \quad W_x \subseteq \mathfrak{M},$$

— соответствующие события-терраски второго вида, которые образуют собственное разбиение пространства Ω -событий Ω :

$$\Omega = \sum_{W_x \subseteq \mathfrak{M}} \text{ter}_x(W_x);$$

$$\text{ter}_\mu(X_\mu) = \bigcap_{x \in X_\mu} x_\mu \bigcap_{x \in X_\mu^c} x_\mu^c, \quad X_\mu \subseteq \mathfrak{X},$$

— соответствующие события-терраски первого вида, которые образуют собственное разбиение пространства Ω -событий Ω :

$$\Omega = \sum_{X_\mu \subseteq \mathfrak{X}} \text{ter}_\mu(X_\mu).$$

Доказательство Доказательство не представляет никаких сложностей, основывается на общих понятиях теории нечетких событий [9], а также является вполне прозрачным после представленного выше Примера 3.

Интерпретация значений индикаторов, о которых говорится в данной статье, в действительности, проста. Каждый из индикаторов, как функция на Ω ,

принимает на Ω -событии $\omega \in \Omega$ значение, равное доле некоторых “обычных” событий, взятых с определенными коэффициентами. Данные “обычные” события определяют некоторые нечеткие события, которые наступают при наступлении данного Ω -события $\omega \in \Omega$. Рассматриваемые обобщенные индикаторы нечетких событий будем также называть *эвентологическими функциями степени принадлежности* Ω -событий нечеткому событию аналогично эвентологическим функциям степени принадлежности Ω -событий, введенным О.Ю.Воробьевым в [9].

Принципиальное отличие введенных эвентологических функций степени принадлежности от функций степени принадлежности, которые определяются в теории нечетких множеств Заде [10] заключается в формулах, определяющих эти функции (12), (14), (27). Данные формулы, к тому же, связывают функции степени принадлежности с индикаторами “обычных” событий.

Подобные данным формулы, рассматривающие частный случай, были впервые введены О.Ю.Воробьевым в [9]. Аналогичных им нет и не было никогда в классической теории нечетких множеств Заде [10]. Именно такие формулы позволяют доказать основную эвентологическую теорему о нечетких событиях. С помощью данной теоремы единственным образом определяется эвентологическая функция степени принадлежности произвольной сет-операции над множеством нечетких событий. По причине отсутствия подобной теоремы в теории нечетких множеств до сих пор используется множество вариантов функции степени принадлежности для одной и той же сет-операции. В теории нечетких множеств Заде, фактически, к каждой конкретной задаче подбирается свой вариант функции степени принадлежности для той или иной сет-операции. Этого существенного недостатка удалось избежать в предложенной О.Ю.Воробьевым в 2004 году теории эвентологии [9].

Плюс ко всему, эвентологическая теория выявляет причину множественности вариантов функции степени принадлежности в теории нечетких множеств Заде. Таковой причиной является наличие различных структур зависимостей “обычных” событий. Именно структуры зависимостей событий определяют вид эвентологической функции принадлежности. Однако, было показано [8], [1], что эвентологическая функция степени принадлежности не определяет структуру зависимостей событий: разным структурам зависимостей событий может соответствовать одна и та же эвентологическая функция степени принадлежности. Тем самым, необходимо сделать важное замечание о том, что *функции степеней принадлежности не несут полной информации о нечетком событии*.

Таким образом, множественность вариантов в клас-

сической теории указывает на то, что надо опираться не только на функции степени принадлежности. Необходимо принимать во внимание все Э-распределение множества событий, которое составляет данное нечеткое событие. Также необходимо принимать во внимание и Э-распределение множества нечетких событий, как и принято делать в новой эвентологической теории нечетких событий [9].

4 Теорема о формуле индикатора произвольной сет-операции над множеством нечетких событий

Подобно тому, как над “обычными” колмогоровскими событиями производятся теоретико-множественные операции (сет-операции), так и над нечеткими событиями возможно проведение подобных операций, названных сет-операциями по Минковскому. Представим определение данных операций формально.

Определение 57. Произвольной сет-операцией по Минковскому над множеством нечетких событий $\tilde{\mathfrak{X}}$ называется $|\tilde{\mathfrak{X}}|$ -местная сет-операция по Минковскому (\mathcal{O}): $\underbrace{\tilde{\mathfrak{M}} \times \dots \times \tilde{\mathfrak{M}}}_{|\tilde{\mathfrak{X}}|} \rightarrow \tilde{\mathfrak{M}}$, порождаемая

произвольной совокупностью подмножеств $\mathcal{O} \subseteq 2^{\tilde{\mathfrak{X}}}$ как $\tilde{\mathfrak{M}}$ -измеримое нечеткое событие

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{O} \\ x \in \tilde{\mathfrak{X}} \end{array} \right) \tilde{x} = \left(\sum_{X \in \mathcal{O}} \right) \tilde{t}er(X),$$

— непересекающееся по Минковскому объединение нечетких событий-террасок $\tilde{t}er(X)$ по подмножествам X из порождающей совокупности \mathcal{O} .

Необходимо отметить, что общее число различных сет-операций, которые можно осуществить над множеством событий $\tilde{\mathfrak{X}}$, равно числу подмножеств множества $2^{|\tilde{\mathfrak{X}}|}$, т.е. $2^{2^{|\tilde{\mathfrak{X}}|}}$.

Для более полного понимания обозначенного определения рассмотрим основные сет-операции (пересечение по Минковскому, объединение по Минковскому, симметрическая разность по Минковскому) для двух \mathfrak{M} -нечетких событий $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{X}}$.

Итак, пересечение по Минковскому определяется как нечеткое событие

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\cap)\tilde{y} &= \tilde{t}er(\{x, y\}) = \{ter_{\mu}(\{x, y\}), \mu \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \{x_{\mu} \cap y_{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}\} = \{x_{\mu} \cap y_{\mu}, x_{\lambda} \cap y_{\lambda}\}. \end{aligned}$$

Объединение по Минковскому определяется как нечеткое событие

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\cup)\tilde{y} &= \tilde{t}er(\{x\})(+)\tilde{t}er(\{y\})(+)\tilde{t}er(\{x, y\}) = \\ &= \{ter_{\mu}(\{x\}) + ter_{\mu}(\{y\}) + ter_{\mu}(\{x, y\}), \mu \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \{(x_{\mu} \cap y_{\mu}) \cup (x_{\mu} \cap y_{\mu}^c) \cup (x_{\mu}^c \cap y_{\mu}), \mu \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \{(x_{\mu} \cap y_{\mu}) \cup (x_{\mu} \cap y_{\mu}^c) \cup (x_{\mu}^c \cap y_{\mu}), \\ &\quad (x_{\lambda} \cap y_{\lambda}) \cup (x_{\lambda} \cap y_{\lambda}^c) \cup (x_{\lambda}^c \cap y_{\lambda})\}. \end{aligned}$$

Симметрическая разность по Минковскому определяется как нечеткое событие

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\Delta)\tilde{y} &= \tilde{t}er(\{x\})(+)\tilde{t}er(\{y\}) = \\ &= \{ter_{\mu}(\{x\}) + ter_{\mu}(\{y\}), \mu \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \{(x_{\mu} \cap y_{\mu}^c) \cup (x_{\mu}^c \cap y_{\mu}), \mu \in \mathfrak{M}\} = \\ &= \{(x_{\mu} \cap y_{\mu}^c) \cup (x_{\mu}^c \cap y_{\mu}), (x_{\lambda} \cap y_{\lambda}^c) \cup (x_{\lambda}^c \cap y_{\lambda})\}. \end{aligned}$$

Необходимо отметить то, что сет-операции имеют определенную лингвистическую интерпретацию [11]. Для основных, только что определенных, сет-операций по Минковскому лингвистическая интерпретация следующая: пересечение определяет результат действия лингвистической связки “И”: (x И y), объединение определяет результат действия лингвистической связки “ИЛИ” (x ИЛИ y), симметрическая разность по Минковскому определяет результат действия лингвистической связки “ИЛИ, ИЛИ” (ИЛИ x , ИЛИ y) — “исключающее ИЛИ”.

Пример 4. В рамках обозначенных Примеров 1-3 рассмотрим основные сет-операции по-Минковскому для двух \mathfrak{M} -нечетких событий $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{X}}_{\mathfrak{M}}$.

Итак, пересечение по Минковскому определяется как нечеткое событие

$$\tilde{x}(\cap)\tilde{y} = \{[20, 30], [25, 32]\},$$

лингвистически интерпретируется “молодой мужчина и молодая женщина”.

Объединение по Минковскому определяется как нечеткое событие

$$\tilde{x}(\cup)\tilde{y} = \{[18, 33], [25, 35]\},$$

лингвистически интерпретируется “молодой мужчина или молодая женщина”.

Симметрическая разность по Минковскому определяется как нечеткое событие

$$\tilde{x}(\Delta)\tilde{y} = \{[18, 20), (30, 33]\},$$

и лингвистически интерпретируется “или молодой мужчина, или молодая женщина”.

Рассмотрим возможные сет-операции по Минковскому для $\tilde{\mathfrak{X}} = \{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ и произвольного множества \mathfrak{M} . Тогда в соответствии с определением множества S ($S \subseteq 2^{\tilde{\mathfrak{X}}}$) и террасным определением сет-операций по Минковскому будет иметь место таблица 2, в которой, к тому же, представлено лингвистическая интерпретация каждой сет-операций по Минковскому.

Таблица 2: Сет-операции по Минковскому для \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} и \tilde{y} .

S	операции	ter	лингвистическое описание
$\{\emptyset\}$	$\tilde{\emptyset}_{\mathfrak{M}} (= \tilde{x}^{(c)}(\cap)\tilde{y}^{(c)})$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})$	\emptyset (ни x , ни y , ни (x и y))
$\{x\}$	$\tilde{x}(\cap)\tilde{y}^{(c)}$	$\tilde{ter}(\{x\})$	x , но не y (только x)
$\{y\}$	$\tilde{x}^{(c)}(\cap)\tilde{y}$	$\tilde{ter}(\{y\})$	y , но не x (только y)
$\{x, y\}$	$\tilde{x}(\cap)\tilde{y}$	$\tilde{ter}(\{x, y\})$	и x , и y
$\{\emptyset\}, \{x\}$	$\tilde{y}^{(c)}$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})(+)\tilde{ter}(\{x\})$	не y
$\{\emptyset\}, \{y\}$	$\tilde{x}^{(c)}$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})(+)\tilde{ter}(\{y\})$	не x
$\{\emptyset\}, \{x, y\}$	$\tilde{\Omega}(\backslash)(\tilde{x}(\Delta)\tilde{y})$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})(+)\tilde{ter}(\{x, y\})$	или (x и y), или ничего
$\{x\}, \{y\}$	$\tilde{x}(\Delta)\tilde{y}$	$\tilde{ter}(\{x\})(+)\tilde{ter}(\{y\})$	или x , или y
$\{x\}, \{x, y\}$	\tilde{x}	$\tilde{ter}(\{x\})(+)\tilde{ter}(\{x, y\})$	или x , или (x и y)
$\{y\}, \{x, y\}$	\tilde{y}	$\tilde{ter}(\{y\})(+)\tilde{ter}(\{x, y\})$	или y , или (x и y)
$\{\emptyset\}, \{x\}, \{y\}$	$(\tilde{x}(\cup)\tilde{y})^{(c)}$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})(+)\tilde{ter}(\{x\})(+)$ $(+)\tilde{ter}(\{y\})$	не (x и y одновременно)
$\{\emptyset\}, \{x\}, \{x, y\}$	$\tilde{x}(\cup)\tilde{y}^{(c)}$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})(+)\tilde{ter}(\{x\})(+)$ $(+)\tilde{ter}(\{x, y\})$	или x , или (x и y), или ничего (только не один y)
$\{\emptyset\}, \{y\}, \{x, y\}$	$\tilde{x}^{(c)}(\cup)\tilde{y}$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})(+)\tilde{ter}(\{y\})(+)$ $(+)\tilde{ter}(\{x, y\})$	или y , или (x и y), или ничего (только не один x)
$\{x\}, \{y\}, \{x, y\}$	$\tilde{x}(\cup)\tilde{y}$	$\tilde{ter}(\{x\})(+)\tilde{ter}(\{y\})(+)$ $(+)\tilde{ter}(\{x, y\})$	или x , или y , или (x и y)
$\{\emptyset\}, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}$	$\tilde{\Omega}_{\mathfrak{M}}$	$\tilde{ter}(\{\emptyset\})(+)\tilde{ter}(\{x\})(+)$ $(+)\tilde{ter}(\{y\})(+)\tilde{ter}(\{x, y\})$	Ω

Отметим также, что сет-операцию по Минковскому можно определить эквивалентным образом как нечеткое событие

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{x \in \mathfrak{X}}) \tilde{x} &= \{ \mathcal{O}_{x \in \mathfrak{X}} x_\mu, \mu \in \mathfrak{M} \} = \\ &= \left\{ \sum_{X \in \mathcal{O}} \text{ter}_\mu(X), \mu \in \mathfrak{M} \right\}, \end{aligned}$$

составленное из сет-операций

$$\mathcal{O}(x_\mu) = \mathcal{O}_{x \in \mathfrak{X}} x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}$$

над соответствующими множествами обычных событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu, x \in \mathfrak{X}\}, \mu \in \mathfrak{M}$ [9].

Следует отметить, что каждой совокупности подмножеств событий $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ взаимно-однозначно соответствует сет-операция (\mathcal{O}) над множеством нечетких событий $\tilde{\mathfrak{X}}$. Таким образом, общее число различных сет-операций, которые можно осуществить над множеством нечетких событий $\tilde{\mathfrak{X}}$, равно числу подмножеств множества $2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $2^{2^{|\mathfrak{X}|}}$.

Итак, возвращаясь к теории индикаторов в теории нечетких событий, напомним, что основная эвентологическая теорема о нечетких событиях предлагает формулу для вычисления индикатора произвольной сет-операции над множеством нечетких событий [9].

Далее также сформулируем эвентологическую Теорему об индикаторе сет-операции над множеством нечетких событий, но прежде введем некоторое обозначение.

Обозначим $\tilde{\mathcal{O}}_S$ нечеткое событие, порожденное в следствии применения операции по Минковскому $\left(\mathcal{O}_{x \in \mathfrak{X}} \right) \tilde{x}$ ко множеству нечетких событий, порожденному множеством подмножеств $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$.

Теорема 5 (О формуле, связывающей индикатор сет-операции над множеством нечетких событий с индикаторами событий из этого множества). Для любой сет-операции $\tilde{\mathcal{O}}_S$ предоставляется возможность вычисления индикатора данной сет-операции $\tilde{\mathcal{O}}_S$, при условии, что известны индикаторы “обычных” колмогоровских событий $\mathbf{1}_{x_\mu}(w)$ для всех $x \in X \subseteq \mathcal{S}$, по следующей формуле:

$$\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{O}}_S}(w) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{X \in \mathcal{S}} a_\mu \cdot \left(\prod_{x \in X} \mathbf{1}_{x_\mu}(w) \prod_{x \in X^c} (1 - \mathbf{1}_{x_\mu}(w)) \right). \quad (30)$$

Доказательство По определению сет-операции,

$$\mathcal{O}_\mu(\mathfrak{X}) = \mathcal{O}_{x \in \mathfrak{X}} x_\mu = \sum_{X \in \mathcal{S}} \text{ter}_\mu(X).$$

Напомним, что событие-терраска $\text{ter}_\mu(X)$ определяется как

$$\text{ter}_\mu(X) = \bigcap_{x \in X_\mu} x_\mu \bigcap_{x \in X_\mu^c} x_\mu^c.$$

Таким образом, индикатор события-терраски $\text{ter}_\mu(X)$, в соответствии с [9], представим следующим образом:

$$\mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(X)}(w) = \prod_{x \in X_\mu} \mathbf{1}_{x_\mu}(w) \prod_{x \in X_\mu^c} \mathbf{1}_{x_\mu^c}(w) = \prod_{x \in X_\mu} \mathbf{1}_{x_\mu}(w) \prod_{x \in X_\mu^c} (1 - \mathbf{1}_{x_\mu}(w)).$$

Так как события-терраски $\text{ter}(X)$ не пересекаются ($\text{ter}_\mu(X) \cap \text{ter}_\mu(Y) = \emptyset, X \neq Y, \forall X, Y \subseteq \mathfrak{X}$), то индикатор сет-операции равен сумме индикаторов тех событий-террасок, которым соответствуют подмножества событий $X \in \mathcal{S}$, то есть

$$\mathbf{1}_{\mathcal{O}_\mu}(w) = \sum_{X \in \mathcal{S}} \mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(X)}(w).$$

И, таким образом, получаем, что индикатор события \mathcal{O}_μ представим следующей формулой:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_\mu}(w) &= \sum_{X \in \mathcal{S}} \mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(X)}(w) = \\ &= \sum_{X \in \mathcal{S}} \left(\prod_{x \in X} \mathbf{1}_{x_\mu}(w) \prod_{x \in X^c} (1 - \mathbf{1}_{x_\mu}(w)) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

По определению индикатора \mathfrak{M} -нечеткого события (12), индикатор функции степени принадлежности нечеткого события $\tilde{\mathcal{O}}_S$ представим следующим образом:

$$\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{O}}_S}(w) = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{O}_\mu}(w). \quad (32)$$

Из формул (31), (32) следует выражение для эвентологической функции принадлежности нечеткого события $\tilde{\mathcal{O}}_S$ (индикатора сет-операции):

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{O}}_S}(w) &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{O}_\mu}(w) = \\ &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{X \in \mathcal{S}} a_\mu \cdot \left(\prod_{x \in X} \mathbf{1}_{x_\mu}(w) \prod_{x \in X^c} (1 - \mathbf{1}_{x_\mu}(w)) \right). \end{aligned}$$

Необходимо подчеркнуть, что для использование формулы (30) необходимо только лишь знания об эвентологической функции степени принадлежности и весовых коэффициентов $a_\mu, \forall \mu \in \mathfrak{M}$, но ничего более.

Проиллюстрируем данную теорему на примере.

Пример 5 В рамках Примера 4, используя теорему о представлении индикатора сет-операции над множеством нечетких событий, определим индикаторы обозначенных сет-операций по Минковскому.

Итак, индикатор сет-операции пересечения по Минковскому \mathfrak{M} -нечетких событий $\tilde{x}, \tilde{y}, \mathbf{1}_{\tilde{x}(\cap)\tilde{y}}$, представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\tilde{x}(\cap)\tilde{y}} &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot \mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(\{x, y\})} = \\ &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot \mathbf{1}_{x_\mu}(w) \mathbf{1}_{y_\mu}(w) = \\ &= a_\mu \cdot \mathbf{1}_{x_\mu}(w) \mathbf{1}_{y_\mu}(w) + a_\lambda \cdot \mathbf{1}_{x_\lambda}(w) \mathbf{1}_{y_\lambda}(w). \end{aligned}$$

Заметим, что когда $\omega \in [20; 25)$, то $\omega \in \text{ter}_\mu(x, y)$ и $\omega \in \text{ter}_\lambda(\emptyset_\lambda)$, а, следовательно, $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = 1$, $\mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 0$.

Если $\omega \in [25; 30]$, то $\omega \in \text{ter}_\mu(x, y)$ и $\omega \in \text{ter}_\lambda(x, y)$, а, следовательно, $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = \mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 1$.

И, наконец, если $\omega \in (30; 32]$, то $\omega \in \text{ter}_\mu(\emptyset_\mu)$ и $\omega \in \text{ter}_\lambda(x, y)$, а, следовательно, $\mathbf{1}_{x_\mu} = \mathbf{1}_{y_\mu} = 0$, $\mathbf{1}_{x_\lambda} = \mathbf{1}_{y_\lambda} = 1$.

Тогда индикатор сет-операции пересечения \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} и \tilde{y} , $\mathbf{1}_{\tilde{x}(\cap)\tilde{y}}$, представим в виде рис. 7:

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}(\cap)\tilde{y}} = \begin{cases} 0, & \omega \in [0; 20) \cup (32; 50], \\ 0.4, & \omega \in (30, 32], \\ 0.6, & \omega \in [20, 25), \\ 1, & \omega \in [25, 30]. \end{cases}$$

Проведем аналогичные рассуждения для индикатора сет-операции объединения по-Минковскому \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} , \tilde{y} , $\mathbf{1}_{\tilde{x}(\cup)\tilde{y}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\tilde{x}(\cup)\tilde{y}} &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot (\mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(\{x\})} + \mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(\{y\})} + \\ &\quad + \mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(\{x, y\})}) = \\ &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot (\mathbf{1}_{x_\mu}(w)(1 - \mathbf{1}_{y_\mu}(w)) + \\ &\quad + \mathbf{1}_{y_\mu}(w)(1 - \mathbf{1}_{x_\mu}(w)) + \mathbf{1}_{x_\mu}(w)\mathbf{1}_{x_\lambda}(w)). \end{aligned}$$

Тогда индикатор сет-операции объединения \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} и \tilde{y} , $\mathbf{1}_{\tilde{x}(\cup)\tilde{y}}$, представим в виде рис. 7:

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}(\cup)\tilde{y}} = \begin{cases} 0, & \omega \in [0; 18) \cup (35; 50], \\ 0.4, & \omega \in (33, 35], \\ 0.6, & \omega \in [18, 25), \\ 1, & \omega \in [25, 33]. \end{cases}$$

Проведем аналогичные рассуждения для индикатора сет-операции симметрической разности по-Минковскому \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} , \tilde{y} , $\mathbf{1}_{\tilde{x}(\Delta)\tilde{y}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\tilde{x}(\Delta)\tilde{y}} &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot (\mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(\{x\})} + \mathbf{1}_{\text{ter}_\mu(\{y\})}) = \\ &= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} a_\mu \cdot (\mathbf{1}_{x_\mu}(w)(1 - \mathbf{1}_{y_\mu}(w)) + \\ &\quad + \mathbf{1}_{y_\mu}(w)(1 - \mathbf{1}_{x_\mu}(w))). \end{aligned}$$

Тогда индикатор сет-операции симметрической разности \mathfrak{M} -нечетких событий \tilde{x} и \tilde{y} , $\mathbf{1}_{\tilde{x}(\Delta)\tilde{y}}$, представим в виде рис. 7:

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}(\Delta)\tilde{y}} = \begin{cases} 0, & \omega \in [0; 20) \cup [20, 30] \cup (32; 50], \\ 0.4, & \omega \in (30, 33], \\ 0.6, & \omega \in [18, 20). \end{cases}$$

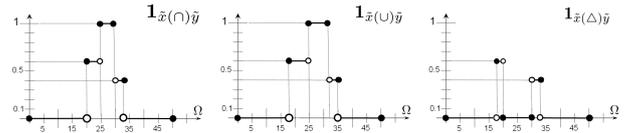


Рис. 7: Графическое представление индикаторов операций над нечеткими событиями.

5 Заключение

В данной статье было введено обобщение эвентологических функций степеней принадлежности, общепринятых в эвентологической теории нечетких событий [9]: эвентологических функций степеней принадлежности для \mathfrak{M} -нечетких событий, \mathfrak{X} -нечетких событий, а также для нечеткого события $\{\sim\}$. Также были приведены Теоремы, позволяющие представить упомянутые функции степеней принадлежности в одном или нескольких альтернативных вариантах. Впервые введенные обобщенные понятия также расширены на индикаторы сет-операций над множеством нечетких событий. Здесь же, как логическое следствие, представлены некоторые рассуждения (в том числе и лингвистические интерпретации) о сет-операциях по Минковскому. Все впервые представленные теоретические положения снабжены полными примерами, позволяющими легко войти в событийный мир эвентологии.

Список литературы

- [1] Д.В. Семенова и М.И. Шерыкалова (Рыбникова). Числовые \mathfrak{M} -нечеткие события на примерах. *Труды VII международной ФАМ-2009 конференции*, 1:184–194 – 220, 2008.
- [2] Я.В. Нартов, М.И. Рыбникова, Д.В. Семенова. Числовые характеристики \mathfrak{E} -нечетких событий. *Труды X Международ. ФАМЭБ конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, pages 278–285, 2011.
- [3] С.Д. Бешелев, Ф.Г. Гурвич. *Математико-статистические методы экспертных оценок*. М., 1980.
- [4] П. Халмош. *Теория меры*. Издательство иностранной литературы, М., 1953.
- [5] А.Н. Колмогоров. *Теория вероятностей и математическая статистика*. АН СССР, Наука, М., 1986.
- [6] А.И. Орлов. *Экспертные оценки: Учебное пособие*. М., 2002.
- [7] А.Н. Ширяев. *Вероятность*. Издательство МЦНМО, М., 2004.
- [8] И.А. Феофанова. Сравнительный анализ теории нечетких множеств и нечетких событий: дипломная работа. 2008.
- [9] О.Ю.Воробьев. *Эвентология*. Сиб. фед. ун-т, Красноярск, 2007.

- [10] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [11] D.V. Semenova. Eventological formalization of linguistic variable. *Proceedings of the Second International Conference: Problems of Cybernetics and Informatics*, 1:216 – 220, 2008.

Сравнительное исследование электорального поведения избирателей Красноярска

Михаил Георгиевич Садовский

ИВМ СО РАН, Красноярск
msad@icm.krasn.ru

Аннотация. В работе представлены первые результаты сравнительного изучения электорального поведения избирателей Красноярска на примере двух избирательных кампаний — выборов в ГД ФС РФ, проходивших 4-го декабря 2011 г. и выборов Президента РФ, проходившихся 4-го марта 2012 г. Показано, что избиратели Красноярска представляют собой весьма неоднородное сообщество с ярко выраженной кластерной структурой. При этом такая структура проявляет заметную устойчивость и слабо меняется от одного электорального цикла к другому.

Ключевые слова. Выборы, распределение, кластеризация, политика, механизм управления

1 Введение

Исследование электорального поведения сравнительно большой группы избирателей проливает свет на многие вопросы социального управления и выявляет важные детали социальных структур, существующих в обществе. Так, в частности, изучение электорального поведения позволяет чётче и яснее описать те стратификационные процессы, которые идут в обществе; кроме того, такое исследование показывает важные и не всегда легко диагностируемые детали социальной динамики, которая разворачивается в обществе.

Понятно, что динамика изменений в электоральном поведении “привязана” к внешней динамике общества: иными словами, электоральные предпочтения избирателей могут формироваться самым разным (и зачастую причудливым) образом, однако проявление такого рода предпочтений существенно зависит от “окружающей среды” — того набора политических акторов, которые предлагаются политическими партиями либо властью к выбору со стороны избирателей.

В настоящее время в мире встречается, по-видимому, два типа ситуаций развития динамики электорального поведения: первая характеризуется высокой устойчивостью (традиционностью) сложившейся политической системы, вторая — высокой динамикой политической системы, которая обгоняет собственную динамику электорального поведения и динамику формирования электоральных предпочтений, в частности. Первая ситуация характерна для стран, в ко-

торых практика выборов имеет достаточно долгую ($\sim 2 \times 10^2$ лет) историю, соответствующие институты сформировались и что самое главное — у избирателей существует “врождённое” понимание действия такого рода институтов¹.

Вторая ситуация — ситуация быстрой смены политических институтов и “политической среды” — характерно для стран Центральной и Восточной Европы, а также для других стран с переходной экономикой либо стран, вовлечённых в процессы смены общественного строя. Россия, принадлежа к этой второй группе, обладает рядом особенностей; пожалуй, наиболее главным среди них следует признать географические особенности (огромный размер страны и разнообразие народов и культур), которые делают изменения в общественной жизни достаточно медленными².

Исследование динамики электорального поведения требует также выбора подходящей базы: множество избирателей само по себе должно быть достаточно устойчивым, а самое главное — люди из такого сообщества должны быть вовлечены в одни и те же политические и общественные процессы, между ними должна идти коммуникация по типу массовой, что, собственно, и формирует динамику электорального поведения. Город Красноярск представляется удачным объектом для такого рода исследований: в городе проживает (по различным оценкам) от 980 000 до 1 050 000 человек, из которых не менее 90 % обладают пассивным избирательным правом. Кроме того, среди жителей Красноярска весьма хорошо развита собственная красноярская идентичность. Это обусловлено как историей города, так и тем обстоятельством, что он является реальным политическим и экономическим (региональным) центром в Сибири. Все эти особенности Красноярска делают его хорошим объектом для исследования динамики электорального поведения.

Настоящая работа посвящена представлению предва-

¹Хорошей аналогией является система оценивания знаний и учёбы в целом в школе: успешность школы как публичного института во многом обусловлена тем обстоятельством, что во всех слоях общества и во всех возрастных группах существует согласованная и принятая всеми шкала оценивания. Грубо говоря, и дети, и их родители, и их бабушки с дедушками одинаково понимают смысл и оценивают воздействие двойки либо пятёрки, полученной в школе из ребёнком.

²Конечно, медленность этих изменений весьма относительна.

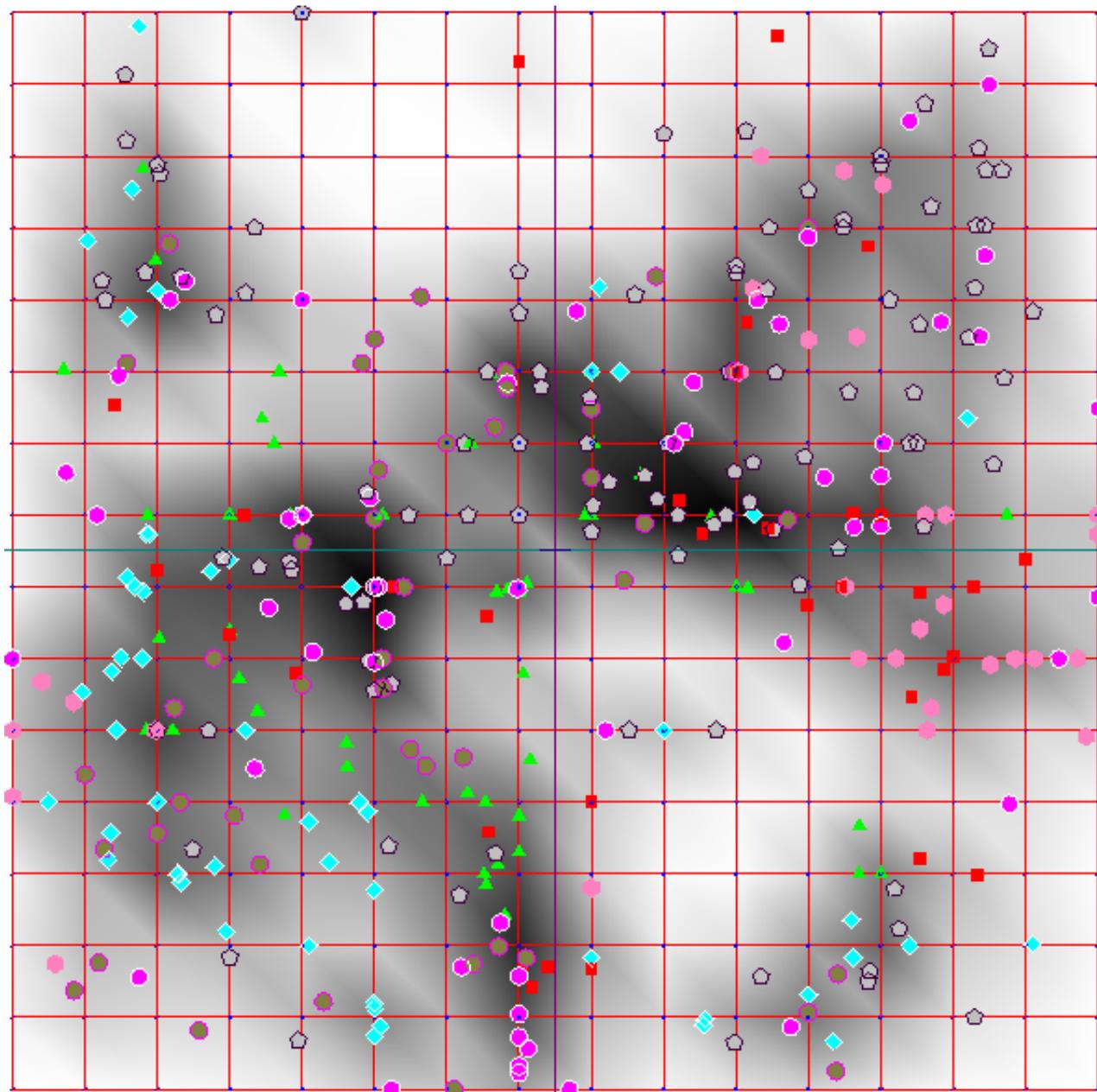


Рис. 1: Упругая карта для распределения УИКов Красноярска, по результатам выборов Президента РФ 4-го марта 2012 г. Представлена мягкая карта размером 16×16 . Цветами и формой маркеров выделены УИКи, принадлежащие одному административному району: Железнодорожный район – красные квадраты, Кировский – зелёные треугольники, Ленинский – ярко-голубые алмазы, Октябрьский – лиловые кружки, Свердловский – кружки тёмного болотного цвета с алой кромкой, Советский – пятиугольники серого цвета, Центральный – розовые шестиугольники.

рительных результатов изучения структурированности избирателей, проживающих на территории Красноярска, по такому важному показателю, как их электоральное поведение, по итогам трёх избирательных кампаний: выборов Главы города 2008 г., выборам в ГД ФС РФ декабря 2011 г. и выборам Президента РФ марта 2012 г. Избирательный процесс в Российской Федерации организован следующим образом: в пределах каждого региона действует своя региональная избирательная комиссия; в частности, в Красноярске действует городская избирательная

комиссия. Далее, каждый административный район города поделён на некоторое количество избирательных участков, на которых действует участковая избирательная комиссия (УИК); она и организует выборы на своём участке.

И размер территории, и её границы определяются таким образом, чтобы в среднем все территории представляли собой более или менее одинаковое количество избирателей; на практике такого рода равенство (или квази-равенство) выдержать удаётся далеко не всегда. Численность зарегистрированных на терри-

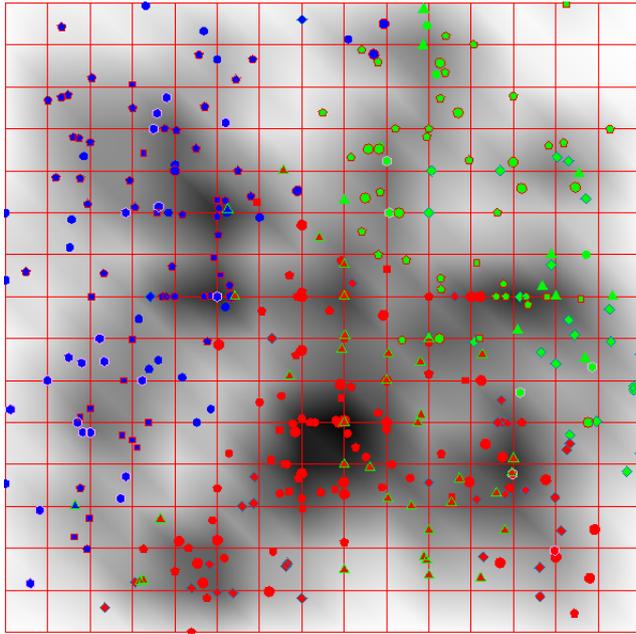


Рис. 2: Кластеризация УИКов Красноярска методом динамических ядер, на три класса (выделены цветом), по результатам выбора Президента РФ 4-го марта 2012 г. Цвет на этом рисунке не имеет отношения к принадлежности УИКов административным районам (как на Рисунке 1).

тории того или иного участка избирателей (в пределах г. Красноярска) варьирует от нескольких десятков до трёх с небольшим тысяч. Понятно, что избирательные участки с малым числом зарегистрированных избирателей вносят очень сильный “паразитный” сигнал в общую картину распределения голосов. Это связано с тем, что для малых участков вероятность большого отклонения в долях голосов, набранных тем или иным политическим актором, принимающим участие в выборах, очень велика. В ходе выборов Главы города в 2008 г. на территории г. Красноярска действовало 348 избирательных участков. Для целей анализа мы ограничились рассмотрением лишь тех из них, в которых число зарегистрированных избирателей превышает 500 избирателей; это привело к тому, что в рассмотрение было взято 296 избирательных участков.

2 Материалы и методы

На выборах Президента РФ в марте 2012 г. на территории г. Красноярска действовало 370 избирательных участков; из них на 352 число зарегистрированных избирателей превышало 1000 человек. Все данные по итогам выборов были взяты на официальном сайте Центральной избирательной комиссии.

Кроме того, на том же официальном сайте ЦИК были взяты данные по итогам выборов депутатов ГД ФС РФ, проходившим 4-го декабря 2011 г. и данные по итогам выборов Главы города, проходивших

в июне 2008 г. Все эти данные также были предварительно обработаны, с целью исключения УИКов, имеющих очень малое число зарегистрированных избирателей. Следует сказать, что число УИКов, действующих в г. Красноярске, изменилось (возросло) с 2008 г., однако этот рост был невелик ($\sim 10^{-2}$) и не повлиял существенно на результаты; гораздо важнее то обстоятельство, что география УИКов фактически не изменялась за эти годы.

Анализ данных по электоральному поведению проводился двумя методами: методом динамических ядер (классификация без учителя) и методом упругих карт.

Метод динамических ядер. Метод динамических ядер относится к классическим методам кластеризации (см. детали в работе [1], в которой этот метод описан исчерпывающим образом). Для построения кластеризации методом динамических ядер использовались данные о результатах голосования в каждом избирательном участке, при этом одна из партий (либо кандидатов на должность Главы города либо Президента РФ) была исключена из анализа; это связано с тем, что рассмотрение всех партий вносит сильную паразитную связь между данными, поскольку сумма долей голосов по всем партиям в каждой территории равна 1.

Использовалась версия метода, при которой первоначальное число кластеров K не уменьшалось в ходе построения кластеризации. Иными словами, мы не проверяли различимость полученных кластеров.

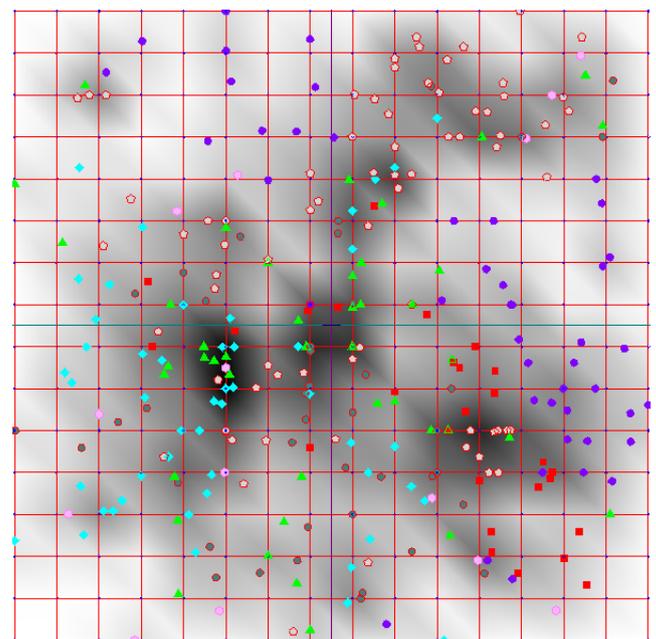


Рис. 3: Распределение УИКов в пространстве долей голосов, по итогам выборов Главы города 2008 г. Показана упругая карта 16×16 , цветами обозначены районы; обозначения те же, что и на Рисунке 1.

Устойчивость построенной кластеризации (в зависимости от числа кластеров K) проверялась построением серии кластеризаций и проверкой лабильности отдельных территорий из кластера в кластер.

Метод упругих карт. Кластеризация также проводилась методом построения упругих карт [2]. Для анализа кластерной структуры распределения территорий Российской Федерации использовалась мягкая³ упругая карта размером 16×16 , а для выявления (контрастирования) кластеров при вычислении функции локальной плотности распределения радиус корреляции составлял $r = 0,13$ и $r = 0,05$. Следует также подчеркнуть, что результаты построения кластеризации методом упругих карт также требуют исключения одной из переменных⁴.

При этом результаты построения кластеризации, вообще говоря, зависят от того, какая именно переменная исключена. Мы исключали результаты того актора, который набрал наибольшее число голосов; это особенно важно, если такой актор лидирует с существенным отрывом от остальных — учёт его результатов может заметно ухудшить результаты кластеризации, поскольку оно может привести к слиянию некоторых кластеров малой мощности либо к размыванию кластеров большой мощности и, как следствие, объединению нескольких кластеров в один очень большой; что, очевидно, приводит к потере структурированности в электоральном поведении.

3 Результаты и обсуждение

Рассмотрим подробнее результаты построения классификации УИКов г. Красноярска по электоральному поведению (т.е. результатам голосования на трёх различных выборах) из избирателей, а также кластеризацию этих УИКов, выполненную с помощью упругих карт. В Разделе 3.1 представлены результаты построения кластеров методом динамических ядер, в разделе 3.2 — результаты построения кластеров методом упругой карты.

3.1 Метод динамических ядер

При построении классификации методом динамических ядер всегда встаёт вопрос о её устойчивости. Поскольку построение классификации начинается со случайного разбиения УИКов на K классов, постольку возможна ситуация, при которой существенная часть территорий будет весьма рассогласованно менять свою принадлежность к тому или иному кластеру. Серия вычислительных экспериментов показала,

³“Мягкая” из стандартных установок программы.

⁴Естественно, при условии их связи. Для долей голосов, набранных политическими акторами, участвовавшими в выборах, такая связь очевидна: сумма всех долей равна 1.

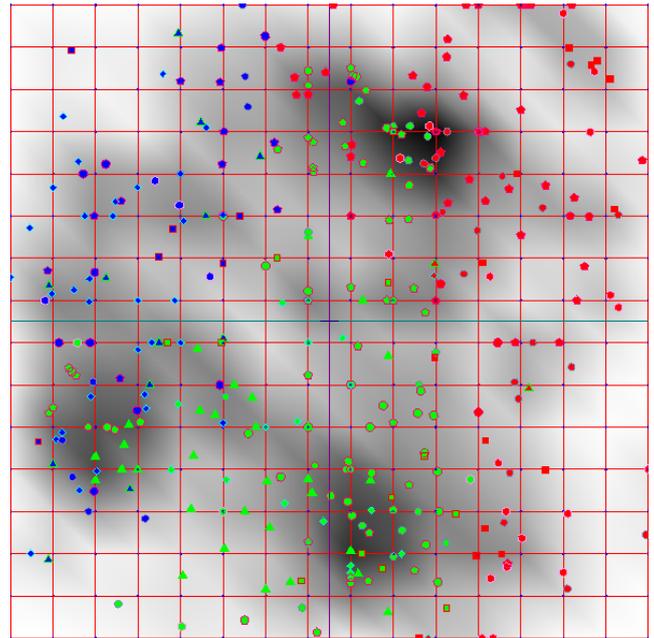


Рис. 4: Распределение УИКов по долям голосов по результатам выборов в ГД ФС РФ 4-го декабря 2011 г. Показана классификация, полученная методом динамических ядер, упругая карта 16×16 , мягкая, внутренние координаты; классы выделены цветом.

что УИКи в пространстве долей голосов очень устойчиво разбиваются на три класса. В наших исследованиях мы строили классификацию при $K = 2, 3, 4$ и 5; при этом хорошая повторяемость (более 80%) распределения УИКов в один и тот же класс наблюдалась лишь для $K = 3$.

В Таблице 1 представлены результаты распределения по классам УИКов г. Красноярска, соответствующие трём электоральным циклам: выборам в ГД ФС РФ декабря 2011 г., выборам Президента РФ марта 2012 г. и выборам мэра города июня 2008 г. Хорошо видно, что распределение УИКов по классам носит весьма неслучайный характер. В Таблице 1 обращает на себя внимание весьма существенное различие в числе УИКов (особенно для Центрального района), которое наблюдается для различных электоральных циклов. Это связано как с изменением собственно числа УИКов, так и с тем обстоятельством, что часть УИКов была исключена из рассмотрения, поскольку на них зарегистрировано слишком малое число избирателей и учёт таких УИКов может существенно исказить результаты классификации.

Хорошо видно, что Кировский и Ленинский районы г. Красноярска являются своего рода “антагонистами” Железнодорожному и особенно Центральному району — с точки зрения электорального поведения их жителей. При этом первый и третий классы построенной линейной классификации являются основными в разделении этих районов; второй класс может интерпретироваться как переходный, либо име-

Таблица 1: Распределение УИКов различных районов г. Красноярска по трём классам, для трёх электоральных циклов.

Район	Выборы в ГД ФС РФ			Выборы Президента			Выборы мэра		
	I класс	II класс	III класс	I класс	II класс	III класс	I класс	II класс	III класс
Железнодорожный	6	12	14	5	10	17	2	4	22
Кировский	12	32	2	11	34	2	11	17	16
Ленинский	33	16	2	22	29	2	6	36	7
Октябрьский	9	18	19	4	21	23	13	2	30
Свердловский	10	33	4	11	31	5	5	17	20
Советский	11	40	44	29	29	40	39	16	19
Центральный	4	4	19	4	2	21	2	7	5

ющий свою особенную структуру электорального поведения у части жителей города. По результатам всех трёх выборов следует выделить как особенный Ленинский район Красноярска, поскольку электоральное поведение его жителей скорее соответствует тому типу, который формирует второй класс в классификации. Особенное место в этих классификациях также занимает Советский район; по-видимому, это связано с тем, что он является крупнейшим в городе и весьма неоднороден по социально-демографическим показателям его жителей.

Построение классификации методом динамических ядер не характеризует никак те классы, которые выделяются этим методом. Это приводит к тому, что названия классов являются чисто номинальными: Легко можно представить себе ситуацию, при которой одни и те же объекты (УИКи в нашем случае) будут всегда попадать в один и тот же класс — при построении серии последовательных классификаций, — но при этом номер класса каждый раз будет другой. Единственный выход в такой ситуации — прямое сравнение структуры классов с тем, чтобы убедиться, что классификации дают одно и то же разбиение объектов на классы. И здесь следует подчеркнуть, что пересечения классов, полученных методом динамических ядер для результатов трёх электоральных циклов, весьма существенны: до 70 % УИКов всегда попадают в один и тот же класс для случая классификаций по результатам выборов в ГД ФС РФ 2011 г. и Президента РФ марта 2012 г. и до 50 % УИКов — для случая сравнения этих двух классификаций с той, которая построена по результатам выборов Главы города 2008 г.

3.2 Метод упругих карт

Обратимся теперь к Рисункам 2 и 4. На них показаны распределения УИКов в пространстве голосов избирателей, построенные по итогам выборов в ГД ФС РФ в декабре 2011 г. и Президента РФ в марте 2012 г. Во-первых, следует подчеркнуть, что для каждого из этих распределений размерность исходного пространства была разной: если для распределения,

показанного на Рис. 2 она составляла $\|R\| = 6$, то для второго случая (показанного на Рис. 4) $\|R\| = 4$. Такое различие может быть существенным, поскольку размерность пространства исходных данных достаточно мала.

Структуры упругих карт, показанных на этих рисунках, весьма близки — по топологии, а также по составу кластеров. Это означает, что УИКи, составляющие ядра наиболее плотных кластеров (их четыре в первом случае и три — во втором), во многом пересекаются. Этот факт доказывает значительную устойчивость электорального поведения жителей г. Красноярска на коротком периоде между выборами в ГД ФС РФ и выборами Президента. Такого рода устойчивость весьма любопытна: дело в том, что эти выборы различались по тому социальному контексту, в которых они разворачивались, а кроме того, отличались и по предмету выбора: традиционно выбор персоны в нашей стране не слишком связан с выбором той или иной политической партии, стоящей за персоной. Впрочем, наблюдаемая устойчивость кластеризации скорее опровергает это мнение.

Существенно меньше пересечений наблюдается между структурами ядер для кластеризаций, показанных на Рис. 2 и 4 и той, которая представлена на Рис. 3. Однако в любом случае можно смело утверждать, что Красноярск состоит из нескольких (минимум три, максимум — пять) “городков”, жители которых различаются по своему электоральному поведению.

Список литературы

- [1] А. Н. Горбань и Д. А. Россиев. *Нейронные сети на персональном компьютере*. Наука, Новосибирск, 1996.
- [2] А. Ю. Зиновьев. <http://bioinformatics.curie.fr/projects/vidaexpert>. Интернет ресурс.

Стратификация Красноярского края по электоральному поведению жителей

Михаил Георгиевич Садовский

ИВМ СО РАН, Красноярск
msad@icm.krasn.ru

Мария Вадимовна Елина

elinamv@gmail.com

Аннотация. В работе представлены первые результаты по изучению стратификации избирателей Красноярского края по признакам электорального поведения. Представлены данные анализа выборов в ГД ФС РФ 2011 г. Методом упругих карт выделены кластеры, в которые попадают территории, близкие по поведению избирателей при выборе ими политических партий. Показано, что Красноярский край фактически делится не менее, чем на четыре электоральные зоны; обсуждены возможные социологические механизмы формирования таких зон и факторы, оказывающие влияние на их формирование. Исследование проводилось в разрезе УИКов.

Ключевые слова. Выборы, распределение, кластеризация, политика, механизм управления

1 Введение

Публичные, открытые и прямые выборы представительных органов власти, либо кандидатов на должности, замещаемые на выборной основе — глав городов, Президента и т. п. — являются общемировой практикой политического, социального и корпоративного управления. Такие механизмы социального управления могут быть эффективными лишь при учёте различных важных факторов и выполнении ряда условий, среди которых особо выделяются те, которые связаны с обеспечением эффективной политической и/или социальной коммуникации между претендентом на должность либо представителями какой-либо из партий и избирателями.

Такого рода коммуникация обязана быть двусторонней. Дело в том, что товар, который “продаёт” любой политический актор, весьма специфичен — это образы будущего. Для того, чтобы добиться поддержки избирателей, политический актор должен, с одной стороны, уметь видеть и конструировать такие образы, которые востребованы его потенциальными сторонниками, а с другой — уметь излагать свои представления (которые могут и отличаться от ожидаемых избирателями) в понятиях и образах, конгруэнтных представлениям потенциальных сторонников, а зачастую и противников.

Это важное обстоятельство делает исследование структурированности электорального (и, шире, политического) поведения жителей той или иной достаточно крупной и самодостаточной территории весьма

актуальным и важным. При этом самодостаточность здесь не следует воспринимать в узко-экономическом смысле: важно, чтобы жители того или иного региона идентифицировали себя как “местные”, имеющие свою самость и способные конструировать и реализовывать свою будуще.

Красноярский край представляет собой уникальный субъект в составе Российской Федерации; эта уникальность обусловлена географическими факторами (огромная площадь, разнообразие климатических зон и биотопов), этническими и демографическими факторами — в крае проживают представители более чем сотни национальностей и этнических групп, социальными факторами — уклад жизни в различных регионах края может настолько сильно не совпадать, что это приводит даже к специфическим коммуникативным проблемам, экономическими факторами — и уровень доходов, и стиль жизни различных территорий в пределах края также весьма различается, различаются и темп жизни, и способы коммуникаций.

Все эти особенности Красноярского края делают его хорошей моделью России. Изучение различных особенностей в “микродинамике” и “мезодинамике” в пределах края может дать определённые представления о “глобальной” динамике соответствующих процессов в целом в стране или в некоторых её обширных частях.

Настоящая работа посвящена представлению предварительных результатов изучения структурированности избирателей, проживающих на территории Красноярского края, по такому важному показателю, как их электоральное поведение.

2 Материалы и методы

Избирательный процесс в Российской Федерации организован следующим образом: в пределах каждого региона действует своя региональная избирательная комиссия; в частности, в Красноярском крае действует краевая избирательная комиссия. Далее, каждый регион поделён на некоторое количество территорий; в рамках указанных территорий действует своя территориальная избирательная комиссия (ТИК). В пределах каждой территории выборы организуются по избирательным участкам и организует эту работу участковая избирательная комиссия (УИК).

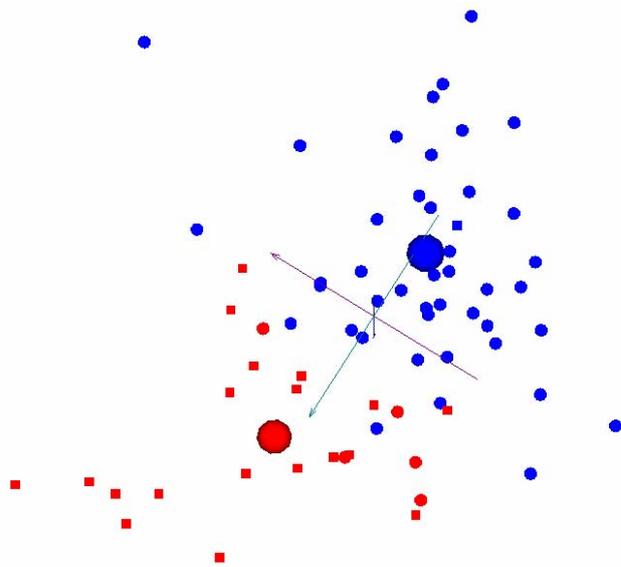


Рис. 1: Кластеризация ТИКов Красноярского края методом динамических ядер. По-прежнему, кружки обозначают сельские ТИКи, а квадраты — городские. Кластеризация проводилась на два класса, выделены цветом. Крупными шарами показаны центры классов; распределение показано в главных компонентах.

И размер территории, и её границы определяются таким образом, чтобы в среднем все территории представляли собой более или менее одинаковое количество избирателей; на практике такого рода равенство (или квази-равенство) выдержать удаётся далеко не всегда: в первую очередь это связано с географическими особенностями России и Красноярского края, в частности.

С точки зрения анализа электорального поведения, минимальной единицей рассмотрения следует признать территорию и, соответственно, те результаты, которые аккумулируются на уровне ТИКов. Это связано с тем, что зачастую численность избирателей на избирательном участке такова, что возможные флуктуации в электоральном поведении, наблюдаемые на различных избирательных участках, будут слишком велики. Кроме того, по крайней мере, для средних и крупных городов, одна территория (с соответствующим ТИКом) гораздо лучше представляет социально-демографическую картину избирателей, проживающих в данной территории. Всё это заставляет отказаться от анализа электорального поведения избирателей в разрезе УИКов (хотя технически это совершенно несложно) и вести анализ в разрезе ТИКов. Кластеризация территорий по электоральному поведению проводилась на основе официальных данных ЦИКА об итогах выборов в ГД ФС РФ, проходивших 4 декабря 2011 г. Всего база данных содержала 70 территорий; для каждой территории указывался район, к которому она принадлежит, а также тип ТИКа (город либо село).

Анализ данных по электоральному поведению проводился двумя методами: методом динамических ядер (классификация без учителя) и методом упругих карт.

Метод динамических ядер Метод динамических ядер относится к классическим методам кластеризации. Не имея возможности описать его здесь в сколько-нибудь полном объёме, отошлём читателя к работе [1], в которой этот метод описан исчерпывающим образом. Для построения кластеризации методом динамических ядер использовались данные о результатах голосования в каждой территории¹, при этом одна из партий была исключена из анализа; это связано с тем, что рассмотрение всех партий вносит сильную паразитную связь между данными, поскольку сумма долей голосов по всем партиям в каждой территории равна 1.

Использовалась версия метода, при которой первоначальное число кластеров K не уменьшалось в ходе построения кластеризации. Иными словами, мы не проверяли различимость полученных кластеров. Устойчивость построенной кластеризации (в зависимости от числа кластеров K) проверялась построением серии кластеризаций и проверкой лабильности отдельных территорий из кластера в кластер.

Метод упругих карт Кластеризация также проводилась методом построения упругих карт [2]. Для анализа кластерной структуры распределения территорий Российской Федерации использовалась мягкая² упругая карта размером 16×16 , а для выявления (контрастирования) кластеров при вычислении функции локальной плотности распределения радиус корреляции составлял $r = 0,13$ и $r = 0,05$.

3 Результаты и обсуждение

Рассмотрим результаты построения кластеров, типизирующих территории Российской Федерации по подобию электорального поведения их населения. В Разделе 3.1 представлены результаты построения кластеров методом динамических ядер, в разделе 3.2 — результаты построения кластеров методом упругой карты.

Таблица 1: Распределение доли городских и сельских УИКов в выделенных кластерах, %.

Тип поселения	Кластер		
	I	II	III
Город	79	24	5
Село	21	76	95

¹«В разрезе ТИКов», на профессиональном жаргоне.

²«Мягкая» из стандартных установок программы.

3.1 Метод динамических ядер

В результате проведения серии вычислительных экспериментов было обнаружено, что 2186 участковых избирательных комиссий Красноярского края по итогам голосования на выборах в Государственную думу ФС РФ 4 декабря 2011 г. наиболее устойчиво кластеризуются на 4 класса. При этом один из классов представляет собой единственную Енисейскую ТИК сельского типа, находящуюся на территории Норильско-Канской группы районов.

При построении кластеризации методом динамически ядер всегда встаёт вопрос об устойчивости такого рода кластеризаций. Поскольку построение кластеризации начинается со случайного разбиения территорий на K классов, постольку возможна ситуация, при которой существенная часть территорий будет (рассогласованно) менять свою принадлежность к тому или иному кластеру. Серия вычислительных экспериментов показала, что территории в пространстве долей голосов очень устойчиво кластеризуются на три класса; при этом кластеризация на четыре класса (и больше), а также на два класса показывала крайне низкую степень устойчивости: доля мобильных территорий приближалась к единице.

Таблица 2: Распределение территориальных групп по кластерам, %.

Группа ТИКов	Кластер		
	I	II	III
Ачинско-Минусинская	20	49	31
Красноярская	88	10	1
Норильско-Канская	13	56	31

Поскольку удаление данной единицы из массива приводит к существенному сбою в кластеризации, мы сохраним изначально выделенные классы, однако сосредоточим внимание читателя вокруг описания структуры трех основных кластеров. Одним из важнейших факторов, влияющих на дифференциацию электоральных предпочтений избирателей является уровень урбанизации территории. Обратимся для начала к описанию структуры классов в зависимости от типа поселения. В Таблице 1 представлено распределение доли сельских и городских УИКов внутри кластеров, выделенных линейным методом (методом динамических ядер).

По данным таблицы, первый кластер на 79 % состоит из городских УИКов, в то время, когда в двух других преобладают сельские УИКи. Ввиду того, что численность сельских УИКов в регионе почти вдвое превышает численность городских (1423 сельских и 763 городских), важно учитывать и вошедшую в кластер долю от общего числа городских или сельских УИКов. Так, в первый кластер вошло 66 % от чис-

ла всех городских УИКов края при 9 % сельских, во второй — 53 % городских и 30 % сельских.

В свою очередь в третий кластер вошли только 4 % городских при 37 % из числа всех сельских УИКов. Таким образом, по первому признаку выделяется три различных по своей структуре типа кластера: городской, смешанный и сельский. При этом смешанный кластер является самым многочисленным, включая в себя 986 краевых УИКов, что составляет 45 % от общего количества.

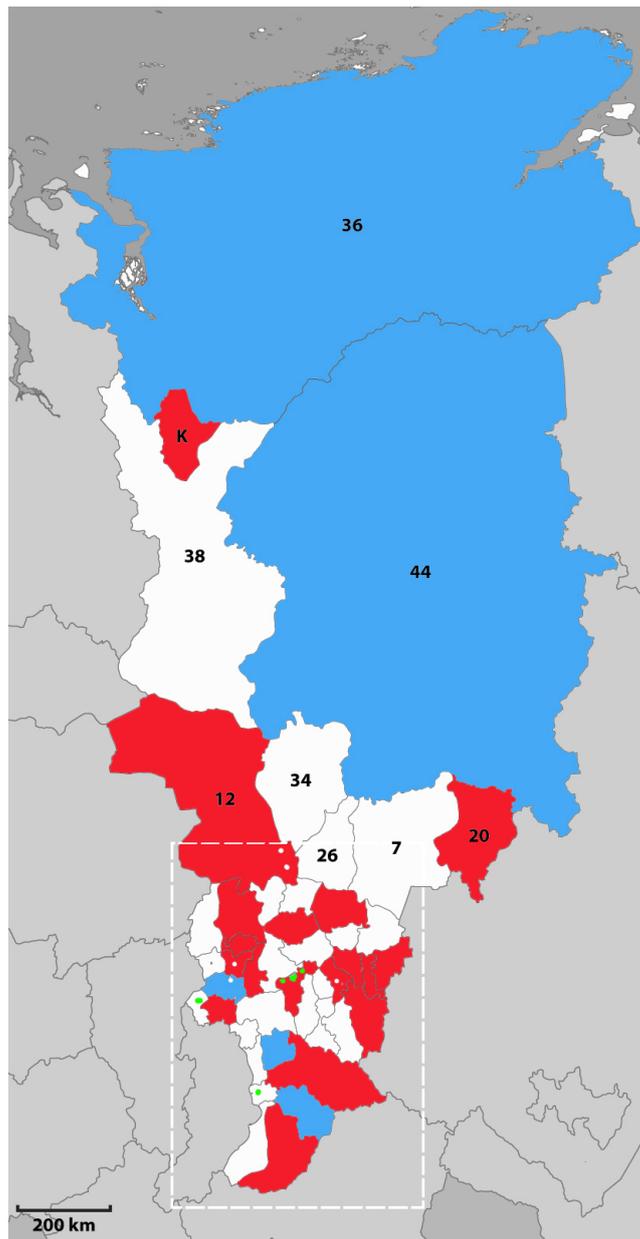


Рис. 2: Географическое распределение кластеров на территории Красноярского края.

Обратимся к распределению УИКов по территориальным группам. Городской кластер на 54 % состоит из УИКов Красноярской группы, в него вошли почти 90 % всех участковых избирательных комис-

сий г. Красноярска (Таблица 2). В смешанный кластер вошли преимущественно сельские территории Норильско-Канской и Ачинско-Минусинской группы, 40 % и 37 % соответственно. При этом городские УИКи данного класса так же принадлежат указанным территориям. Аналогичная ситуация и в случае с сельским кластером, на 48 % состоящим из УИКов Ачинско-Минусинской группы ТИКов и на 46 % — УИКов Норильско-Канской группы. Исходя из сказанного, (см. Таблицу 2), можно заключить, что электоральное поведение избирателей Красноярской группы (в которую входит г. Красноярск, г. Дивногорск) заметно отличается от поведения избирателей в южной и северной территориях края. В свою очередь, избиратели данных территорий делятся на 2 равносильные по численности группы, демонстрирующие схожее электоральное поведение как на территории Ачинско-Минусинской, так и на территории Норильско-Канской группы ТИКов.

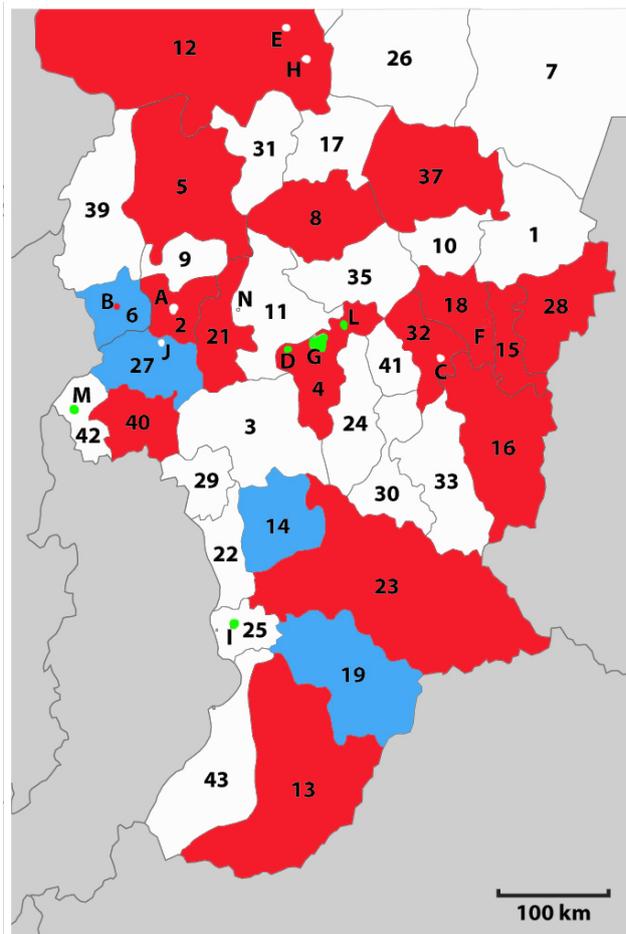


Рис. 3: Географическое распределение кластеров на юге Красноярского края.

Особый интерес для дальнейшего анализа представляет состав кластеров в контексте вошедших в каждый из них ТИКов. Мы будем считать, что ТИК (соответствующая обычно административной террито-

риальной единице региона) принадлежит кластеру, если она более, чем на 60 % входит в данный кластер. В случае, когда сложно определить, к какому конкретно классу относится данная ТИК, например, ввиду статистически обусловленной малочисленности УИКов или если ТИК в равной доле оказалась в нескольких кластерах, мы будем маркировать данную ТИК как вошедшую в несколько кластеров, при этом не включая её ни в один из них. На Рисунках 2 и 3 такие территории не закрашены (выделены белым цветом).

В первый кластер (городской) вошли следующие города: Красноярск, Сосновоборск, Дивногорск, Шарыпово, Минусинск, ЗАТО Железногорск и ЗАТО Зеленогорск. На рисунках они обозначены зеленым цветом и буквами G, L, D, M и I.

Таблица 3: Некоторые районы Красноярского края, распределиться по нескольким кластерам, %.

ТИКи	Кластер		
	I	II	III
Ачинск	51	47	0
Бородино	63	38	0
Енисейск	50	50	0
Лесосибирск	42	55	3
Назарово	55	40	5
Емельяновская	47	51	2
Мотыгинской	41	24	35
Туруханской	32	32	36
Дзержинской	3	46	51
Казачинской	4	55	41
Пировской	0	50	50
Тюхтетской	4	48	48

Второй кластер (смешанный), обозначенный на рисунках красным цветом, сформировался из городов Норильск, Канск и Боготол (K, F, B на рисунках). Из числа ТИКов сельского типа сюда вошли: Ачинская (2 на Рис. 3), Березовская (4), Бирилюсская (5), Большемуртинская (8), Енисейская (12), Ермаковская (13), Иланская (15), Ирбейская (16), Канская (18), Кедровая (N), Кежемская (20), Козульская (21), Курагинская (23), Нижнеингашская (28), Рыбинская (32), Солнечная, Тасеевская (37), Ужурская (40).

В третий, сельский кластер, вошли Боготольская (6), Идринская (14), Каратузская (19), Назаровская (27) ТИКи, Таймыр (Таймырская 1, Таймырская 2) и Эвенкия (Байкитская, Илимпейская, Тунгусско-Чунская ТИКи). На рисунках данный кластер выделен голубым цветом.

В числе территорий (ТИКов), в равной степени разделившихся между первым и вторым кластерами стоит отметить города Ачинск (A на рисунке), Бородино (C), Енисейск (E), Лесосибирск (H), Назарово

(J), а также Емельяновскую ТИК (11). Здесь избиратели поделились на 2 равные группы, что, безусловно, является значимым показателем и в дальнейшем требует детального анализа. В Таблице 3 представлены доли ТИКов, попавших в несколько кластеров.

На территориях Мотыгинской (26) и Туруханской (38) избирательных комиссий население разделилось на 3 группы, электоральное поведение каждой из которых соответствует одному из выделенных кластеров. В свою очередь результаты голосования по Дзержинской (10), Казачинской (17), Пировской (31) и Тюхтетской (39) ТИК в равной степени отражают свойства второго и третьего кластеров. Все остальные территории разделились между выделенными классами в разных долях.

3.2 Метод упругих карт

На Рисунке 4 показано распределение УИКов на упругой карте. Параметры карты указаны в подписях к рисунку. Хорошо видно, что на этом рисунке выделяется четыре очень чётко выделяемых кластера; это те кластеры, в которых наблюдается самая высокая локальная плотность УИКов (выделены красным цветом). При этом часть территорий также образуют плотные группы, однако их численность внутри группы недостаточно велика для того, чтобы сформировался сильный кластер — при заданных параметрах контрастирования.

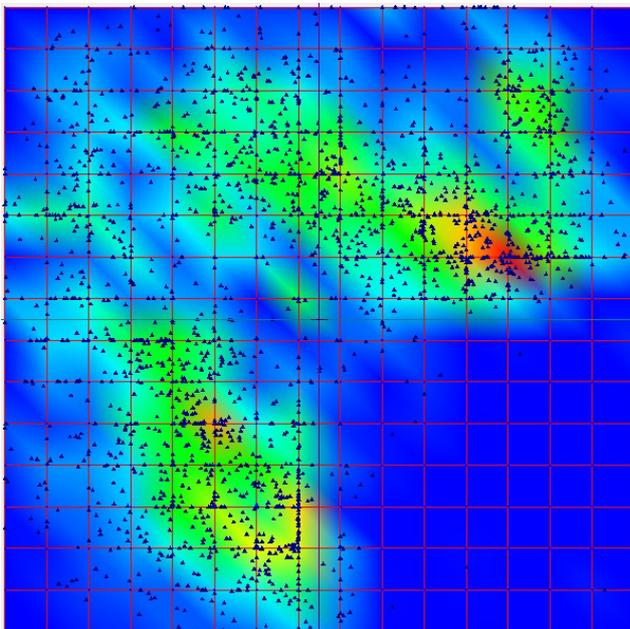


Рис. 4: Мягкая упругая карта 16×16 ($r = 0,05$).

Вообще, детальный анализ структуры разбиения электорального пространства Красноярского края методом упругих карт выходит за рамки настоящей статьи — в первую очередь, из-за ограничений по

объёму работы. Однако даже беглый анализ структуры этих кластеров показывает высокую корреляцию между УИКаами, входящими в тот или иной кластер, выделяемый методом упругих карт. Здесь под корреляцией в первую очередь понимается территориальная близость, а также совпадение некоторых характерных показателей социально-экономического развития соответствующих территорий края.

Представленные выше результаты показывают, что Красноярский край является весьма сложно устроенным — с точки зрения электорального поведения жителей края — регионом. Даже линейные методы классификации (весьма грубые и нечувствительные к мелким деталям), а также принципиально не способные выявить особенности структурирования данных в случае нелинейных феноменов выделяют в крае структуру, распределяющую все территории края на три класса; такая классификация весьма устойчива.

Нелинейные методы кластеризации выделяют существенно большее число кластеров, каждый из которых устроен заметно сложнее. Тем не менее, нелинейные методы кластеризации также выявляют существенные различия между сельскими и городскими территориями, однако они устойчиво различают (в структуре соответствующих кластеров) электоральное поведение жителей малых городов края, расположенных в различных географических зонах края.

Всё сказанное выше позволяет надёжно и полно анализировать особенности электорального поведения не только жителей Красноярского края, но и других регионов страны.

Список литературы

- [1] А. Н. Горбань и Д. А. Россиев. *Нейронные сети на персональном компьютере*. Наука, Новосибирск, 1996.
- [2] А. Ю. Зиновьев. <http://bioinfout.curie.fr/projects/vidaexpert>. Интернет ресурс.

О распределении расстояний до ближайшего соседа в последовательностях

Михаил Георгиевич Садовский

ИВМ СО РАН, Красноярск
msad@icm.krasn.ru

Ксения Андреевна Клокова

СФУ, Красноярск
ksklokova@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена задача определения функции распределения слов фиксированной длины, встречающихся в символьной последовательности из конечного алфавита \aleph мощности 2. Рассматриваемая функция определяется как распределение вероятности встретить заданное слово ω на расстоянии l от другого заданного слова, при условии, что оно является ближайшим соседом, т. е. слово ω нигде ближе этого расстояния l не встречается. Показано существование эффектов в таком распределении, определяемых структурой слова ω .

Ключевые слова. Цепочка, комбинация, расстояние, паттерн

1 Введение

Символьные последовательности представляют собой фактически универсальный объект исследований, встречающийся как в математике, так и в естественных (и даже гуманитарных) науках. Изучение свойств символьных последовательностей либо их ансамблей позволяет выявить многие важные свойства тех естественно-научных объектов и процессов, которые стоят за такими символьными последовательностями [1, 2, 3].

Настоящая работа посвящена исследованию распределения вероятностей встречи ближайшего заданного соседа в символьной последовательности. Сформулируем задачу строже. Пусть имеется конечная либо символьная последовательность длины N из некоторого конечного алфавита \aleph ; в рамках настоящей работы мы будем рассматривать двоичные последовательности из алфавита $\aleph = \{0, 1\}$. Зафиксируем два некоторых слова ω_1 и ω_2 , каждое длины l_1 и l_2 , соответственно. Словом будем называть любую конечную подпоследовательность, встречающуюся в данной последовательности. Найдём первое вхождение слова ω_1 в последовательность и будем искать ближайшее к нему вхождение слова ω_2 . Затем перейдём к следующему вхождению слова ω_1 и всю процедуру повторим с самого начала. В результате будет построено (для конечной последовательности) конечное приближение искомой функции распределения

$$f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l), \quad (1)$$

естественно, при подходящей нормировке тех чисел вхождений, которые были получены на конкретной

последовательности.

Устремляя затем длину $N \rightarrow \infty$ к бесконечности, получим “истинную” функцию распределения. Слово “истинная” означает, что полученная таким образом функция $f(l)$ будет зависеть от исходной последовательности.

Основная задача настоящей работы состоит в моделировании функции распределения $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l)$, наблюдаемой для случайных нескоррелированных последовательностей из нулей и единиц, для разных слов ω_1 и ω_2 для разных вероятностей $p(0)$ и $p(1)$ появления нулей и единиц. Дело в том, что теоретическая оценка вида такого рода распределения представляет собой весьма трудоёмкую и сложную задачу; именно поэтому оценка поведения такой функции выполнялась с помощью моделирования случайных последовательностей.

Необходимость оценки поведения функции $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l)$ важна как минимум для многих задач биоинформатики: ключевым объектом биоинформатики, молекулярной генетики и многих других разделов естествознания. В частности, для задач анализа генетических текстов — обширных (длиной до 10^{10} символов) последовательностей из четырёхбуквенного алфавита $\aleph = \{A, C, G, T\}$ — чрезвычайно важен вопрос о выделении разного типа структур в таких последовательностях; одним из способов выявления структурированности является изучение такого рода распределений.

Интерпретация структуры, выявляемой в реальном генетическом тексте, требует сравнения поведения функции распределения $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l)$, наблюдаемой на реальном тексте, с тем или иным “образцом”. В качестве такого образца должна выступать аналогичная последовательность, обладающая, тем не менее, ясными и прозрачными комбинаторными либо теоретико-вероятностными (или статистическими) свойствами; очевидным кандидатом на роль такой образцовой последовательности является случайная последовательность.

Выбор случайной последовательности также не однозначен — можно выбрать случайные последовательности, являющиеся реализациями различных случайных процессов. Цель данной работы — построить функцию распределения $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l)$ для случай-

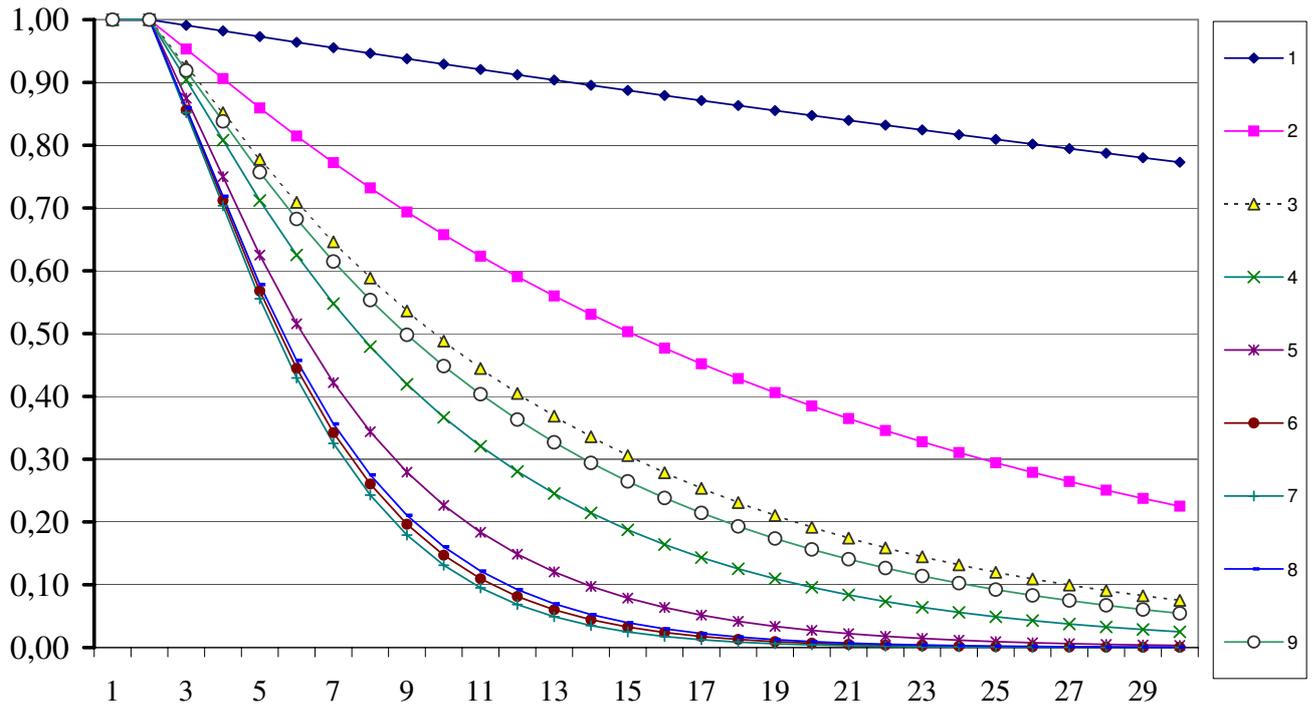


Рис. 1: Распределение вероятностей встретить ближайшего соседа на расстоянии l для слова 110 (жирным шрифтом выделены номера на легенде); вероятности появления единицы: $p(1) = 1/10$ – (1), $p(1) = 1/4$ – (2), $p(1) = 1/3$ – (3), $p(1) = 2/5$ – (4), $p(1) = 1/2$ – (5), $p(1) = 3/5$ – (6), $p(1) = 2/3$ – (7), $p(1) = 3/4$ – (8), $p(1) = 9/10$ – (9),

ной нескоррелированной последовательности из алфавита $\aleph^* = \{0, 1\}$ и выявить характерные особенности её поведения.

2 Материалы и методы

Задача построения функции $f_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle}(l)$ решалась не моделированием с помощью случайной последовательности, как это описано выше, а построением полного множества цепочек заданной длины l , $0 \leq l \leq 40$, которые бы удовлетворяли условию отсутствия в них заданного слова ω_2 . Поскольку результат такого построения существенно зависит от длины слова ω_2 , постольку рассматривались слова длины $q = 2, 3, 4$, и 5. Понятно, что слов длины $q = 5$ в двухбуквенном алфавите может быть $2^5 = 32$; функция $f_{\langle \omega_1, \omega_2 \rangle}(l)$ строилась для 16 из таких слов, в которых первым символом была 1.

Значение функции (1) для остальных 16 случаев можно получить из уже имеющихся. Действительно, обозначим первый символ в слове ω_2 единицей, а вероятность его встречи в исходной случайной последовательности — $p(1)$; тогда второй символ алфавита \aleph будет иметь вероятность $p(0) = 1 - p(1)$ и встречаться на тех местах, где не стоит символ 1. Любое слово ω_2 , которое фактически начинается с символа 0 в таком случае будет равносильно слову, полученному из него заменой всех 1 на 0 и 0 на 1 с соответствующей заменой значений вероятности встречи единицы. Слово ω_1 пустым (нулевой длины).

Базовый алгоритм построения всевозможных цепочек заданной длины L из символов алфавита $\aleph = \{0, 1\}$ представляет собой несложную рекурсию и выглядит следующим образом.

Изначально слово длины L заполним пустыми символами (не 1 и не 0); переменную j , которая будет означать номер обрабатываемого символа этого слова, положим равной 1. Затем, если $j \leq l$, на j -ую позицию слова длины L записываем символ 0, выполняем алгоритм рекурсивно вглубь для $j = j + 1$, а на рекурсивном возврате на ту же j -ую позицию записываем символ 1 и снова выполняем алгоритм для $j = j + 1$. Условием возврата на шаг назад является неравенство $j > l$. Алгоритм был реализован программно, так что упрощенный код данной функции на языке C++, к примеру, можно представить так:

```
int rec(int j)
{ if (j<=L)
  {
    str[j]=0;
    //проверка1
    rec(j+1); //прыжок1:
    str[j]=1;
    //проверка2
    rec(j+1);
  }
  else
    //проверка3
```

```
//прыжок2:
    return 0;
}
```

Теперь необходимо исключить из рассмотрения заведомо “неудачные” слова, то есть такие, в которых встречается подпоследовательность ω_2 . Для этого после записи на j -ую позицию нового символа — в коде это место обозначено комментарием `проверка1` и `проверка2` соответственно для 0 и 1 — проверяем, не образовалось ли в конце слова (то есть на последних l_2 местах, где l_2 — это длина подпоследовательности ω_2) подстрока, полностью совпадающая с ω_2 . Если это произошло, полученная последовательность считается “неудачной”, дальнейшее заполнение строки не требуется, и мы просто перескакиваем строчку входа в рекурсию на место помеченное комментарием `прыжок1` или `прыжок2`, соответственно.

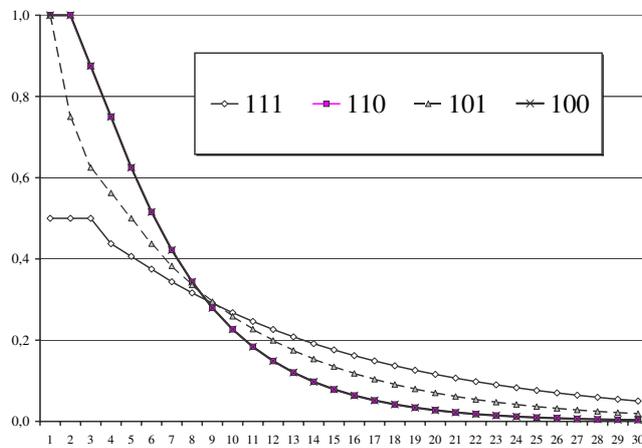


Рис. 2: Функция (1), определённая для четырёх слов 111? 110, 101 и 100 и $p(1) = 1/2$. Значения функции (1) для слов 110 и 100 полностью совпадают.

Очевидно, такая “неудача” может случиться, когда в строке ещё есть пустые места, то есть, перепрыгнув соответствующий вход в рекурсию, мы исключим формирование и рассмотрение сразу всех строк, начинающихся с уже заполненных j символов (они тоже будут “неудачными”). Также мы можем посчитать вероятность встречи такой “неудачи” — она будет равна произведению вида $p^a q^b$, где p и q — это вероятности появления единицы и нуля в исходной бесконечной последовательности ($p + q = 1$), а a и b — число нулей и единиц в уже имеющейся строке, соответственно ($a + b = j$).

Сложив вероятности всех “неудач” и отняв эту сумму от 1, мы и получим вероятность того, что в строке длины L не встречается подпоследовательность ω_2 .

Необходимо учесть, что если заполнена вся строка длины L и в ней не содержится подпоследовательности ω_2 , то это ещё не означает, что такая строка может считаться “удачной”. Необходимо, чтобы

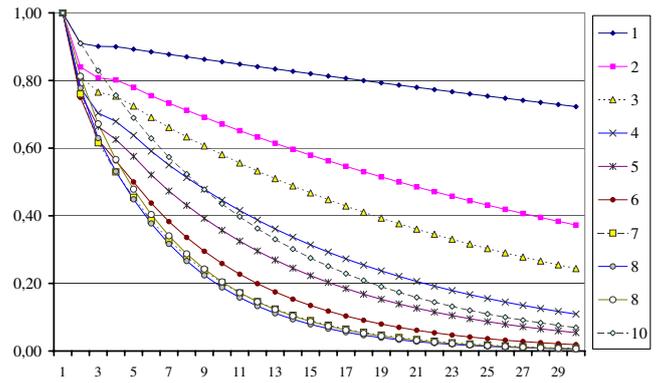


Рис. 3: Функция (1), определённая для слова 101 (жирным шрифтом выделены номера на легенде); вероятности появления единицы: $p(1) = 1/10 - 1$, $p(1) = 2/10 - 2$, $p(1) = 2/5 - 3$, $p(1) = 1/3 - 4$, $p(1) = 2/5 - 5$, $p(1) = 1/2 - 6$, $p(1) = 3/5 - 7$, $p(1) = 2/3 - 8$, $p(1) = 3/4 - 9$, $p(1) = 9/10 - 10$.

ещё и сразу после слова длины L встретилась ω_2 , а её структура может быть таковой, что, захватив несколько последних символов слова и несколько своих первых символов, она встретится раньше (например, слово 00011 длины $L = 5$ для подпоследовательности $\omega_2 = 111$ считается “неудачным”, так как начиная с 4-ого символа в нем встречается ω_2 , хотя изначально этого не было учтено). Поэтому перед выходом из рекурсии, то есть после того, как все L символов заполнены и “неудача” не выявлена, нужно проверить (`проверка3`), не встретится ли ещё в конце ω_2 , если к строке длины L приписать $(l_2 - 1)$ фиксированный символ подпоследовательности ω_2 .

3 Результаты

На рисунке 1 представлены результаты построения функции (1) для случая $\omega_1 = \emptyset$ и $\omega_2 = 110$. Хорошо видно, что для случайной нескоррелированной последовательности, для которой прямой перебор всех “удачных” и “неудачных” замощений длины l даёт ответ на вопрос о виде функции распределения 1, наблюдается экспоненциальное падение этой функции, по мере роста длины l .

Уже из этого рисунка видно, что общий вид функции (1) оказывается зависящим от вида стартового и конечного слов. Рисунок 2 показывает поведение функции (1) для случая $\omega_1 = \emptyset$ и $\omega_2 = 101$. Функция распределения вероятностей встречи ближайшего соседа является невыпуклой; по-видимому, можно ожидать, что эта невыпуклость трансформируется в немонотонность (типа распределения Лапласа) для более длинных слов.

Одним из интересных эффектов является зависимость формы распределения (а возможно, и вида) от слов, выбранных в качестве соседей. Этот эффект, в частности, проявляется в том, что декремент затухания функции (1) принимает разные зна-

Таблица 1: Значения декрементов затухания λ , вычисленное для слов длины три и пять. Объяснения в тексте.

слово	Вероятности $p(1)$								
	0.1	0.25	0.33333	0.4	0.5	0.6	0.66667	0.75	0.9
111	0,000903	0,012231	0,027150		0,083771		0,195443	0,287806	0,605618
110	0,009209	0,053553	0,093402	0,133699	0,209699	0,301648	0,339647	0,279027	0,105142
101	0,008375	0,029317	0,043197	0,070068	0,093884	0,130485	0,161721	0,173713	0,170050
100	0,105142	0,279027	0,339647	0,301648	0,209699	0,133699	0,093402	0,053553	0,009209
10000	0,100793	0,158904	0,119405	0,070065	0,036633	0,016506	0,005816	0,001287	0,000090
10001	0,006874	0,020028	0,031847	0,037150	0,034015	0,024715	0,013804	0,005207	0,000812
10010	0,006903	0,019632	0,030431	0,034804	0,031647	0,023166	0,013163	0,005069	0,000805
10011	0,000805	0,005098	0,013422	0,024165	0,034015	0,038544	0,034295	0,021995	0,007477
10100	0,007534	0,022597	0,036106	0,041341	0,036633	0,025774	0,014067	0,005239	0,000813
10101	0,000733	0,004370	0,010974	0,019074	0,026323	0,029908	0,027455	0,018656	0,006839
10110	0,000805	0,005069	0,013163	0,023166	0,031647	0,034804	0,030431	0,019632	0,006903
10111	0,000090	0,001279	0,005706	0,015852	0,034015	0,061666	0,096559	0,120375	0,088104
11000	0,007534	0,022597	0,036106	0,041341	0,036633	0,025774	0,014067	0,005239	0,000813
11001	0,000805	0,005098	0,013422	0,024165	0,034015	0,038544	0,034295	0,021995	0,007477
11010	0,000813	0,005239	0,014067	0,025774	0,036633	0,041341	0,036106	0,022597	0,007534
11011	0,000088	0,001220	0,005280	0,014165	0,029229	0,050778	0,076391	0,095107	0,077329
11100	0,000813	0,005239	0,014067	0,025774	0,036633	0,041341	0,036106	0,022597	0,007534
11101	0,000090	0,001279	0,005706	0,015852	0,034015	0,061666	0,096559	0,120375	0,088104
11110	0,000090	0,001287	0,005816	0,016506	0,036633	0,070065	0,119405	0,158904	0,100793
11111	0,000009	0,000256	0,001717	0,006356	0,017134	0,038263	0,076480	0,145403	0,285751

чения для разных слов, а также для разных значений вероятности появления отдельного символа. Поясним сказанное: асимптотическое поведение функции $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l)$, наблюдаемой для случайных нескоррелированных последовательностей, хорошо описывается формулой $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l) \sim A \cdot \exp\{-\lambda \times l\}$ при $l \rightarrow \infty$. При этом для разных величин вероятности $p(1)$ появления символа 1 в последовательности будет наблюдаться разное значение λ .

Есть и противоположный эффект — при фиксированном значении величины вероятности $p(1)$ появления символа 1 в последовательности наблюдаются разные значения λ для терминальных слов различного вида. Рисунок 3 иллюстрирует этот факт.

В Таблице 2 представлены результаты вычисления декремента затухания экспоненциальной части в функции $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l)$. Хорошо видно, что значения λ зависят как от вероятности $p(1)$ появления символа 1, так и от структуры слова ω_2 . Обращает на себя внимание наличие двух “симметричных” распределений: например, декременты совпадают (если заменить символ 1 на 0) для слов 110 и 100. Аналогичное поведение наблюдается и для слов 10100 и 11100, для слов 11000 и 11010 и некоторых других. Значения декрементов λ совпадают для слов 10100 и 11000.

4 Обсуждение

В работе представлены предварительные результаты исследования поведения распределения слов фиксированной структуры “до ближайшего соседа”. Такого

рода распределения позволяют выявить те или иные структуры в символьных последовательностях различной природы, в частности — в генетических. Анализ распределений вида $f_{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}(l)$, наблюдаемых для реальных последовательностей, требует ответа на вопрос о теоретически возможных типах такого распределения. Ответ на этот вопрос достаточно сложен и основным инструментом здесь является вычислительный эксперимент.

Если асимптотическое поведение функции распределения является типичным — распределение вероятностей встретить данного “ближайшего соседа” экспоненциально затухает с расстоянием, то и характеристики такого затухания, и вид распределения на малых расстояниях оказываются зависящими от слов, выбранных в качестве соседей.

Список литературы

- [1] M. Cuturi and J. P. Vert. The context-tree kernel for strings. *Neural Networks*, 18:1111–1123, 2005.
- [2] K. Karamanos L. Athanasopoulou, S. Athanasopoulos and Y. Almirantis. Scaling properties and fractality in the distribution of coding segments in eukaryotic genomes revealed through a block entropy approach. *Phys. Rev.*, B, 82:051–917, 2010.
- [3] A. Wray. *Formulaic Language and the Lexicon*. Cambridge Univ. Press, London, 2002.

Об электоральном поведении избирателей России

Михаил Георгиевич Садовский

ИВМ СО РАН, Красноярск
msad@icm.krasn.ru

Екатерина Борисовна Логинова

СФУ, Красноярск
Borisovna111@yandex.ru

Аннотация. В работе представлены первые результаты по изучению стратификации избирателей России по признакам электорального поведения. Представлены данные анализа выборов в ГД ФС РФ 2011 г. Методами динамических ядер и упругих карт выделены кластеры, в которые попадают территории, в которых избиратели проявляют одинаковое либо близкое поведение при выборе политических партий. Показано, что Россия делится на двадцать электоральных зон; обсуждены возможные социологические механизмы формирования таких зон и факторы, оказывающие влияние на их формирование.

Ключевые слова. Выборы, распределение, кластеризация, энтропия, механизм управления

1 Введение

Выборы представительных органов власти, либо кандидатов на должности, замещаемые на выборной основе (например, главы городов, Президент) являются общепринятой практикой социального управления во всём мире. Эффективность такого рода механизмов зависит от многих факторов, среди которых следует выделить те, которые связаны с обеспечением эффективной политической и/или социальной коммуникации между претендентом на должность либо представителями какой-либо из партий и избирателями.

Не вызывает сомнения тот факт, что избиратели не являются абсолютно однородным множеством людей; они различаются как по биологическим, демографическим, антропологическим показателям, так и по социальным, политическим и т. д. Такого рода различия влияют на их выбор того или иного политического агента. Комплекс явлений, связанных с формированием интенции к выбору политического агента и её реализацией будем называть электоральным поведением.

Для такой большой по физическим размерам, населению и разнообразию населяющих страну этнических, социальных и политически ориентированных групп населения, весьма актуальной является задача выделения кластеров территорий¹, в которых избиратели

ведут себя примерно одинаково, с точки зрения реализации их политического выбора.

Выделение кластеров с однотипными в смысле электорального поведения территорий важно как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения. Начнём с последней: различия в электоральном поведении с необходимостью влекут за собой различия в способах доставки и представления соответствующих информационных, агитационных и пропагандистских материалов того агента, который участвует в выборах, проходящих на данной территории.

Фундаментальная ценность такого рода кластеризации в том, что она позволяет чётче описать структуру общества, детальнее обрисовать типичные поведенческие паттерны, выявить механизмы социального управления, которыми можно такого рода паттерны формировать либо модифицировать.

Настоящая работа посвящена представлению предварительных результатов изучения структурированности российских избирателей, проживающих в различных территориях Российской Федерации, по такому важному показателю, как их электоральное поведение. Показано, что Российская Федерация содержит двадцать чётко выраженных кластеров, объединяющих территории по подобию электорального поведения избирателей, проживающих в этих регионах.

Кластеризация проводилась двумя методами: методом динамических ядер (линейная статистика) и методом упругих карт (нелинейный статистический анализ). Результаты кластеризации весьма устойчивы, однако наблюдается и “естественный шум”: если в целом кластер состоит из географически близких территорий, то иногда в них попадают и весьма удалённые (с географической точки зрения) территории. Такого рода включение “далёких” территорий требует отдельного изучения. Проведён также предварительный анализ социологических и социально-экономических характеристик обнаруженных кластеров.

В работах [8, 6] перечислены некоторые теории, объясняющие электоральное поведение избирателей: теория рационального голосования А. Даунса, теория валентности Д. Стокса, социологическая теория (основа — теория социальных расколов или размеже-

¹Всюду далее под территориями мы будем понимать административные единицы, представленные в избирательном процессе территориальными избирательными комиссиями (ТИК),

либо избирательной комиссией региона (например, ИК Красноярского края).

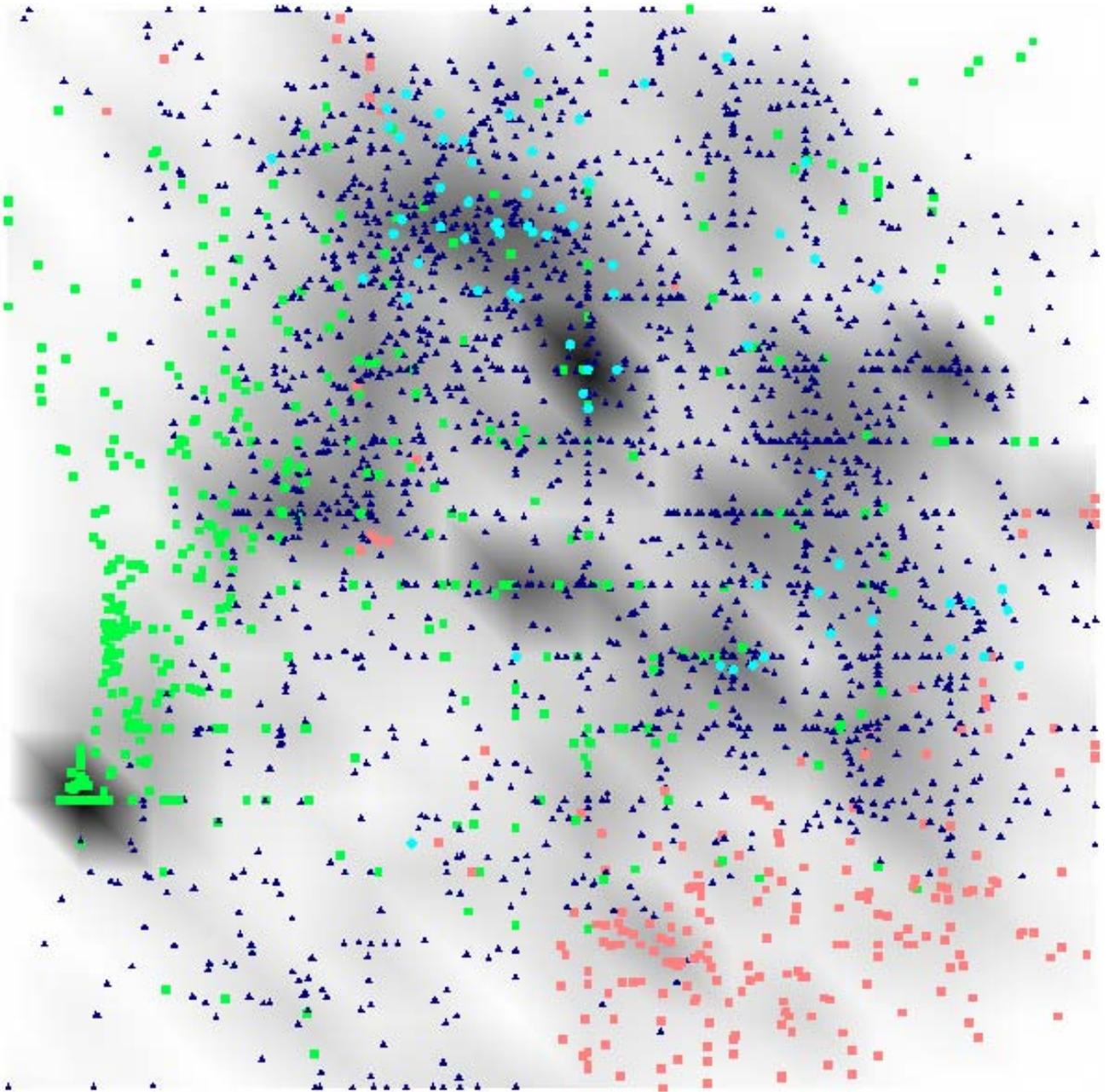


Рис. 1: Упругая карта для распределения ТИКов. Красным цветом выделены ТИКи городов, зелёным — республик, голубым — Красноярского края. Представлена мягкая карта размером 16×16 .

ваний (cleavage)). Последняя теория объясняет выбор избирателя его принадлежностью к определенной группе, которые как раз и формируются в результате существования расколов в обществе: деление по доходу, месту жительства (город vs. село и т.п.), вероисповеданию и проч. В этих работах также предпринята попытка типизации российского электората на основе опросных данных ВЦИОМ.

В фундаментальной работе [11] приведены результаты регрессионного анализа материалов на основе 34 стран и показано влияние на политические предпочтения избирателей таких «классических» расколов, как этнолингвистические, религиозные разме-

жевания, а также уровень доходов, принадлежность к социальному классу.

Географические и социальные различия в электоральном поведении российских избирателей — в первую очередь, различия между городскими и сельскими избирателями — рассмотрены в работах [4, 3, 5, 7]. Учёт двух показателей — уровень урбанизации и количество жителей в городе — позволяет выделить шесть кластеров, в которые и были объединены все ТИКи: 1) сельские ТИКи; 2) смешанные ТИКи; 3) урбанизированные ТИКи; 4) городские ТИКи в малых и средних городах; 5) городские ТИКи в больших и крупных городах; 6) городские ТИКи в

городах-миллионерах [4]. В работе рассмотрены различия в политическом поведении (явка и электоральные предпочтения) российских избирателей на выборах 1995–2000 гг. в зависимости от того, к типу какой территориальной комиссии они принадлежат.

2 Материалы и методы

Впредь будем называть субъекты Российской Федерации регионами, а существующие в них избирательные округа — территориями (соответствующими ТИКа́м). Работа посвящена построению кластеризации территорий. Анализ кластерной структуры территорий проводился двумя методами: методом динамических ядер (линейная статистика) и методом упругих карт (нелинейная статистика).

Кластеризация территорий по электоральному поведению проводилась на основе официальных данных ЦИКа об итогах выборов в ГД ФС РФ, проходивших 4 декабря 2011 г. Дискуссия о низком уровне верифицируемости этих данных была весьма жаркой, однако не привела к пересмотру итогов выборов либо изменению их результатов².

Всего база данных содержала 2717 территорий; для каждой территории указывался регион, к которому она принадлежит, а также тип региона (республика, край, город, область, автономная область, автономный округ) и тип территории — село либо город. База включает в себя три “исключительные” территории: город Байконур и два ТИКа, организованные на судах на Дальнем Востоке. При этом ТИКу Байконура был приписан статус города, а судовым ТИКа́м — статус села. Зарубежные территории в учёт не брались.

Метод динамических ядер Метод динамических ядер относится к классическим методам кластеризации. Не имея возможности описать его здесь в сколько-нибудь полном объёме, отошлём читателя к работе [1], в которой этот метод описан исчерпывающим образом. Для построения кластеризации методом динамических ядер использовались данные о результатах голосования в каждой территории³, при этом одна из партий была исключена из анализа; это связано с тем, что рассмотрение всех партий вносит сильную паразитную связь между данными, поскольку сумма долей голосов по всем партиям в каждой территории равна 1.

Использовалась версия метода, при которой первоначальное число кластеров K не уменьшалось в ходе построения кластеризации. Иными словами, мы не проверяли различимость полученных кластеров. Устойчивость построенной кластеризации (в зависи-

²За исключением малого числа избирательных участков, что не может повлиять на изложенные здесь результаты.

³“В разрезе ТИКа́в”, на профессиональном жаргоне.

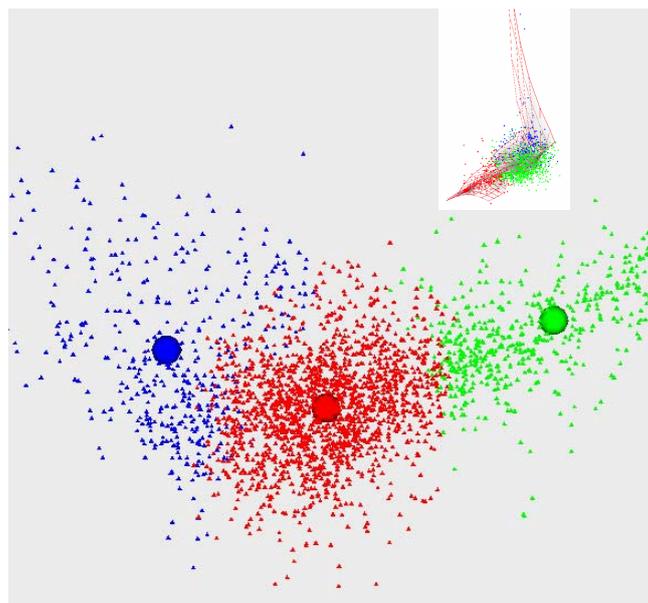


Рис. 2: Распределение территорий в пространстве долей голосов; каждая точка — территория. Показана кластеризация на три класса, полученная методом динамических ядер. Большие шары показаны центроиды классов; размер центроида соответствует его весу. Во врезке то же распределение, показанное в естественных координатах.

мости от числа кластеров K) проверялась построением серии кластеризаций и проверкой лабильности отдельных территорий из кластера в кластер.

Метод упругих карт Кластеризация также проводилась методом построения упругих карт [2]. Для анализа кластерной структуры распределения территорий Российской Федерации использовалась мягкая⁴ упругая карта размером 16×16 , а для выявления (контрастирования) кластеров при вычислении функции локальной плотности распределения радиус корреляции составлял $r = 0,13$ и $r = 0,05$.

3 Результаты

Рассмотрим результаты построения кластеров, типизирующих территории Российской Федерации по подобию электорального поведения их населения. В Разделе 3.1 представлены результаты построения кластеров методом динамических ядер, в разделе 3.2 — результаты построения кластеров методом упругой карты.

3.1 Метод динамических ядер

При построении кластеризации методом динамических ядер всегда встаёт вопрос об устойчивости такого рода кластеризаций. Поскольку построение кластеризации начинается со случайного разбиения территорий на K классов, постольку возможна ситуа-

⁴“Мягкая” из стандартных установок программы.

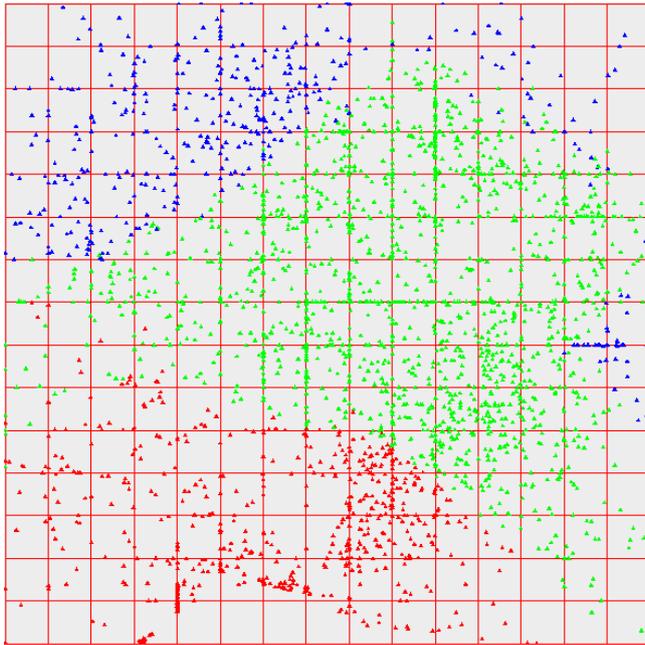


Рис. 3: Классификация территорий методом динамических ядер, показанная на упругой карте (внутренние координаты).

Таблица 1: Распределение ТИКов разных типов по трём кластерам. Показаны как абсолютные значения числа ТИКов (N), так и процентное соотношение.

Тип поселения	I кл.		II кл.		III кл.	
	N	%	N	%	N	%
Город	312	18,7	107	17,3	375	86,0
Село	1355	81,3	510	82,7	61	14,0

ция, при которой существенная часть территорий будет (рассогласованно) менять свою принадлежность к тому или иному кластеру. Серия вычислительных экспериментов показала, что территории в пространстве долей голосов очень устойчиво кластеризуются на три класса; при этом кластеризация на четыре класса (и больше), а также на два класса показывала крайне низкую степень устойчивости: доля мобильных территорий приближалась к единице.

В Таблице 1 представлены результаты распределения по кластерам ТИКов, соответствующих городским и сельским поселениям. Подчеркнём, что в этой таблице указаны проценты городских и сельских ТИКов **в каждом кластере отдельно**, а не распределение территорий между кластерами.

На рисунках 2 и 3 показаны распределения территорий в пространстве долей голосов; каждая точка — территория. На рисунке 2 показано распределение в главных компонентах. Врезка на рисунке показывает то же самое распределение, но в трёх (основных) естественных компонентах; в данном случае это оси, соответствующие партиям *Справедливая Рос-*

сия, ЛДПР и Патриоты России.

Как видно из рисунка 4, подавляющее большинство регионов относится к одному кластеру. Особый интерес представляют те регионы, где различные ТИКи попали сразу в два или три кластера. Несмотря на то, что, к примеру, Тульскую, Брянскую и Астраханскую области по количеству ТИКов можно отнести к одному кластеру (первому), в данных регионах около 30% избирательных комиссий попали во второй кластер. Аналогичная ситуация наблюдается в Краснодарском крае и Алтайской Республике. Анализ “тер-

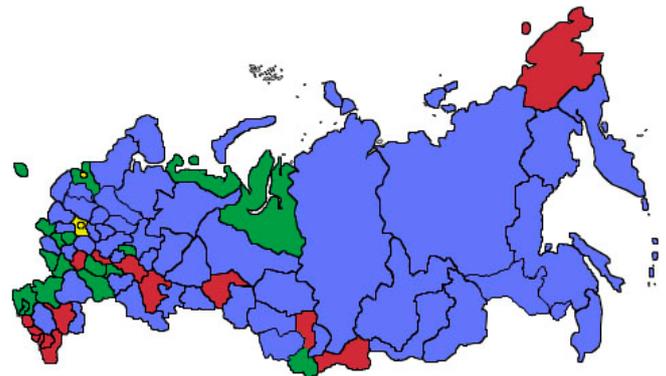


Рис. 4: Классификация территорий методом динамических ядер; географический анализ.

риториальной близости” избирательных комиссий из второго кластера показал, что в Тульской и Брянской областях были обнаружены группы ТИКов, расположенных рядом друг с другом и граничащих с ТИКаами из первого кластера. Похожая ситуация наблюдалась и в Республике Алтай. Саратовская, Пензенская, Белгородская области, Республика Адыгея и Ненецкий АО также по количеству ТИКов распределились в основном между двумя кластерами (первым и вторым). Однако большинство ТИКов данных регионов здесь уже попали во второй кластер (50–60%).

Отдельно стоит обратить внимание на регионы, в которых вместе с первым и вторым кластерами был представлен ещё и третий (Таблица 2). Если проанализировать “территориальное сочетание” кластеров, как наиболее далёкие по электоральному поведению избирателей на прошедших выборах, то мы обнаружим, что, к примеру, в Воронежской области г. Воронеж (третий кластер) оказался в кольце ТИКов из второго кластера (Новоусманская, Семилукская, Хохольская, Репьевская, Рамонская, Панинская и т.д.). В Ростовской области наблюдается похожая ситуация: районы из третьего кластера сконцентрированы в одном месте (на юге области), из второго — группами расположены по всему региону.

Таблица 2: Регионы РФ, распределившиеся по трём кластерам. Показаны как абсолютные значения числа ТИКов (N), так и процентное соотношение.

Регион	I кл.		II кл.		III кл.	
	N	%	N	%	N	%
Марий Эл	8	44,4	8	44,4	2	11,1
Воронежская	18	46,2	15	38,5	6	15,4
Ростовская	34	54,8	20	32,3	8	12,9
Орловская	19	63,3	7	23,3	4	13,3
Ульяновская	17	58,6	6	20,7	6	20,7

3.2 Метод упругих карт

На Рисунке 1 показано распределение территорий на упругой карте. Параметры карты указаны в подписях к рисунку. Хорошо видно, что на этом рисунке выделяется двадцать кластеров. При этом часть территорий также образуют плотные группы, однако их численность внутри группы недостаточно велика для того, чтобы сформировался кластер — при заданных параметрах контрастирования.

Рассмотрим структуру некоторых кластеров из числа представленных на рисунке 1 подробнее. Начнём с самого выраженного кластера, который находится в нижнем левом углу карты. В него вошли ТИКи 7 регионов: вся Чеченская Республика, 5 ТИКов Республики Тыва, 23 ТИКа Татарской Республики, 12 — Мордовии, 3 — Карачаево-Черкесской Республики, 2 — Дагестанской и всего один Башкирской.

4 Обсуждение

Методы линейной кластеризации чётко выделяют три кластера, в которые объединяются различные территории РФ, с точки зрения электорального поведения (т. е., политических предпочтений в заданном пространстве выбора политических агентов) их жителей. Состав указанных кластеров совершенно точно не является случайным: в один кластер попадают территории, близкие как с точки зрения социально-экономического положения, так и с точки зрения этнических, культурных, языковых, религиозных и т. п. характеристик.

Изучение структуры кластеров показывает, что республики, существующие в составе России, отличаются от прочих регионов не только названием: удивителен тот факт, что многие из них попадают в один и тот же кластер, при этом сам факт такого статуса является единственным ведущим фактором, определяющим их принадлежность к тому или иному кластеру. Конечно, есть и исключения из этого правила — так, например, Республика Карелия существенно выбивается из этого правила. Не вызывает сомнения здесь то обстоятельство, что культурные, геогра-

фические, социальные и этнографические особенности этой республики оказывают большее влияние на структуру электоральных предпочтений её жителей, чем сам по себе статус республики в составе РФ.

Анализ электорального поведения методом упругих карт выявляет существенно большее число кластеров; выделение кластеров этим методом не может быть осуществлено полностью формально. Значение главного для такой кластеризации параметра — радиуса корреляции — не может быть определено формально и является предметом выбора исследователя. При выбранном нами значении ($r = 0,05$) чётко выявляются как минимум пятнадцать кластеров, из которых два — чрезвычайно плотные.

Один из таких плотных кластеров включает в себя республики Северного Кавказа и иные территории с преимущественно мусульманским населением. Ещё одним важным фактором расщепления избирателей по типам паттерна электорального поведения является место жительства (точнее, тип населённого пункта).

Таблица 3: Распределение ТИКов в крупных городах. Показаны как абсолютные значения числа ТИКов (N), так и процентное соотношение.

Город	I кл.		II кл.		III кл.	
	N	%	N	%	N	%
Москва	29	23,2	3	2,4	93	74,4
С.-Петербург	1	3,3	0	0	29	96,7
Новосибирск	0	0	0	0	10	100
Екатеринбург	0	0	0	0	7	100
Н. Новгород	3	33,3	0	0	6	66,67
Самара	3	33,3	1	11,1	5	55,56
Омск	0	0	0	0	5	100
Казань	1	20,0	4	80,0	0	0
Челябинск	4	40,0	0	0	6	60,0
Ростов/Дон	3	42,9	0	0	4	57,1
Уфа	3	42,9	3	42,9	1	14,3
Волгоград	1	12,5	0	0	7	87,5

Следует сказать, что и большие города также не являются однородным социологическим объектом, с точки зрения электорального поведения их жителей. В Таблице 3 представлены результаты распределения ТИКов больших городов по трём классам, полученным методом динамических ядер. Из этой таблицы хорошо видно, что большие города сами по себе делятся на две группы: в первую попадают те, в которых ТИКи распределяются между первым и третьим кластерами, а во вторую — те, в которых ТИКи распределяются между первым и вторым кластерами. Примечательно, что таких городов (из второй группы) два и оба они являются столицами крупных экономически развитых республик с преимущественно мусульманским населением и соответствующим статусом.

ще оформленной идеологией, и располагающиеся в Поволжье.

Ещё одной важной сферой приложений такого рода исследований по типизации (кластеризации) территорий РФ по типам электорального поведения может стать задача выявления референтной территории, т. е., такой территории, для которой результаты голосования могут иметь высокую эвристическую и прогнозную силу, для прогнозирования исхода выборов в целом по стране.

В США такой территорией традиционно считается штат Нью-Гемпшир; действительно, уже многие годы итоги выборов в целом по стране могут быть с хорошей надёжностью предсказаны по исходу голосования в этом штате. Другие варианты получения очень надёжного прогноза см. в [9, 10, 1].

Здесь есть, однако, серьёзная проблема, которую следует учитывать при решении такой задачи применительно к выборам в России. Очевидно, что найти территорию, аналогичную — по электоральному поведению — в России не составит труда: всегда найдётся такая территория, в которой исход выборов оказался ближе всего к общефедеральным результатам. Более того — предположим даже, что такая территория является устойчивой (что не так в действительности), т. е. она всегда одна и та же в каждом электоральном цикле. Это, тем не менее, никак не гарантирует того, что по ней можно будет предсказывать исход выборов в целом по федерации.

Эта сложность в первую очередь связана с тем, что в США у избирателей сложились устойчивые и достаточно хорошо описанные, а следовательно, и осознаваемые, до определённой степени, паттерны электорального поведения. Существование такого рода паттернов в российской действительности вызывает сильные сомнения: сам факт того, что от цикла к циклу в нашей стране существенным образом меняется список политических акторов, принимающих участие в выборах, делает существование упомянутых паттернов весьма сомнительным. Здесь требуются весьма обширные и трудоёмкие социологические исследования, направленные на изучение особенностей электорального поведения российских избирателей, да ещё и в разных регионах.

Перечислим кратко те задачи, которые возникают в связи с предложенным методом изучения электорального поведения жителей Российской Федерации, кроме уже упомянутой выше задачи выявления “индикаторной” территории. **Во-первых**, это исследование подобия в электоральном поведении страны в целом и отдельных её регионов. Имеется в виду следующее: пусть мы построили тем или иным способом кластеризацию регионов. Верно ли, что аналогичное поведение может наблюдаться и на уровне отдельного региона? Понятно, что ответ на этот вопрос су-

щественно зависит от выбора региона, но тем не менее, сам по себе такой вопрос является актуальным. **Во-вторых**, важным является вопрос об устойчивости наблюдаемых распределений как во времени, так и в пространстве долей голосов. Поясним сказанное. Важна повторяемость распределений, наблюдаемых в различные электоральные циклы. Кроме того, важна устойчивость распределений в пространстве “традиционных” партий. Эта последняя позволяет выявить реальных политических акторов, действующих в стране.

Список литературы

- [1] А. Н. Горбань и Д. А. Россиев. *Нейронные сети на персональном компьютере*. Наука, Новосибирск, 1996.
- [2] А. Ю. Зиновьев. <http://bioinfout.curie.fr/projects/vidaexpert>. Интернет ресурс.
- [3] А. Н. Лузанов. О территориальной дифференциации электоральных предпочтений населения России. *Вестник МГУ, сер. География*, 5:15–22, 1998.
- [4] А. П. Жидкин. Электоральное поведение городских и сельских жителей России. *Вестник МГУ, сер. География*, 5:47–54, 2002.
- [5] Р. Ф. Туровский. Конфликты на уровне субъектов Федерации: типология, содержание, перспективы урегулирования. *Общественные науки и современность*, 6:79–89, 2003.
- [6] А. С. Ахременко. Социальные размежевания и структуры электорального пространства России. *Социальные науки и современность*, 4:80–92, 2007.
- [7] Н. В. Гришин. *Динамика электоральных предпочтений населения Юга России: сравнительный анализ*. Социально-политическая мысль, Москва, 2008.
- [8] А. В. Захаров. Оценка размежевания и электорального пространства и построение математической модели выбора избирателя. *Прикладная эконометрика*, 2(10):75–90, 2008.
- [9] A. N. Gorban and C. Waxman. How many neurons are sufficient to elect the u.s.a. president? *AMSE Transaction, Scientific Siberian, A*, 6:168–188, 1993.
- [10] A. N. Gorban and C. Waxman. Neural networks for political forecast. *Proc. of the WCNN'95*, pages 176–178, 1995.
- [11] P. Norris. *Electoral Engineering. Voting Rules and Political Behavior*. Cambridge, 2004.

Моделирование эволюции восприятия риска в процессе управления портфелем ценных бумаг

Саркисов Виген Геннадьевич

Самарский государственный технический университет
Кафедра управления и системного анализа в теплоэнергетике
Самара
vigen.sarkisov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос построения динамической модели, описывающей изменение представлений инвестора о риске. Полученная модель может служить основой для синтеза системы управления портфелем, не только обладающей высокой эффективностью, но и поддерживающей субъективно низкий уровень риска для инвестора, что обеспечивает психологический комфорт.

Ключевые слова. Риск, модель, инвестор, портфель ценных бумаг, индивидуальное доверительное управление, временной ряд, передаточная функция.

1 Введение

На современном этапе развития финансового рынка Российской Федерации все большую популярность приобретают различные формы индивидуального доверительного управления. В большинстве случаев такое управление является “индивидуальным” лишь с формальной точки зрения – индивидуальный счет инвестора управляется по одной из нескольких предлагаемых управляющей компанией стратегий. Индивидуальные предпочтения и особенности восприятия инвестора учитываются лишь на этапе выбора стратегии, причем количество предлагаемых стратегий обычно невелико, а способ учета предпочтений не формализован и сводится к устному собеседованию и предложениям выбрать более “агрессивную” или “консервативную” стратегию. Кроме того, абсолютно игнорируется фактор воздействия результатов управления на восприятие инвестора, что со временем приводит к его недовольству даже при условии, что начальная стратегия была выбрана правильно.

Анализ рассмотренной проблемы приводит к двум основным задачам:

1. Задача первоначальной идентификации предпочтений инвестора и подбора (или синтеза) соответствующей им стратегии;
2. Задача идентификации динамики предпочтений инвестора и адаптации выбранной или синтеза новой стратегии.

Первая задача может быть с приемлемым качеством решена одновременно при посещении клиентом офиса компании. Вторая задача требует периодического взаимодействия клиента с компанией. Благодаря развитию интернет-технологий, такое взаимодействие становится все более реальным. Вместе с повышением производительности вычислительной техники, данная тенденция создает предпосылки к созданию индивидуальных систем управления инвестиционным портфелем, которые придерживаются максимально комфортных для данного инвестора стратегий.

В качестве предварительного этапа исследования динамики восприятия инвестора предлагается произвести построение модели, в основу которой будут положены результаты тестирования инвестора в офисе компании.

2 Предварительное тестирование инвестора

2.1 Идеология предварительного тестирования

Для исследования динамических свойств восприятия инвестора предлагается предъявить ему последовательность результатов управления самофинансируемыми инвестиционными портфелями, каждый из которых характеризуется графиком изменения стоимости портфеля во времени. Инвестор дает оценку риска для каждого портфеля на основе собственного восприятия. Параллельно для каждого из портфелей вычисляется объективная оценка риска.

Такой подход позволяет представить восприятие инвестора в виде динамической системы, на вход которой подается последовательность графиков изменения стоимости портфеля, характеризуемых объективной оценкой риска, а на выходе формируется последовательность субъективных оценок риска Y_t . С целью упрощения модели на данном этапе в качестве входа будет рассматриваться последовательность объективных оценок риска X_t . Приближенно опишем восприятие инвестора в виде линейного фильтра:

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v_i X_{t-i}. \quad (1)$$

Коэффициенты v_i описывают функцию отклика на единичный импульс. Под единичным импульсом понимается последовательность X_t :

$$X_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t = T; \\ 0, & \text{если } t \neq T, \end{cases} \quad (2)$$

где T – момент импульса.

При условии, что восприятие инвестора можно описать (1), построение модели сводится к нахождению коэффициентов v_i , для чего необходимо сначала представить инвестору последовательность портфелей с различными уровнями риска.

Очевидно, что на коэффициенты v_i (и на модель в целом) существенно влияет выбор показателя, используемого в качестве объективной оценки риска.

2.2 О выборе показателей для объективной оценки риска

Показатели, используемые для объективной оценки риска, должны удовлетворять следующим (не строго формализованным) требованиям и пожеланиям:

- Показатель должен описывать аспекты риска, актуальные для инвестора.
- Риск должен описываться непосредственно, а не через косвенные показатели. Например, процент убыточных сделок, хотя и имеет отношение к риску потери денежных средств, сами потери оценить не позволяет.
- Желательно, чтобы показатель риска был (насколько это возможно) независимым от показателей, описывающих другие аспекты качества управления портфелем. Например, в [2] показано, что традиционно используемая для оценки риска дисперсия доходности связана сильной корреляционной зависимостью с самой доходностью.
- Желательно, чтобы смысл показателя был понятен инвестору, не имеющему специального образования, на уровне “здорового смысла”.

В рамках данной статьи в качестве показателя для объективной оценки риска выбран максимальный процент потерь стоимости портфеля (maximum drawdown) [1].

2.3 Синтез временных рядов цен портфелей для тестирования инвестора

К временным рядам цен портфелей были предъявлены следующие требования:

- Реализуемость – портфель с соответствующими характеристиками должен быть реализуем в условиях российского финансового рынка.
- Заданный уровень объективной оценки риска.
- Возможность задавать значения показателей качества управления, не описывающих риск, независимо от заданного уровня риска.

Основой для временных рядов послужили реальные временные ряды изменения индекса ММВБ (<http://rts.micex.ru/s75>), что является гарантией реализуемости. Фрагменты временных рядов с заданной доходностью и риском формировались по следующему алгоритму:

1. Формирование множества эталонных временных рядов:
 - (a) Временной ряд $I^0[n]$ ($n = \overline{1, N}$) значений индекса ММВБ (с шагом дискретизации в 1 день) разделяется на K фрагментов $I_k^0[n]$ ($n = \overline{1, N_k}$) продолжительностью в 1 квартал.
 - (b) Из каждого полученного фрагмента вычитается линейная составляющая, найденная по методу наименьших квадратов и формируется временной ряд $I_k^1[n]$ отклонений от линейного тренда.
 - (c) Значения нормируются относительно минимального и максимального значения квартала:

$$I_k^2[n] = 2 \frac{I_k^1[n] - \min_{i \in [1, N]} I_k^1[i]}{\max_{i \in [1, N]} I_k^1[i] - \min_{i \in [1, N]} I_k^1[i]} - 1. \quad (3)$$

2. Формирование временного ряда $I_k^*[n]$ с заданной доходностью D^* (в %/день) и риском R^* (в %):
 - (a) Формируется ряд $I_k^3[n]$, содержащий трендовую составляющую и псевдослучайную составляющую, представленную рядом $I_k^2[n]$:

$$I_k^3[n] = (1 + \alpha)^{n-1} (1 + \beta I_k^2[n]), \quad (4)$$

где коэффициент α косвенно характеризует доходность, а β – амплитуду колебаний.

- (b) Для ряда $I_k^3[n]$ вычисляется средняя доходность (D_k) и максимальный процент потерь стоимости портфеля (R_k):

$$D_k = \frac{1}{N_k - 1} \sum_{n=2}^{N_k} \frac{I_k^3[n] - I_k^3[n-1]}{I_k^3[n-1]} \cdot 100\%. \quad (5)$$

$$R_k = \max_{n \in [1, N_k]} \frac{\max_{i \in [1, n]} I_k^3[i] - I_k^3[n]}{\max_{i \in [1, n]} I_k^3[i]} \cdot 100\%. \quad (6)$$

(с) Изменяя коэффициенты α и β и повторяя два предыдущих шага, находим такие значения α и β , чтобы $D_k = D^*$ и $R_k = R^*$. Автор использовал для нахождения коэффициентов метод циклического покоординатного спуска, минимизируя невязку Δ :

$$\Delta = (D_k - D^*)^2 + (R_k - R^*)^2. \quad (7)$$

Для каждого ряда (4) существует единственный экстремум (минимум) функции Δ . Найденный экстремум дает временной ряд $I_k^3[n]$, соответствующий заданным требованиям к доходности и риску.

(d) Временной ряд $I_k^3[n]$ нормируется и формируется ряд $I_k^*[n]$, который бы воспринимался инвестором как продолжения ряда $I_{k-1}^*[n]$:

$$I_k^*[n] = I_k^3[n] \frac{I_{k-1}^*[N_{k-1}]}{I_k^3[1]}. \quad (8)$$

На рис.1 приведен пример поэтапного преобразования временного ряда индекса ММВБ во временной ряд $I_k^*[n]$ с заданными значениями критериев доходности и риска.

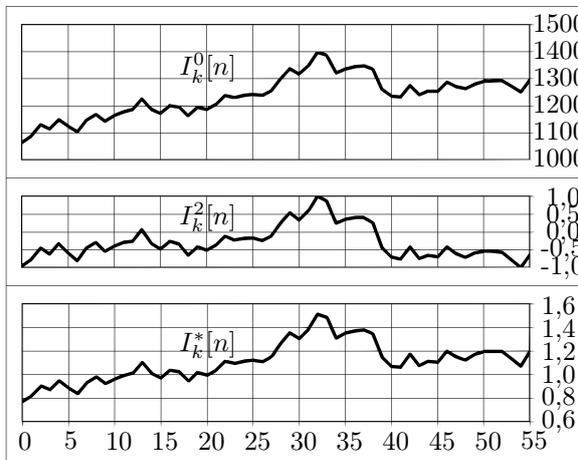


Рис. 1: Этапы преобразования временного ряда.

Преимуществом предлагаемого подхода является правдоподобный вид графика изменения стоимости портфеля.

2.4 Эволюция траекторий, полученных в ходе эксперимента

На рис.2 представлены траектории полученные при тестировании одного и того же инвестора с двумя перерывами по одному часу. Были предложены графики стоимости портфеля с одинаковой доходностью и

возрастающей (от 5% до 55%), а затем убывающей (от 55% до 5%) объективной оценкой риска, причем каждый следующий график представлялся продолжением предыдущего.

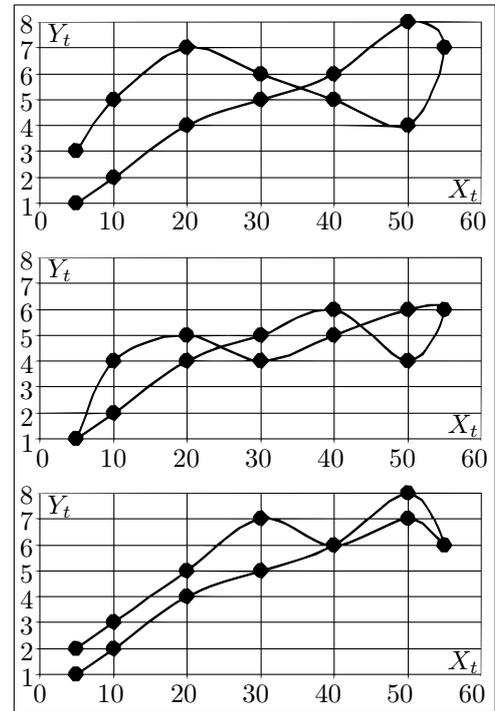


Рис. 2: Пример эволюция траекторий в ходе предварительного тестирования инвестора.

2.5 Импульсные характеристики, полученные в ходе эксперимента

Для нахождения реакции инвестора на единичный импульс (импульсной характеристики, определяемой коэффициентами v_i) была составлена система уравнений вида (1):

$$\begin{cases} Y_{10} = v_0 X_{10} + v_1 X_9 + v_2 X_8 + \dots + v_{10} X_0 \\ Y_{11} = v_0 X_{11} + v_1 X_{10} + v_2 X_9 + \dots + v_{10} X_1 \\ \dots \\ Y_K = v_0 X_K + v_1 X_{K-1} + v_2 X_{K-2} + \dots + v_{10} X_{K-10} \end{cases} \quad (9)$$

При достаточно большом числе опытов система становится переопределенной, поэтому был осуществлен поиск значений v_i , обеспечивающих наименьшее расхождение δ между левой и правой (обозначим ее Y_t^*) частью системы (9):

$$\delta = \sum_{t=10}^K (Y_t - Y_t^*)^2 \quad (10)$$

На рис.3 представлены последовательности коэффициентов v_i , полученные в описанном выше эксперименте и соответствующие траекториям на рис.2.

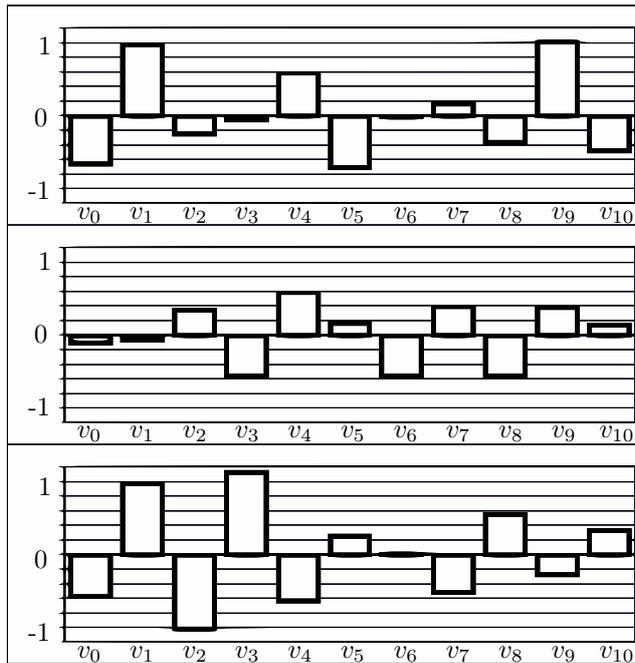


Рис. 3: Изменение реакции на единичный импульс в процессе эволюции восприятия инвестора.

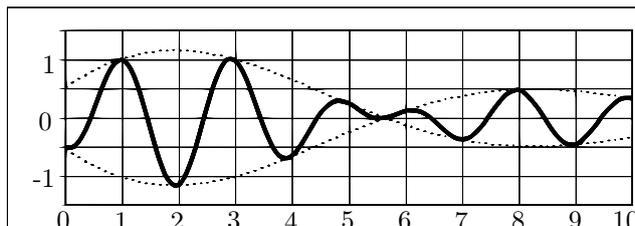


Рис. 4: Интерполяция последовательности v_i .

Полученные импульсные характеристики отражают особенности конкретного инвестора и в опытах с другими инвесторами могут существенно отличаться от представленных на рис.3. Несмотря на ограниченность применения результатов проведенного эксперимента, некоторые особенности последовательности v_i представляют существенный интерес при анализе восприятия инвесторов:

1. Коэффициент v_0 , описывающий восприятие инвестором текущей ситуации, оказался отрицательным ($v_0 < 0$), то есть последняя ситуация воспринимается инвестором по принципу “чем хуже, тем лучше”. Объяснением такому явлению служит надежда, усиливающаяся при ухудшении ситуации. При этом $v_1 > 0$, то есть, чем меньше объективный уровень риска в предыдущей ситуации, тем более спокойно инвестор воспринимает текущую.
2. Коэффициенты v_i на первых двух графиках имеют скорее хаотический характер, однако на третьем графике можно увидеть закономерность,

приближенно описываемую зависимостью (11), график которой приведен на рис.4.

$$v_i^* \approx 1.6 \sin(0.5i + 0.34) \sin(\pi i - 1.37) e^{-0.14i} \quad (11)$$

3 Особенности восприятия инвестора и коррекция модели при реальном управлении портфелем

На этапе предварительного тестирования выявляются основные реакции инвестора, а также в некоторой степени формируется его представление о риске. Анализ восприятия при реальном управлении имеет следующие основные отличия, влияющие на результат:

- Инвестор наблюдает процесс и результаты управления с существенными перерывами, то есть имеет несоизмеримо больше времени на их обдумывание и эмоциональное восприятие.
- При желании инвестор может получить доступ к куда более обширной информации, чем на предварительном тестировании.
- При управлении реальными денежными средствами эмоциональное восприятие обостряется.

Влияние данных факторов в большинстве случаев снижает субъективную оценку качества управления по сравнению с оценкой, полученной при аналогичных графиках на предварительном тестировании, то есть требования к риску при реальном управлении ужесточаются. Учет данного обстоятельства позволяет скорректировать полученную на предварительном тестировании модель.

4 Заключение

Использование предлагаемого метода исследования динамики восприятия риска инвестором создает предпосылки для создания систем управления портфелем ценных бумаг, учитывающих особенности этого восприятия и поддерживающих субъективный уровень риска на низком уровне, обеспечивая тем самым инвестору психологический комфорт.

Список литературы

- [1] Д. В. Лукас Ч. ЛеБо. *Компьютерный анализ фьючерсных рынков*. Альпина, М., 2006.
- [2] В. Г. Саркисов. Модели риска инвестиционного портфеля, ориентированные на приоритеты инвестора. *Труды X Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности*, Красноярск: СФУ:332–337, 2011.

Распределения двухпараметрических дискретно-непрерывных случайных величин

Дарья Владиславовна Семенова

Сибирский Федеральный Университет
Институт математики
Красноярск
dariasdv@gmail.com

Наталья Александровна Лукьянова

Сибирский федеральный университет
Институт фундаментальной подготовки
Красноярск
nata00sfy@gmail.com

Аннотация. В работе предложено определение двухпараметрической дискретно-непрерывной случайной величины. Исследуется разложение совместного распределения двухпараметрических дискретно-непрерывных случайных величин по случайно-множественному базису.

Ключевые слова. Дискретно-непрерывные случайные величины, случайное множество событий.

В работе [1] рассматриваются случайные величины смешанного типа, смеси дискретного и непрерывного распределения:

$$\rho = I \cdot \xi + (1 - I) \cdot \nu, \quad (1)$$

где ξ является непрерывной случайной величиной (н.с.в.), ν – дискретной случайной величиной (д.с.в.), а I – бернуллиевская случайная величина с параметром $p = \mathbf{P}(I = 1)$ ($1 - p = \mathbf{P}(I = 0)$), причем I стохастически не зависит от ξ и ν .

Найдем функцию распределения $F_\rho(u) = \mathbf{P}(\rho \leq u)$. События $\{I = 1\}$ и $\{I = 0\}$ образуют полную группу событий, следовательно по формуле полной вероятности получаем

$$F_\rho(u) = \mathbf{P}(\{\rho \leq u\}) = \mathbf{P}\left(\{\rho \leq u\} \Big|_{\{I=1\}}\right) \mathbf{P}(\{I = 1\}) + \mathbf{P}\left(\{\rho \leq u\} \Big|_{\{I=0\}}\right) \mathbf{P}(\{I = 0\}) =$$

поскольку при $I = 1$ с.в. ν не играет роли в формуле (1) и при $I = 0$ с.в. ξ не играет роли в формуле (1), а также так как I стохастически не зависит от ξ и ν , то

$$= \mathbf{P}(\xi \leq u) \mathbf{P}(I = 1) + \mathbf{P}(\nu \leq u) \mathbf{P}(I = 0) = \\ = p \mathbf{P}(\xi \leq u) + (1 - p) \mathbf{P}(\nu \leq u).$$

Эта конструкция приводит к функции распределения со скачками в точках, в которых $\mathbf{P}(\nu = u) > 0$, т.е.

$$F(u) - F(u - 0) = (1 - p) \mathbf{P}(\nu = u),$$

где $F_\rho(u - 0)$ означает предел слева¹. Но при этом такая функция не является ступенчатой, поскольку

¹Ввиду непрерывности функции распределения справа $F_\rho(u + 0) = F_\rho(u)$.

$F'(u) > 0$ в области значений случайной величины ξ

$$F'(u) = p \frac{d}{du} \mathbf{P}(\xi \leq u).$$

Таким образом функция распределения $F_\rho(u)$ оказывается смесью (выпуклой комбинацией) случайных величин ξ и ν

$$F_\rho(u) = p F_\xi(u) + (1 - p) F_\nu \quad (2)$$

и является функцией смешанного, дискретно-непрерывного типа [1].

Для вычисления моментов случайной величины (1) и производящей функции моментов $\mathbf{E}e^{t\rho}$ необходимо уметь вычислять математические ожидания функций от ρ . Для этого используется итеративная формула для условных математических ожиданий [1], [6]:

$$\mathbf{E}W = \mathbf{E}[\mathbf{E}[W|V]], \quad (3)$$

где W и V – случайные величины. Пусть [1] $W = g(\rho)$ для подходящей функции $g(\cdot)$ и V заменим на I . Полагая $h(j) = \mathbf{E}[g(\rho)|I]$, $j = 0, 1$, т.е. получили случайную величину

$$h(j) = \begin{cases} h(1), & \text{с вероятностью } p, \\ h(0), & \text{с вероятностью } 1 - p, \end{cases} = \\ = \begin{cases} \mathbf{E}[g(\rho)|I = 1], & \text{с вероятностью } p, \\ \mathbf{E}[g(\rho)|I = 0], & \text{с вероятностью } 1 - p, \end{cases} = \\ = \begin{cases} \mathbf{E}[g(\xi)], & \text{с вероятностью } p, \\ \mathbf{E}[g(\nu)], & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{E}[g(\rho)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[g(\rho)|I]] = \mathbf{E}[h(I)] = \\ = p \mathbf{E}h(1) + (1 - p) \mathbf{E}h(0) = \\ = p \mathbf{E}[g(\xi)] + (1 - p) \mathbf{E}[g(\nu)]. \quad (4)$$

Отсюда, получаем

$$\mathbf{E}[g(\rho)] = p \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) F'_\rho(u) du + \\ + (1 - p) \sum_u g(u) (F_\rho(u) - F_\rho(u - 0)), \quad (5)$$

где $F_\rho(u-0)$ означает предел слева.

Случайные величины вида (1) нашли свое применение в практике страхования ответственности [1]. В этой работе мы рассмотрим частный случай дискретно-непрерывной величины (1), который обобщает результаты, представленные в работах [3], [4], [2].

Пусть ξ — н.с.в. с функцией распределения $F_\xi(u)$ и конечным математическим ожиданием (рис. 1), а д.с.в. ν имеет вырожденное распределение, т.е.

$$\mathbf{P}(\nu \equiv c) = 1, \quad c \geq 0$$

и функцией распределения (рис. 2)

$$F_\nu(u) = \mathbf{P}(\nu < u) = \begin{cases} 0, & u < c, \\ 1, & u \geq c. \end{cases}$$

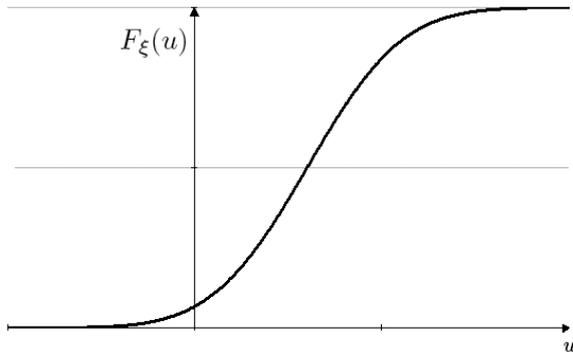


Рис. 1: Функция распределения н.с.в. ξ

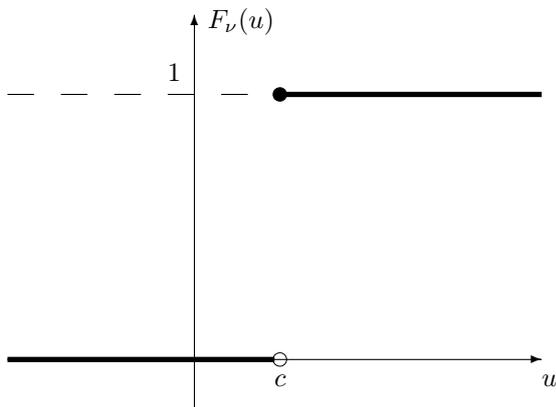


Рис. 2: Функция распределения д.с.в. ν

Тогда (1) примет вид

$$\rho = I \cdot \xi + (1 - I) \cdot c, \quad (6)$$

или, можно записать эквивалентным образом

$$\rho = \begin{cases} \xi, & \text{с вероятностью } p, \\ c, & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases} \quad (7)$$

Случайную величину вида (6) будем называть *дву-параметрической дискретно-непрерывной случайной величиной*. В качестве параметров выступают величина скачка $1 - p$ и место скачка c .

Найдем числовые характеристики случайной величины ρ .

Математическое ожидание ρ

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\rho &= \mathbf{E}[I \cdot \xi + (1 - I) \cdot c] = \mathbf{E}I \cdot \mathbf{E}\xi + (1 - \mathbf{E}I) \cdot \mathbf{E}c = \\ &= p \cdot \mathbf{E}\xi + (1 - p) \cdot c. \end{aligned}$$

Дисперсия случайной величины ρ

$$\mathbf{D}\rho = \mathbf{E}[\rho^2] - (\mathbf{E}\rho)^2.$$

В (4) полагая $g(\rho) = \rho^2$ получаем

$$\mathbf{E}[\rho^2] = p\mathbf{E}[\xi^2] + (1 - p)\nu^2 = p\mathbf{E}[\xi^2] + (1 - p)c^2.$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\rho &= p\mathbf{E}[\xi^2] + (1 - p)c^2 - (p \cdot \mathbf{E}\xi + (1 - p) \cdot c)^2 = \\ &= p\mathbf{E}[\xi^2] + (1 - p)c^2 - p^2(\mathbf{E}\xi)^2 + 2p(1 - p)c\mathbf{E}\xi - (1 - p)^2c^2 = \\ &= p\mathbf{E}[\xi^2] - p^2(\mathbf{E}\xi)^2 - 2cp(1 - p)\mathbf{E}\xi + p(1 - p)c^2 = \end{aligned}$$

$$= p\mathbf{D}\xi + p(1 - p)((\mathbf{E}\xi)^2 - 2c\mathbf{E}\xi + c^2).$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}\rho = p\mathbf{D}\xi + p(1 - p)(\mathbf{E}\xi - c)^2.$$

В (4) полагая $g(\rho) = e^{t\rho}$ получаем производящую функцию моментов

$$m(t) = \mathbf{E}[e^{t\rho}] = p\mathbf{E}[e^{t\xi}] + (1 - p)\mathbf{E}[e^{t\nu}].$$

В нашем случае

$$m_\nu(t) = \mathbf{E}[e^{t\nu}] = e^{tc}\mathbf{P}(\nu = c) + e^{t\nu}\mathbf{P}(\nu \neq c) = e^{tc}.$$

Тогда

$$m(t) = p \cdot m_\xi(t) + (1 - p)e^{tc},$$

при условии существования $m_\xi(t)$.

Как известно, k -й момент случайной величины ρ равен

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\rho^k] &= \frac{d^k}{dt^k} m(t) \Big|_{t=0} = \\ &= p \frac{d^k}{dt^k} m_\xi(t) \Big|_{t=0} + (1 - p) \frac{d^k}{dt^k} e^{tc} \Big|_{t=0} = \end{aligned}$$

$$= p \frac{d^k}{dt^k} m_\xi(t) \Big|_{t=0} + (1-p)c^k.$$

В (4) полагая $g(\rho) = e^{it\rho}$ получим характеристическую функцию

$$\varphi(t) = p\varphi_\xi(t) + (1-p)e^{itc}.$$

До этого момента мы не обсуждали расположение c . Можно выделить две ситуации.

1. Пусть c принадлежит спектру (области значений) н.с.в. ξ , т.е. $c \in \text{Ran}(\xi)$. В этом случае (рис. 3), (2) записать эквивалентным образом

$$F_\rho(u) = \begin{cases} pF_\xi(u), & u < c, \\ pF_\xi(u) + (1-p), & u \geq c. \end{cases} \quad (8)$$

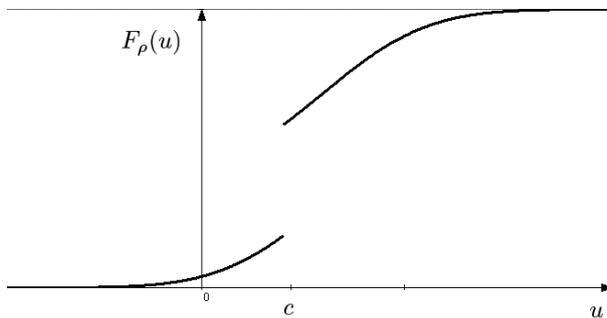


Рис. 3: Функция распределения с.в. ρ для случая $c \in \text{Ran}(\xi)$

2. Пусть c не принадлежит области значений н.с.в. ξ , т.е. $c \notin \text{Ran}(\xi) = [b, \infty)$. В этом случае (рис. 4), (2) записать эквивалентным образом

$$F_\rho(u) = \begin{cases} 0, & u < c, \\ 1-p, & c \leq u < b, \\ pF_\xi(u) + (1-p), & u \geq b. \end{cases} \quad (9)$$

Интервал $[c, b)$ будем называть “слепым интервалом”.

Рассмотрим пример интересный с точки зрения приложений.

Пример 1. Пусть случайная величина ξ имеет экспоненциальный закон распределения [5] с параметром формы $\lambda > 0$ и параметром сдвига b

$$F_\xi(u) = \begin{cases} 0, & u \leq b \\ 1 - e^{-\lambda(u-b)}, & u > b. \end{cases} \quad (10)$$

Сконструируем случайную величину ρ согласно формуле (2) и найдем ее характеристики Характеристики ρ :

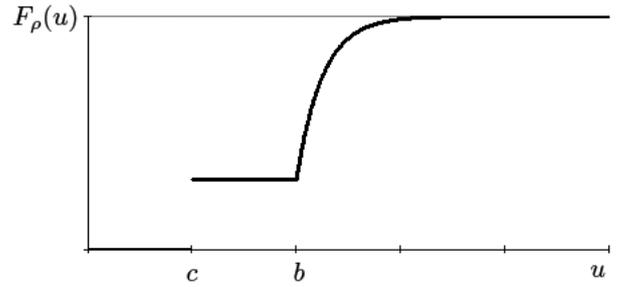


Рис. 4: Функция распределения с.в. ρ для случая $c \notin \text{Ran}(\xi)$

- математическое ожидание

$$\mathbf{E}\rho = p \left(\frac{1}{\lambda} + b \right) + (1-p)c,$$

где $\mathbf{E}\xi = \frac{1}{\lambda} + b$;

- дисперсия

$$\mathbf{D}\rho = \frac{p}{\lambda^2} + p(1-p) \left(\frac{1}{\lambda} + b - c \right)^2,$$

где $\mathbf{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}$;

- производящая функция моментов

$$m(t) = p \frac{\lambda e^{bt}}{\lambda - t} + (1-p)e^{tc}, \quad t < \lambda,$$

где $m_\xi(t) = \frac{\lambda e^{bt}}{\lambda - t}, t < \lambda$;

- характеристическая функция

$$\varphi(t) = p \frac{\lambda e^{ibt}}{\lambda - it} + (1-p)e^{itc}, \quad t < \lambda,$$

где $\varphi_\xi(t) = \frac{\lambda e^{ibt}}{\lambda - it}, i^2 = -1$.

Выделим наиболее интересные с точки зрения приложений параметрические семейства распределений.

1. \mathbb{E} — семейство распределений случайной величины ρ вида (6), для которой н.с.в. ξ имеет двухпараметрическое экспоненциальное распределение с параметром формы $\lambda > 0$ и параметром сдвига b , д.с.в. ν имеет скачок в $c \geq b$. Тогда функции распределения из семейства \mathbb{E} имеют вид

$$F_\rho(u) = \begin{cases} 0, & u < b \\ p(1 - e^{-\lambda(u-b)}), & b \leq u < c, \\ 1 - pe^{-\lambda(u-b)}, & u \geq c. \end{cases} \quad (11)$$

2. \mathbb{E}_0 — семейство распределений случайной величины ρ вида (6), для которой н.с.в. ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$ (параметр сдвига $b = 0$), д.с.в. ν имеет скачок в 0 ($c = 0$). Тогда функции распределения из семейства \mathbb{E}_0 имеют вид

$$\mathcal{E}_p(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ 1 - pe^{-\lambda u}, & u \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

3. \mathbb{G} — семейство распределений случайной величины ρ вида (6), для которой н.с.в. ξ имеет двухпараметрическое экспоненциальное распределение с параметром формы $\lambda > 0$ и параметром сдвига b , д.с.в. ν имеет скачок в $c < b$. Тогда функции распределения из семейства \mathbb{G} имеют

$$\mathcal{G}_p(u) = \begin{cases} 0, & u < c, \\ 1 - p, & c \leq u < b \\ 1 - pe^{-\lambda(u-b)}, & u \geq b. \end{cases} \quad (13)$$

4. \mathbb{G}_0 — семейство гиббсовских [3] распределений случайной величины ρ вида (6), для которой н.с.в. ξ имеет двухпараметрическое экспоненциальное распределение с параметром формы $\lambda > 0$ и параметром сдвига $b > 0$, д.с.в. ν имеет скачок в 0 ($c = 0$). Тогда функции распределения из семейства \mathbb{G}_0 имеют

$$\mathcal{G}_p(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq u < b \\ 1 - pe^{-\lambda(u-b)}, & u \geq b. \end{cases} \quad (14)$$

Ключевое свойство гиббсовской случайной величины — она не принимает значений внутри отрезка $[0, b]$. Именно на это свойство указали некоторые интерпретации статистической теории потребительского выбора [3], где стоимость случайной покупки — это дискретно-непрерывная случайная величина, которая имеет распределение, существенно отделенное от нуля (для большинства товаров и услуг), в то время как нулевое значение стоимости покупки (соответствующие отсутствию покупки) имеет положительную вероятность.

Рассмотрим случайное множество событий

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}})$$

под \mathfrak{X} , где $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — выделенное конечное множество событий (состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$), $2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств \mathfrak{X} [7]. Распределением вероятностей случайного множества K называется набор из 2^N вероятностей $p(X) = \mathbf{P}(K = X)$, $X \in 2^{\mathfrak{X}}$:

$$\rho = \{p(X), X \in 2^{\mathfrak{X}}\}$$

— эвентологическое распределение I-рода.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{X} = \{x, y\}$ с \mathfrak{A} -распределением I-го рода $\{p(\emptyset), p(x), p(y), p(xy)\}$. Занумеруем элементами множества \mathfrak{X} случайные величины типа (6) и найдем совместное распределение случайных величин $\{\rho_x, \rho_y\}$.

$$F(u_x, u_y) = \mathbf{P}(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\}). \quad (15)$$

Значения с.в. зависят от того какие значения принимает индикаторы I_x и I_y . В данном примере возможны 4 варианта:

1. $\mathcal{I}_{\emptyset} = \{I_x = 0, I_y = 0\}$, что соответствует событию $X = \emptyset$ с вероятностью $p(\emptyset)$. Тогда $\rho_x = c_x$, $\rho_y = c_y$.
2. $\mathcal{I}_{\{x\}} = \{I_x = 1, I_y = 0\}$, что соответствует $X = \{x\}$ с вероятностью $p(\{x\})$. Тогда $\rho_x = \xi_x$, $\rho_y = c_y$.
3. $\mathcal{I}_{\{y\}} = \{I_x = 0, I_y = 1\}$, что соответствует $X = \{y\}$ с вероятностью $p(\{y\})$. Тогда $\rho_x = c_x$, $\rho_y = \xi_y$.
4. $\mathcal{I}_{\{x,y\}} = \{I_x = 1, I_y = 1\}$, что соответствует $X = \{x, y\}$ с вероятностью $p(\{x, y\})$. Тогда $\rho_x = \xi_x$, $\rho_y = \xi_y$.

Следует заметить, что вероятность события $\{I_x = 1\}$ складывается из вероятностей событий \mathcal{I}_x и $\mathcal{I}_{\{x,y\}}$

$$\mathbf{P}(\{I_x = 1\}) = \mathbf{P}(\mathcal{I}_x) + \mathbf{P}(\mathcal{I}_{\{x,y\}}) = p(\{x\}) + p(\{x, y\}).$$

Очевидно, что события $\{\mathcal{I}_{\emptyset}, \mathcal{I}_{\{x\}}, \mathcal{I}_{\{y\}}, \mathcal{I}_{\{x,y\}}\}$ — образуют полную группу, тогда по формуле полной вероятности получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\}) &= \\ &= \mathbf{P}(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\} |_{\mathcal{I}_{\emptyset}}) p(\emptyset) + \\ &+ \mathbf{P}(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\} |_{\mathcal{I}_{\{x\}}}) p(\{x\}) + \\ &+ \mathbf{P}(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\} |_{\mathcal{I}_{\{y\}}}) p(\{y\}) + \\ &+ \mathbf{P}(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\} |_{\mathcal{I}_{\{x,y\}}}) p(\{x, y\}). \end{aligned}$$

Рассмотрим, каждое слагаемое отдельно:

1. поскольку при \mathcal{I}_{\emptyset} случайные величины $\rho_x = c_x$ и $\rho_y = c_y$, то

$$\mathbf{P}(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\} |_{\mathcal{I}_{\emptyset}}) =$$

$$= \mathbf{P} \left(\{c_x < u_x\} \cap \{c_y < u_y\} \right).$$

Т.к. c_x и c_y имеют вырожденное распределение, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\{c_x < u_x\} \cap \{c_y < u_y\} \right) &= F_{\emptyset}(u_x, u_y) = \\ &= \begin{cases} 1, & u_x \geq c_x, u_y \geq c_y, \\ 0, & u_x < c_x, u_y < c_y. \end{cases} \end{aligned}$$

2. поскольку при $\mathcal{I}_{\{x\}}$ случайные величины $\rho_x = \xi_x$ и $\rho_y = c_y$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\{\rho_x < u_x\} \cap \{\rho_y < u_y\} \Big|_{\mathcal{I}_{\{x\}}} \right) &= \\ &= \mathbf{P} \left(\{\xi_x < u_x\} \cap \{c_y < u_y\} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что случайные величины ξ_x и c_y независимы², то

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\{\xi_x < u_x\} \cap \{c_y < u_y\} \right) &= \\ &= \mathbf{P}(\{\xi_x < u_x\}) \cdot \mathbf{P}(\{c_y < u_y\}) = \\ &= F_{\xi_x}(u_x) \cdot F_{c_y}(u_y) = F_{\{x\}}(u_x, u_y) = \\ &= \begin{cases} F_{\xi_x}(u_x), & u_y \geq c_y, \\ 0, & u_y < c_y, \end{cases} \end{aligned}$$

где $F_{\xi_x}(u_x)$ — функция распределения непрерывной случайной величины ξ_x ;

3. аналогично получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\{c_x < u_x\} \cap \{\xi_y < u_y\} \Big|_{\mathcal{I}_{\{y\}}} \right) &= \\ = F_{\{y\}}(u_x, u_y) &= \begin{cases} F_{\xi_y}(u_y), & u_x \geq c_x, \\ 0, & u_x < c_x, \end{cases} \end{aligned}$$

где $F_{\xi_y}(u_y)$ — функция распределения непрерывной случайной величины ξ_y ;

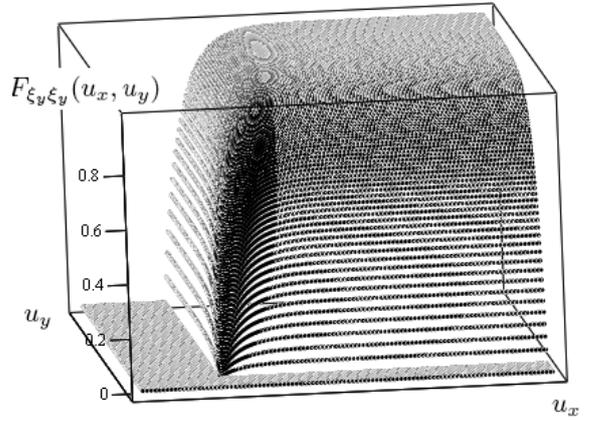
4. поскольку при $\mathcal{I}_{\{x,y\}}$ случайные величины $\rho_x = \xi_x$ и $\rho_y = \xi_y$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\{\xi_x < u_x\} \cap \{\xi_y < u_y\} \Big|_{\mathcal{I}_{\{x,y\}}} \right) &= \\ = \mathbf{P} \left(\{\xi_x < u_x\} \cap \{\xi_y < u_y\} \right) &= F_{\mathfrak{X}}(u_x, u_y) = \\ &= \begin{cases} F_{\xi_y \xi_x}(u_x, u_y), & u_x \geq c_x, u_y \geq c_y, \\ 0, & u_x < c_x, u_y \geq c_y. \end{cases} \end{aligned}$$

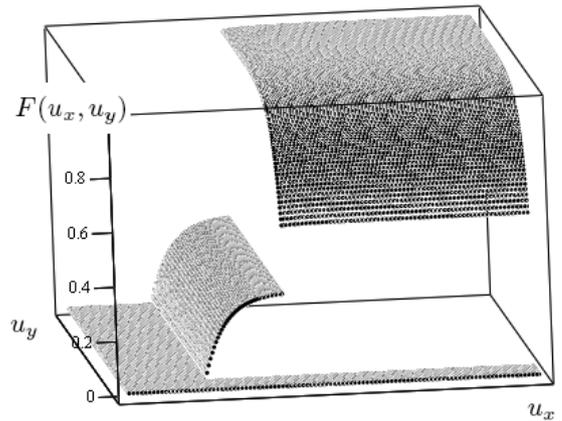
где $F_{\xi_y \xi_x}(u_x, u_y)$ — совместная функция распределения непрерывных случайных величин ξ_x и ξ_y .

Суммируя выше сказанное получаем разложение (рис. 5)

$$\begin{aligned} F(u_x, u_y) &= F_{\emptyset}(u_x, u_y)p(\emptyset) + F_{\{x\}}(u_x, u_y)p(\{x\}) + \\ &+ F_{\{y\}}(u_x, u_y)p(\{y\}) + F_{\mathfrak{X}}(u_x, u_y)p(\{x, y\}) \end{aligned}$$



a)



b)

Рис. 5: Пример графического представления совместной функции распределения двухпараметрических дискретно-непрерывных случайных величин ρ_x и ρ_y (b), сконструированного из совместного распределения непрерывных случайных величин ξ_x и ξ_y (a).

Обобщим полученный результат для произвольного числа случайных величин.

Занумеруем N случайных величин вида (6) элементами множества \mathfrak{X} в лексикографическом порядке. Будем рассматривать N -мерное совместное распределение случайных величин

$$\{\rho_x, x \in \mathfrak{X}\} = \{I_x \cdot \xi_x + (1 - I_x) \cdot c_x, x \in \mathfrak{X}\},$$

где для всех $x \in \mathfrak{X}$ ξ_x — н.с.в., $c_x \geq 0$ — константа, а бернуллиевским случайным величинам I_x сопоста-

² поскольку случайная величина c_y имеет вырожденное распределение

вим индикаторы

$$I_x = \mathbf{1}_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Рассмотрим совместное распределение двумерных дискретно-непрерывных случайных величин вида (7) $\{\rho_x, x \in \mathfrak{X}\}$

$$F(u_x, x \in \mathfrak{X}) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \{\rho_x < u_x\} \right).$$

Значения, принимаемые случайными величинами $\{\rho_x, x \in \mathfrak{X}\}$ зависят от значений, которые принимают бернуллиевские случайные величины $I_x, x \in \mathfrak{X}$.

Рассмотрим события

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_X &= \left\{ \left(\bigcap_{x \in X} \{I_x = 1\} \right) \cap \left(\bigcap_{x \in X^c} \{I_x = 0\} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \bigcap_{x \in X} \{I_x = 1\} \cap \bigcap_{x \in X^c} \{I_x = 0\} \right\}, \end{aligned}$$

для всех $X \subseteq \mathfrak{X}$, где $X^c = \mathfrak{X} \setminus X$ — дополнение подмножества событий X до \mathfrak{X} , а $x^c = \Omega \setminus x$ — дополнение события x .

Утверждение. Совокупность событий $\{\mathcal{I}_X, X \in \mathfrak{X}\}$ образуют полную группу событий.

Доказательство. Докажем, что для любых $X, Y \subseteq \mathfrak{X}$, $X \neq Y$ события \mathcal{I}_X и \mathcal{I}_Y несовместны. Рассмотрим $|\mathfrak{X}|$ -мерный вектор бернуллиевских случайных величин $\{I_x, x \in \mathfrak{X}\}$. Событие \mathcal{I}_X означает, что все бернуллиевские с.в., занумерованные элементами x из множества X , приняли значение равное 1, т.е. $I_x = 1$ для всех $x \in X$, а все остальные бернуллиевские с.в. из множества X^c — приняли нулевое значение. Таким образом, событие \mathcal{I}_X образует разбиение бернуллиевского случайного вектора на две части:

$$\{I_x, x \in \mathfrak{X}\} = \{1, x \in X\} + \{0, x \in X^c\}.$$

Аналогично, для события \mathcal{I}_Y

$$\{I_x, x \in \mathfrak{X}\} = \{1, x \in Y\} + \{0, x \in Y^c\}.$$

Допустим, что события \mathcal{I}_X и \mathcal{I}_Y совместны, т.е. $\mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}_Y \neq \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} \{I_x, x \in \mathfrak{X}\} &= \{1, x \in X \setminus Y\} + \{1, x \in X \cap Y\} + \\ &+ \{0, x \in X^c\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $X \setminus Y \subseteq Y^c$. Следовательно, существует такой номер $x \in X$ и $x \in Y^c$. Если $x \in X$, то $I_x = 1$. С другой стороны, если $x \in Y^c$, то $I_x = 0$. Получили противоречие.

В силу произвольности выбранных множеств X и Y из \mathfrak{X} мы можем говорить о попарной несовместности событий \mathcal{I}_X и \mathcal{I}_Y .

Заметим, что количество разбиений всех компонент вектора $\{I_x, x \in \mathfrak{X}\}$ совпадает с булеаном множества \mathfrak{X} , тогда

$$\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathcal{I}_X = \Omega.$$

Следовательно, $\{\mathcal{I}_X, X \in 2^{\mathfrak{X}}\}$ — образуют полную группу событий.

Тогда

$$\mathbf{P}(\mathcal{I}_X) = \mathbf{P}(K = X) = p(X), \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

◇

Следовательно, по формуле полной вероятности справедливо представление

$$\begin{aligned} F(u_x, x \in \mathfrak{X}) &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \{\rho_x < u_x\} \right) = \\ &= \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \{\rho_x < u_x\} \middle| \mathcal{I}_X \right) \mathbf{P}(\mathcal{I}_X). \end{aligned}$$

Аналогично двумерному случаю (пример 2) получаем условные функции распределений

$$\begin{aligned} F_X(u_x, x \in \mathfrak{X}) &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \{\rho_x < u_x\} \middle| \mathcal{I}_X \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in X} \{\xi_x < u_x\} \right) \cdot \mathbf{P} \left(\bigcap_{x \in X^c} \{c_x < u_x\} \right) = \\ &= F_{\xi_X}(u_x, x \in X) \cdot \prod_{x \in X^c} F_{c_x}(u_x), \end{aligned}$$

где

- $X^C = \mathfrak{X} \setminus X$,
- $F_{\xi_X}(u_x, x \in X)$ — совместная функция распределения непрерывных случайных величин $\{\xi_x, x \in X\}$,
- а $F_{c_x}(u_x)$ — функции распределения вырожденных случайных величин $c_x, x \in \mathfrak{X}$.

Заметим, что $\prod_{x \in X^c} F_{c_x}(u_x) = 1$, когда $u_x \geq c_x$ для всех $x \in X^c$, в противном случае получаем ноль. Тогда получаем разложение

$$F(u_x, x \in \mathfrak{X}) = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} F_X(u_x, x \in \mathfrak{X}) \cdot p(X). \quad (16)$$

Данное представление позволяет описывать двух-уровневую структуру зависимостей и взаимодействий компонент случайного вектора $\vec{\rho}$, состоящей из

- *случайно-множественного базиса*

$$\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$$

- и количественной надстройки

$$\{F_X(u_x, x \in \mathfrak{X}), X \subseteq \mathfrak{X}\}$$

— совокупности условных функций распределения, получаемые из совместного распределения непрерывного случайного вектора $\{\xi_x, x \in \mathfrak{X}\}$.

Компоненты случайного вектора $\{\rho_x, x \in X\}$ являются случайными величинами смешанного типа. Можно говорить о том, что случайный вектор $\{\rho_x, x \in X\}$ конструируется из случайного вектора $\{\xi_x, x \in X\}$, составленного из N непрерывных случайных величин $\xi_x, x \in \mathfrak{X}$, добавлением скачков в точках $\{c_x, x \in X\}$.

В математической статистике почти всегда имеют дело либо с дискретными, либо с непрерывными случайными величинами, но в реальных задачах это не так. Многие функции распределения, используемые в тех или иных моделях (в частности, для моделирования страховых выплат или модели статистического выбора) имеют как “непрерывно возрастающие” участки, так и некоторые положительные скачки. Предложенный в работе аппарат позволяет работать с совместными распределениями случайных величин смешанного типа (6) и обобщает результаты, полученные ранее [3, 4, 2].

Благодарности

Выражаем нашу искреннюю благодарность Аркадию Арсеньевичу Новоселову за его конструктивную критику и помощь.

Список литературы

- [1] Каас Р., Гувертс М., Дэнэ Ж., Денут М. *Современная актуарная теория риска: Перев. с англ.* Янус-К, Москва, 2007.
- [2] Воробьев О.Ю., Голденко Е.Е., Семенова Д.В. Случайно-множественные разложения двудольных случайных векторов. *Вестник Красноярского государственного университета: физико-математические науки*, вып.1:88–96, 2003.
- [3] Воробьев О.Ю., Голденко Е.Е. *Структурный сет-анализ зависимостей случайных событий*. КрасГУ, Красноярск, 2004.
- [4] Воробьев О.Ю., Семенова Д.В. *Портфельный сет-анализ случайных событий*. КрасГУ, Красноярск, 2005.
- [5] Соколов Г.А., Чистякова Н.А. *Справочное пособие по теории вероятностей и математической статистике (законы распределения)*. Высш.шк., М., 2007.
- [6] Розанов Ю.А. *Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика*. Наука, Москва, 1985.
- [7] О.Ю.Воробьев. *Эвентология*. Сиб. фед. ун-т, Красноярск, 2007.

Вероятности больших уклонений и энтропия

Александр Трофимович Семёнов

Новосибирский государственный университет экономики и управления
Кафедра высшей математики
Новосибирск
vm@nsuem.ru

Аннотация. *Предельные теоремы теории вероятностей (слабый и усиленный законы больших чисел, центральная предельная теорема и т.д.) являются, по существу, утверждениями относительно сходимости среднего большого числа случайных величин к их общему математическому ожиданию. Однако эти результаты либо мало что говорят, либо ничего не говорят о скорости этой сходимости. Теория больших уклонений указывает путь к ответу на этот вопрос. Среднее*

$S_n/n = \sum_{i=1}^n \xi_i/n$ случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n с общим

математическим ожиданием $E\xi_1$ “подчиняется принципу больших уклонений”, если существует такая неотрицательная функция Λ , называемая функцией уклонений, что $P\{|S_n/n - E\xi_1| \geq \varepsilon\} \approx \exp\{-n\Lambda(\varepsilon)\}$.

Принцип больших уклонений находит плодотворное применение не только в теории вероятностей, но и в различных разделах науки и техники ([1] – [5]). Важными являются также связи этого принципа с теорией информации, поскольку во многих ситуациях функция уклонений есть относительная энтропия или расстояние Кульбака-Лейбнера.

Ключевые слова. *Вероятности больших уклонений, функция уклонений, преобразования Лежандра и Крамера (Эшера), относительная энтропия, расстояние Кульбака-Лейбнера, энтропия.*

1. Введение

Пусть $\{\xi_i, i = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с общей функцией распределения $F(x)$ и конечным математическим ожиданием $a = E\xi_i$,

$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Закон больших чисел (теорема А.Я.

Хинчина) утверждает, что для любого $x \geq a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n/n \geq x\} = 0. \quad (1.1)$$

Фигурирующие в (1.1) вероятности называются *вероятностями больших уклонений*.

Общие принципы оценки вероятностей больших уклонений являются, вслед за законом больших чисел и центральной предельной теоремой, одним из наиболее мощных и универсальных средств вероятностного

исследования различных задач. Появившись сравнительно недавно, в конце 60-х годов XX века, они нашли и продолжают находить многочисленные применения в математической статистике, теории случайных процессов, статистической физике, теории страхования, теории систем обслуживания и др. ([1] – [5]). Например, в математической статистике к задачам нахождения вероятностей больших уклонений приводит отыскание малых вероятностей ошибок первого и второго рода статистических критериев для проверки гипотез, когда объем выборки n велик (см., например, [2]).

Если мы хотим понять, как быстро вероятность в (1.1) стремится к нулю с увеличением количества слагаемых, нужно сделать дополнительные моментные предположения об их общем распределении $F(x)$. При этих предположениях можно доказать, что вероятности больших уклонений убывают экспоненциально:

$$P\{S_n/n \geq x\} \approx \exp\{-n\Lambda(x)\}, \quad (1.2)$$

где функция $\Lambda(x)$ явно выражается через преобразование Лапласа с.в. ξ_i .

Таким образом, поведение вероятностей больших уклонений $P\{S_n/n \geq x\}$ зависит от всего распределения $F(x)$. В этом их существенное отличие от вероятностей $P\{(S_n - na)/\sqrt{n} \geq x\}$, называемых *вероятностями нормальных уклонений* и фигурирующих в центральной предельной теореме, асимптотическое поведение которых определяется лишь одним числовым параметром (дисперсией) распределения слагаемого.

2. Оценка вероятностей больших уклонений

Введем преобразование Лапласа над распределением $F(x)$

$$\varphi(\lambda) = E \exp\{\lambda \xi_i\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF(x)$$

и кумулянту $m(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$. Тогда для любого $x \geq a$ и $\lambda \geq 0$ по экспоненциальному неравенству Чебышева имеем

$$P\{S_n/n \geq x\} = P\{S_n \geq nx\} \leq \frac{E \exp\{\lambda S_n\}}{\exp\{\lambda nx\}} =$$

$$= \frac{(E \exp \{\lambda \xi_i\})^n}{\exp \{\lambda n x\}} = \exp \{-n(\lambda x - m(\lambda))\}. \quad (2.1)$$

Оптимизируя по λ неравенство (2.1), получим

$$P\{S_n / n \geq x\} \leq \exp \left\{ -n \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda x - m(\lambda)) \right\}. \quad (2.2)$$

Заметим, что супремум в (2.2) неотрицателен, так как при $\lambda = 0$ верно равенство $\lambda x - m(\lambda) = 0$. Более того, из неравенства Йенсена

$$E \exp \{\lambda \xi_i\} \geq \exp \{\lambda E \xi_i\} = \exp \{\lambda a\}$$

следует, что $\lambda a - m(\lambda) \leq 0$ при всех значениях λ . В частности, для любого $x \geq a$ и $\lambda \leq 0$ имеем

$$\lambda x - m(\lambda) \leq \lambda a - m(\lambda) \leq 0.$$

Поэтому мы можем записать, что

$$P\{S_n / n \geq x\} \leq \exp \{-n \Lambda(x)\}, \quad (2.3)$$

где функция $\Lambda: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ определена равенством

$$\Lambda(x) = \sup_{\lambda} (\lambda x - m(\lambda)) \quad (2.4)$$

и называется *функцией уклонений над с.в. ξ_i* . В классическом анализе правая часть (2.4) известна как *преобразование Лежандра над функцией $m(\lambda)$* .

Применение экспоненциального неравенства Чебышева с отрицательными λ дает левосторонний аналог неравенства (2.3): для $x \leq a$

$$P\{S_n / n \leq x\} \leq \exp \{-n \Lambda(x)\}. \quad (2.5)$$

3. Свойства функции уклонений

Как показывают неравенства (2.3) и (2.5), при описании асимптотики вероятностей больших уклонений определяющее значение имеет функция уклонений. Приведем некоторые свойства этой функции, извлеченные в основном из [1]. Существенную роль при этом будет играть следующее *условие Крамера*:

условие [C]. Существует такое $\lambda \neq 0$, что

$$\varphi(\lambda) = E e^{\lambda \xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF(x) < \infty. \quad (3.1)$$

Будем говорить, что выполнено *правостороннее (левостороннее) условие Крамера*, если в (3.1) $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$). Если (3.1) выполнено при некоторых положительных и отрицательных λ (т.е. в окрестностях точки $\lambda = 0$), то мы будем говорить, что выполнено *двустороннее условие Крамера*.

Смысл условий Крамера состоит в характеристизации достаточно быстрой (по крайней мере, экспоненциальной) скорости убывания “хвостов” $F_+(x) = P\{\xi \geq x\}$ и $F_-(x) = P\{\xi < -x\}$ распределения $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (см., например, глава 9, §1 [1]).

Обозначим

$$\lambda_- = \inf \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}, \quad \lambda_+ = \sup \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}.$$

Условие [C] эквивалентно тому, что $\lambda_- < \lambda_+$. Правостороннее условие Крамера означает, что $\lambda_+ > 0$; двустороннее – $\lambda_- < 0 < \lambda_+$.

Преобразование Лапласа $\varphi(\lambda)$ аналитично в плоскости комплексного переменного в полосе $\lambda_- < \text{Re } \lambda < \lambda_+$. Это следует из возможности дифференцирования функции $\varphi(\lambda)$ в названной области переменного, поскольку интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x e^{\lambda x}| dF(x)$ при указанных значениях $\text{Re } \lambda$ равномерно по $\text{Im } \lambda$ сходится.

Пусть выполнено условие [C]. *Преобразованием Крамера в точке λ над распределением $F(x)$* называется распределение

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_{-\infty}^x e^{\lambda y} dF(y). \quad (3.2)$$

Иногда преобразование (3.2) называют также *преобразованием Эшера*. Однако систематическое использование преобразования (3.2) для изучения вероятностей больших уклонений впервые было предпринято Крамером.

Распределения $F(x)$ и $F_\lambda(x)$, очевидно, взаимно абсолютно непрерывны с плотностью

$$\frac{dF_\lambda(x)}{dF(x)} = \frac{e^{\lambda x}}{\varphi(\lambda)}.$$

С.в. с распределением $F_\lambda(x)$ обозначим ξ_λ . Ясно, что

$$E\xi_\lambda = \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = (\ln \varphi(\lambda))' = m'(\lambda),$$

$$E\xi_\lambda^2 = \frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

$$D\xi_\lambda = \frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi(\lambda)} - \left(\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \right)^2 = (\ln \varphi(\lambda))'' = m''(\lambda).$$

Так как $\varphi''(\lambda) > 0$, $D\xi_\lambda > 0$, то из сказанного выше вытекает важное свойство преобразования Лапласа:

на промежутке (λ_-, λ_+) функции $\varphi(\lambda)$ и $m(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ строго выпуклы, а функция $m'(\lambda) = \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ строго возрастает. (3.3)

Свойство аналитичности функции $\varphi(\lambda)$ в полосе $\text{Re} \lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$ можно дополнить следующим “расширенным” свойством непрерывности на отрезке $[\lambda_-, \lambda_+]$ (в полосе $\text{Re} \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$).

Функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна “изнутри” отрезка $[\lambda_-, \lambda_+]$, т.е. $\varphi(\lambda_\pm \mp 0) = \varphi(\lambda_\pm)$ (случаи $\varphi(\lambda_\pm) = \infty$ не исключаются).

Вне отрезка $[\lambda_-, \lambda_+]$ такая непрерывность, вообще говоря, отсутствует. Эта ситуация имеет место, например, когда $\varphi(\lambda_+) < \infty$, $\varphi(\lambda_+ + 0) = \infty$, которая реализуется, например, для распределения $F(x)$ с плотностью

$$f(x) = C x^{-3} e^{-\lambda_+ x} \text{ при } x \geq 1, \quad C = \text{const}.$$

Введем преобразование Лапласа над распределением с.в. $(\xi - \alpha)$:

$$\varphi_\alpha(\lambda) = e^{-\lambda \alpha} \varphi(\lambda) = E \{ \exp(\lambda(\xi - \alpha)) \},$$

а также функцию

$$\Lambda(\alpha, \lambda) = -\ln \varphi_\alpha(\lambda) = \alpha \lambda - m(\lambda).$$

Ясно, что на отрезке $[\lambda_-, \lambda_+]$ определена производная (соответственно, правая и левая на концах λ_\pm)

$$\Lambda'(\alpha, \lambda) = \alpha - \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}. \quad (3.4)$$

Обозначим

$$\alpha_\pm = \frac{\varphi'(\lambda_\pm \mp 0)}{\varphi(\lambda_\pm \mp 0)}, \quad \alpha_- < \alpha_+.$$

Значения α_\pm определяет угол, под которым кривая $\ln \varphi_\alpha(\lambda)$ “входит” в точки $(\lambda_\pm, \ln \varphi(\lambda_\pm))$.

Так как $m(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ – строго выпуклая функция (см. (3.3)), то при $\alpha \in [\alpha_-, \alpha_+]$ уравнение $\Lambda'(\alpha, \lambda) = 0$ или (см. (3.2)) $m'(\lambda) = \alpha$ всегда имеет единственное решение $\lambda(\alpha)$ на отрезке $[\lambda_-, \lambda_+]$ (λ_\pm могут быть бесконечными). Это решение $\lambda(\alpha)$ как функция, обратная к аналитической и строго возрастающей на (λ_-, λ_+) функции $m'(\lambda) = \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ (см. (3.3)), также будет аналитической и строго возрастающей на (α_-, α_+) . Кроме того,

$$\lambda(\alpha) \uparrow \lambda_+ \text{ при } \alpha \uparrow \alpha_+; \quad \lambda(\alpha) \downarrow \lambda_- \text{ при } \alpha \downarrow \alpha_-.$$

Таким образом,

$$\Lambda(\alpha) = \sup_\lambda \{ \lambda \alpha - m(\lambda) \} = \alpha \lambda(\alpha) - m(\lambda(\alpha)), \quad (3.5)$$

где точка $\lambda(\alpha)$, в которой достигается этот супремум, удовлетворяет тождеству

$$m'(\lambda(\alpha)) = \alpha. \quad (3.6)$$

Дифференцируя равенство (3.5) и учитывая (3.6), находим

$$\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha) + \alpha \lambda'(\alpha) - \frac{\varphi'(\lambda(\alpha))}{\varphi(\lambda(\alpha))} \lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha). \quad (3.7)$$

Заметив, что $\lambda(\alpha) = 0$ и $\Lambda(\alpha) = 0$, из равенства (3.7) получаем следующее представление для функции Λ :

$$\Lambda(\alpha) = \int_\alpha^\alpha \lambda(u) du. \quad (3.8)$$

Справедлива также формула обращения: при $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$

$$\ln \varphi(\lambda) = \sup_\alpha (\alpha \lambda - \Lambda(\lambda)). \quad (3.9)$$

Она означает, что функция уклонений однозначно определяет преобразование Лапласа $\varphi(\lambda)$, а значит и распределение $F(x)$. Формула (3.8) означает также, что повторное применение преобразования Лежандра к выпуклой функции $m(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ приводит к той же исходной функции.

Имеет место следующее утверждение, поясняющее вероятностный смысл функции уклонений (см. глава 9, §2 [1]).

Пусть $\Delta_n[\alpha] = [\alpha, \alpha + \Delta_n]$ – полуинтервал длины Δ_n , зависящей от n , с левым концом в точке α . При каждом α для всех последовательностей Δ_n , сходящихся к 0 при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно, выполняется

$$\Lambda(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P \left\{ \frac{S_n}{n} \in \Delta_n[\alpha] \right\}.$$

Это соотношение можно записать также в виде

$$P \left\{ \frac{S_n}{n} \in \Delta_n[\alpha] \right\} = e^{-n \Lambda(\alpha) + o(n)}.$$

4. Примеры

Для некоторых распределений $F(x)$ значения λ_{\pm} , α_{\pm} и функции $\varphi(\lambda)$, $\lambda(\alpha)$ и $\Lambda(\alpha)$ могут быть вычислены в явном виде.

Пример 4.1. Если с.в. ξ имеет стандартное нормальное распределение, то

$$\varphi(\lambda) = e^{\lambda^2/2}, \quad |\lambda_{\mp}| = |\alpha_{\mp}| = \infty,$$

$$\lambda(\alpha) = \alpha, \quad \Lambda(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Пример 4.2. Для с.в. ξ , имеющей распределение Бернулли, получаем

$$\varphi(\lambda) = pe^{\lambda} + q, \quad |\lambda_{\mp}| = \infty,$$

$$\alpha_- = 0, \quad \alpha_+ = 1, \quad a = E\xi = p,$$

$$\lambda(\alpha) = \ln \left(\frac{\alpha(1-p)}{p(1-\alpha)} \right),$$

$$\Lambda(\alpha) = \alpha \ln \left(\frac{\alpha}{p} \right) + (1-\alpha) \ln \left(\frac{1-\alpha}{1-p} \right) \quad \text{при } \alpha \in (0, 1),$$

$$\Lambda(0) = -\ln(1-p), \quad \Lambda(1) = -\ln p,$$

$$\Lambda(\alpha) = \infty \quad \text{при } \alpha \notin [0, 1].$$

Пример 4.3. Для показательного распределения с параметром $\mu > 0$ имеем

$$\varphi(\lambda) = \frac{\mu}{\mu - \lambda}, \quad \lambda_- = -\infty, \quad \lambda_+ = \mu,$$

$$\alpha_- = 0, \quad \alpha_+ = \infty, \quad a = E\xi = \frac{1}{\mu},$$

$$\lambda(\alpha) = \mu - \frac{1}{\alpha}, \quad \Lambda(\alpha) = \ln(\alpha\lambda) + \alpha\mu - 1$$

при $\alpha > 0$.

Пример 4.4. Для распределения Пуассона с параметром $\mu > 0$ получаем

$$\varphi(\lambda) = \exp \left\{ \mu(e^{\lambda} - 1) \right\}, \quad |\lambda_{\mp}| = \infty, \quad \alpha_- = 0,$$

$$\alpha_+ = \infty, \quad a = E\xi = \mu,$$

$$\lambda(\alpha) = \ln \frac{\alpha}{\mu}, \quad \Lambda(\alpha) = \alpha \left(\ln \frac{\alpha}{\mu} - 1 \right) + \mu$$

при $\alpha > 0$.

5. Энтропия

Пусть G и P – две вероятностные меры на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) . Через $E_G(\xi)$ будем обозначать математическое ожидание с.в. ξ по мере G . Относительная энтропия меры G относительно меры P (расстояние Кульбака-Лейблера между мерами G и P) определяется как величина

$$H(G|P) = \begin{cases} E_G \left\{ \ln \frac{dG}{dP} \right\}, & \text{если мера } G \text{ абсолютно} \\ & \text{непрерывна относительно} \\ & \text{но меры } P, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Неравенство Иенсена, примененное к строго выпуклой функции $h(x) = x \ln x$, ведет к неравенству

$$H(G|P) = E_G \left\{ h \left(\frac{dG}{dP} \right) \right\} \geq$$

$$\geq h \left\{ E_G \left(\frac{dG}{dP} \right) \right\} = h(1) = 0, \quad (5.1)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $G = P$.

Об отношениях между энтропией, информацией и неопределенностью см., например, [5] (и литературу там же).

Пример 5.1. Пусть Ω – конечное множество, состоящее из $|\Omega|$ элементов, \mathcal{A} – алгебра подмножеств Ω . Каждая вероятностная мера G на (Ω, \mathcal{A}) абсолютно непрерывна относительно равномерного распределения P . Очевидно,

$$\begin{aligned} H(G|P) &= \sum_{\omega \in \Omega} G(\omega) \ln \frac{G(\omega)}{P(\omega)} = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} G(\omega) \ln G(\omega) + \ln |\Omega|. \end{aligned}$$

Величину

$$H(G) = - \sum_{\omega \in \Omega} G(\omega) \ln G(\omega)$$

обычно называют *энтропией* меры G . Заметим, что для равномерного распределения P энтропия $H(P) = \ln |\Omega|$, так что

$$H(G|P) = H(P) - H(G).$$

Так как левая часть последнего равенства неотрицательна согласно (5.1), равномерное распределение P имеет максимальную энтропию среди всех вероятностных распределений на (Ω, \mathcal{A}) .

Пример 5.2. Пусть G – нормальное распределение со средним a и дисперсией σ^2 на вещественной прямой. Тогда для нормального распределения P со средним \tilde{a} и дисперсией $\tilde{\sigma}^2$ справедливо равенство

$$\frac{dG}{dP}(x) = \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-\tilde{a})^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right\},$$

а значит

$$H(G|P) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} - 1 + \frac{\sigma^2}{\tilde{\sigma}^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{a} - a}{\tilde{\sigma}} \right)^2.$$

6. Связь вероятностей больших уклонений и энтропии

Пусть множество $\Gamma = \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$ и $\{P_\lambda: \lambda \in \Gamma\}$ – семейство вероятностных мер на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{A}) , определенное в п.3 при помощи преобразования (3.2). Обозначим $a(\lambda) = E_{P_\lambda}(\xi)$ и $a_0 = a(\lambda_0)$ для некоторого фиксированного значения $\lambda_0 \in \Gamma$. Следующий результат показывает, что P_{λ_0} – единственная точка минимума относительной энтропии $H(G|P)$ среди всех вероятностных мер G , таких что $E_G(\xi) = a(\lambda)$.

Теорема 6.1. Для любой вероятностной меры G на (Ω, \mathcal{A}) такой, что $E_G(\xi) = a_0$, выполняется неравенство

$$H(G|P) \geq H(P_{\lambda_0}|P) = \lambda_0 a_0 - m(\lambda_0).$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $G = P_{\lambda_0}$. Кроме того, λ_0 максимизирует функцию $\lambda a_0 - m(\lambda)$ среди всех $\lambda \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть G – такая вероятностная мера на (Ω, \mathcal{A}) , что $E_G(\xi) = a_0$. Покажем вначале, что для всех $\lambda \in \Gamma$ выполняется равенство

$$H(G|P) = H(G|P_\lambda) + \lambda a_0 - m(\lambda). \quad (6.1)$$

Для этого заметим, что обе части (6.1) бесконечны, если мера G не абсолютно непрерывна относительно меры P . В ином случае

$$\frac{dG}{dP} = \frac{dG}{dP_\lambda} \cdot \frac{dP_\lambda}{dP} = \frac{dG}{dP_\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda \xi}}{m(\lambda)}. \quad (6.2)$$

Логарифмируя и интегрируя по мере G обе части равенства (6.2), получим соотношение (6.1).

Поскольку $H(G|P_\lambda) \geq 0$ согласно (5.1), из равенства (6.1) следует, что

$$H(G|P) \geq \lambda a_0 - m(\lambda) \quad (6.3)$$

для всех $\lambda \in \Gamma$ и всех таких мер G , что $E_G(\xi) = a_0$. Равенство в (6.3) имеет место тогда и только тогда, когда $H(G|P_\lambda) = 0$, что эквивалентно равенству $G = P_\lambda$. В этом случае λ должно быть таким, чтобы выполнялось условие $a(\lambda) = a_0$. В частности, для любого такого λ мы имеем

$$H(P_\lambda|P) = \lambda a_0 - m(\lambda).$$

Поэтому λ_0 максимизирует правую часть неравенства (6.3), а P_{λ_0} минимизирует относительную энтропию $H(G|P)$ на множестве

$$M_0 = \{G: E_G(\xi) = a_0\}.$$

Но относительная энтропия $H(G|P)$ – строго выпуклый функционал от G . Следовательно, она может иметь не более одной точки минимума на выпуклом множестве M_0 . Поэтому любое такое λ , что $a(\lambda) = a_0$, порождает одну и ту же меру P_{λ_0} .

Теорема 6.1 и п.3 приводят к следующему результату.

Теорема 6.2. Пусть $\varphi(\lambda) = E \exp\{\lambda \xi\}$ – преобразование Лапласа над распределением с.в. ξ и $m(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$ – кумулянта этой с.в. Предположим, что выполнено двустороннее условие Крамера:

$$\lambda_- = \inf \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\} < 0, \\ \lambda_+ = \sup \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\} > 0.$$

Пусть

$$\alpha_{\pm} = \frac{\varphi'(\lambda_{\pm} \mp 0)}{\varphi(\lambda_{\pm} \mp 0)}, \quad \alpha_- < \alpha_+.$$

Тогда для всех $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ выполнено равенство

$$\min_{G: E_G(\xi) = \alpha} H(G|P) = \alpha \cdot \lambda(\alpha) - m(\lambda(\alpha)),$$

где $\lambda(\alpha)$ – решение уравнения $m'(\lambda(\alpha)) = \alpha$ – является аналитической и строго возрастающей функцией на (α_-, α_+) , непрерывной “изнутри” отрезка $[\alpha_-, \alpha_+]$, т.е. $\lambda(\alpha_{\pm} \mp 0) = \lambda_{\pm}$ (случаи $|\lambda_{\pm}| = \infty$ не исключаются).

Литература

- [1] А.А. Боровков Теория вероятностей. Изд. 5-е, суц. перераб. и доп. М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2009.
- [2] А.А. Боровков. Математическая статистика. Новосибирск: Наука; Изд-во Института математики, 1997.
- [3] А.Д. Вентцель, М.И. Фрейдлин. Флуктуации в динамических системах под действием случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
- [4] С. Кульбак. Теория информации и статистика. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1967.
- [5] М.А. Никитин. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. М.: Наука, 1995.
- [6] А.Т. Семёнов Неопределенность, энтропия и информация // Труды IX международной ФАМЭТ'2010 конференции / Под ред. О.Ю. Воробьева. Красноярск: КГТЭИ, СФУ. 2010. С. 264 – 269.

Об устойчивости статистических процедур, связанных с нормальным распределением

Александр Трофимович Семёнов

Новосибирский государственный университет экономики и управления
Кафедра высшей математики
Новосибирск
vm@nsuem.ru

Аннотация. Устойчивость статистических процедур (оценивания или проверки гипотез), есть малая чувствительность этих процедур к малым отклонениям от исходных предположений. В работе рассматривается проблема устойчивости, связанная с отклонением от нормальности элементов выборки.

Ключевые слова. Устойчивость статистических процедур, коэффициенты асимметрии и эксцесса, статистики Стюдента и “хи-квадрат”, асимптотическая нормальность.

1. Статистические выводы, как правило, основываются не только на результатах наблюдений (выборочных данных). Немаловажную основу этих выводов составляют исходные предположения. Например, в задачах оценивания или проверки гипотез при построении различных статистических процедур исходят каждый раз из некоторой совокупности условий. Эти условия касаются, в частности, предположений о распределении элементов выборки, о параметрах распределения и т.п.

От такого рода предположений не требуется абсолютной точности. Они представляют собой математически целесообразные приближения, отвечающие зачастую не вполне точным знаниям или представлениям. Иначе говоря, на практике подобные предположения есть, как правило, результат некоторых приближений и неизбежного упрощения. Стало быть, в точном виде эти предположения обычно не выполняются, и возникают опасения, связанные с правомочностью рекомендаций, сделанных с помощью той или иной выбранной статистической процедуры.

Таким образом, в математической статистике, как и в любой другой области математики, касающейся приложений, необходимо перед применениями разработанных методов выяснить, как велики должны быть отклонения от принятых условий, чтобы это заставило нас изменить сформулированные выводы.

С математической точки зрения это задача близка к проблеме устойчивости. Устойчивость статистических процедур в широком понимании есть малая чувствительность этих процедур к малым отклонениям от исходных предположений.

Многие применяемые на практике статистические процедуры предполагают, что элементы выборки имеют нормальное распределение. Исследование влияния

ненормальности удобно проводить с помощью коэффициентов асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 распределения случайной величины (с.в.) X , определяемых соответственно как

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

Здесь

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

центральный момент k -го порядка ($k \geq 1$) с.в. X .

Центральные моменты нечетного порядка ($k = 3, 5, \dots$) характеризуют асимметрию распределения с.в. X : для симметричных относительно среднего значения $a = E(X)$ распределений, очевидно, все центральные моменты нечетного порядка равны нулю. Следовательно, для таких распределений коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 0$.

Предположим, что распределение с.в. X имеет плотность с одной вершиной и асимметрично относительно среднего значения $a = E(X)$. Тогда одна из ветвей графика плотности распределения, начиная с вершины, имеет более пологий “спуск”, чем другая. В случае положительного значения γ_1 более пологий “спуск” наблюдается справа, в противном случае – слева. Иначе говоря, положительное значение γ_1 указывает на то, что распределение “скошено вправо”, т.е. правый “хвост” распределения более “весом”, чем левый; для отрицательного значения γ_1 более “весомым” является левый “хвост” распределения.

Для любого распределения с.в. X коэффициент эксцесса $\gamma_2 \geq -2$, а для нормального – $\gamma_2 = 0$. Поэтому величина γ_2 используется для сравнения распределения с нормальным.

Пусть распределение с.в. X симметрично, имеет плотность с одной вершиной. Если $\gamma_2 > 0$, то его “хвосты” более “весомы”, а центральная часть более заострена по сравнению с нормальной плотностью. Если же $\gamma_2 < 0$, то “хвосты” распределения менее “весомы”, а центральная часть более плоская (по сравнению с нормальной плотностью).

2. Рассмотрим влияние нарушения нормальности на получаемые статистические выводы. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – случайная независимая выборка объема n из

генеральной совокупности со средним значением a и дисперсией σ^2 . Статистические процедуры оценивания и проверки гипотез относительно параметров распределения основываются обычно на статистиках

$$t = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\dot{S}} \quad \text{и} \quad \dot{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1)$$

Здесь $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ – выборочное среднее, \dot{S}^2 – “исправленная” выборочная дисперсия.

С этими статистиками, как хорошо известно (см., например, [1, 2]), связаны процедуры интервального оценивания и критерии для проверки гипотез относительно среднего значения a и дисперсии σ^2 соответственно нормальных совокупностей в случае, когда второй параметр (σ^2 или a) распределения неизвестен.

Статистики t и \dot{S}^2 по-разному ведут себя относительно нарушений нормальности элементов выборки.

Теорема 1. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – случайная независимая выборка объема n из генеральной совокупности со средним значением a и дисперсией σ^2 . Тогда распределение t -статистики (1) сходится при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному $N(0, 1)$ распределению.

Доказательство. 1). Если выборка извлечена из нормальной генеральной совокупности, то хорошо известно, что t -статистика (1) имеет распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы, которое при $n \rightarrow \infty$ сходится к стандартному нормальному $N(0, 1)$ распределению (см., например, [1, гл. 2, § 12]).

2). Предположим теперь, что выборка из произвольной генеральной совокупности со средним значением a и дисперсией σ^2 , а её объем n велик. Тогда распределение t -статистики (1) также, как и в случае выборки из нормальной совокупности, будет сближаться при $n \rightarrow \infty$ со стандартным нормальным $N(0, 1)$ распределением.

Действительно, в силу центральной предельной теоремы распределение статистики $(\bar{x} - a)\sqrt{n} / \sigma$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному $N(0, 1)$ распределению.

Очевидно, имеет место представление

$$\dot{S}^2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{n}{n-1} (\bar{x})^2, \quad (2)$$

где слагаемые x_i и x_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n$) независимы и одинаково распределены.

В силу усиленного закона больших чисел (А.Н. Колмогорова) (см., например, [4, гл. IV, § 3]) имеем сходимость при $n \rightarrow \infty$ почти наверное и, следовательно, по вероятности и по распределению (см. [4, гл. II, § 10])

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow E(x_1^2) \quad \text{и} \quad (\bar{x})^2 \rightarrow (E x_1)^2. \quad (3)$$

Так как множитель в правой части (2) $c_n = n/(n-1) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то из (2) с учетом (3) вытекает сходимость при $n \rightarrow \infty$ почти наверное (а также по вероятности и по распределению)

$$\dot{S}^2 \rightarrow E(x_1^2) - (E x_1)^2 = \sigma^2.$$

Поскольку

$$t = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\dot{S}} = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \bigg/ \sqrt{\frac{\dot{S}^2}{\sigma^2}},$$

то, применяя теорему о сходимости из п.20.6 гл. 20 [2], получаем утверждение теоремы 1.

Из этой теоремы следует, что при больших объемах выборки n распределение t -статистики (1) практически не зависит от распределения генеральной совокупности. Поэтому статистические выводы, справедливые в нормальном случае, будут правильными, если даже распределение элементов выборки существенно отличается от нормального.

Иную картину мы будем иметь при выводах, основанных на “исправленной” выборочной дисперсии \dot{S}^2 .

Теорема 2. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – случайная независимая выборка объема n из генеральной совокупности со средним значением a , дисперсией σ^2 и конечным моментом 4-го порядка: $E(x_i^4) < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ распределение статистики

$$\left(\dot{S}^2 - \sigma^2 \right) / \left(\sigma^2 \sqrt{\frac{n-1}{2}} \right)$$

сходится к нормальному $N(0, 1 + \gamma_2/2)$ распределению.

Доказательство. “Исправленная” выборочная дисперсия \dot{S}^2 является несмещенной оценкой теоретической

дисперсии σ^2 (см., например, [1, гл. 2, § 17] или [3, гл. 2, § 12]), т.е.

$$E(\dot{S}^2) = \sigma^2. \quad (4)$$

1) Предположим, что выборка из нормальной $N(a, \sigma^2)$ генеральной совокупности и рассмотрим статистику

$$\chi^2 = (n-1)\dot{S}^2 / \sigma^2. \quad (5)$$

Как известно, статистика (5) имеет распределение “хи-квадрат” с $(n-1)$ степенями свободы и характеристиками

$$E(\chi^2) = n-1, \quad D(\chi^2) = 2(n-1).$$

Отсюда и из представления (5) вытекает, что

$$D(\dot{S}^2) = D\left(\frac{\sigma^2 \chi^2}{n-1}\right) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} D(\chi^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}. \quad (6)$$

Поэтому в силу центральной предельной теоремы распределение статистики

$$\frac{\dot{S}^2 - E(\dot{S}^2)}{\sqrt{D(\dot{S}^2)}} = \frac{\dot{S}^2 - \sigma^2}{\sigma^2 \sqrt{2/(n-1)}}$$

сходится при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному $N(0, 1)$ распределению.

Для завершения доказательства для нормального случая остается заметить, что в данной ситуации $\gamma_2 = 0$ (см. п.1).

2). Пусть теперь выборка из произвольной генеральной совокупности со средним значением a , дисперсией σ^2 и коэффициентом эксцесса γ_2 . Рассмотрим выборочную дисперсию

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - (n\bar{x})^2.$$

Так как $S^2 = \frac{n-1}{n} \dot{S}^2$, то из (4) следует, что

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n} \mu_2. \quad (7)$$

Далее,

$$(S^2)^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 - 2(\bar{x})^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) + (n\bar{x})^4.$$

В результате непосредственных вычислений получаем

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n x_i^4 + \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} (n\mu_4 + n(n-1)\mu_2^2) = \frac{1}{n} (\mu_4 + (n-1)\mu_2^2),$$

$$E\left((\bar{x})^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right)\right) = \frac{1}{n^3} E\left(\sum_{i=1}^n x_i^4 + \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j^2\right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} (\mu_4 + (n-1)\mu_2^2),$$

$$E(\bar{x})^4 = \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4 = \frac{\mu_4 + 3(n-1)\mu_2^2}{n^3}.$$

Отсюда и из (7), после приведения подобных членов, находим

$$D(S^2) = E\left((S^2)^2\right) - (E(S^2))^2 = \frac{(n-1)^2}{n^3} \left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \mu_2^2\right)$$

Наконец, в силу определения γ_2 из последнего равенства следует

$$D(\dot{S}^2) = D\left(\frac{n}{n-1} S^2\right) = \sigma^4 \left(\frac{2}{n-1} + \frac{\gamma_2}{n}\right). \quad (8)$$

Отношение (8) к (6) равно $1 + \gamma_2(n-1)/2n$. При больших n это отношение приближается к $1 + \gamma_2/2$, а распределение \dot{S}^2 – к нормальному. Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

Теорема 2 показывает, что статистические процедуры, основанные на статистике \dot{S}^2 , существенно зависят от распределения генеральной совокупности даже при большом объеме выборки. Если коэффициент эксцесса γ_2 сильно отличается от нуля, это может являться очевидной причиной серьезных ошибок при статистических выводах.

Литература

- [1] Боровков А.А. *Математическая статистика*. – Новосибирск: Наука; Изд-во Института математики, 1997.
- [2] Крамер Г. *Математические методы статистики* / 2-е изд., стер. – М.: Мир, 1976.
- [3] Семёнов А.Т. *Математическая статистика: Учебное пособие*. – Новосибирск: НГУЭУ, 2007.
- [4] Ширяев А.Н. *Вероятность*. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Об интервальном анализе распределений

Александр Александрович Харин

Московский физико-технический институт
Современная Гуманитарная Академия
Москва
aaharin@yandex.ru

Аннотация. В докладе представлены отдельные части введения в систематическое изложение нового направления интервального анализа. Направление условно названо “Интервальный анализ распределений”. В объеме доклада представлены примеры, условия, ряд формул и вывод некоторых формул. Получены т.н. “Кольцо формул” и обобщенные формулы Новоселова. Интервальный анализ распределений может быть использован, в т.ч., в математической статистике, теории вероятностей, экономике, моделировании, прогнозировании, распознавании, анализе Интернет-распределений.

Ключевые слова. Интервальный анализ, неопределённость, распределения, моменты распределений, средние значения, разрывы.

1 Введение

Интервальный анализ – одно из важных направлений обобщенной теории неопределённости; весомо и практическое значение интервального анализа (см., напр., [1]). Однако, как отмечено в [2], “... применение интервального анализа часто дает неудовлетворительные результаты из-за чрезмерных длин получаемых интервалов.” Кроме того, до настоящего времени недостаточное внимание уделялось вопросам, касающимся интервалов моментов распределений, в т.ч., интервалов средних значений.

В ряде случаев может оказаться полезной дополнительная информация, способная привести, в т.ч., к уменьшению неопределённости, касающейся интервалов моментов распределений и уменьшению ширин этих интервалов.

В настоящем докладе рассматриваются (в целом неизвестные) распределения величин и интервалы их моментов. Показано, что, при наличии достаточно скудной информации интервального характера о распределении некоторой величины, можно содержательно применять интервальный анализ для интервалов ее моментов, в т.ч. можно получить ряд полезных формул и дополнительные ограничения для параметров интервалов моментов распределения этой величины.

2 Примеры применения

2.1 Небоскреб

В качестве одного из примеров по теме доклада может быть рассмотрен расчет интервала положения центра тяжести небоскреба (см. рис. 1 и 2) для оценки

устойчивости небоскреба при сильном ветре, ураганах, подземных толчках и т.п.:



Рис. 1. Интервал положений центра тяжести небоскреба.

1. В каждой комнате каждого этажа небоскреба может находиться некоторое количество тяжестей (люди, мебель и др.) в интервале от нуля (от веса стен, пола и потолков) до некоторого максимального веса. Таким образом, для каждой нескольких этажей, как части небоскреба, центр их тяжести заключен в пределах некоторого одномерного вертикального интервала.

Если центр тяжести каждой части небоскреба заключен в пределах одномерного вертикального интервала, то очевидно, что центр тяжести всего небоскреба тоже будет заключен в пределах некоторого (в общем случае – другого по размеру) одномерного вертикального интервала.

2. Люди, мебель и другие тяжести могут произвольно перемещаться в пределах интервалов комнат небоскреба. Таким образом, для каждой комнаты, как для элемента небоскреба, центр тяжести заключен в пределах некоторого двумерного горизонтального интервала. Если центр тяжести каждого элемента небоскреба заключен в пределах двумерного горизонтального

интервала, то очевидно, что центр тяжести всего небоскреба тоже будет заключен в пределах некоторого (в общем случае – другого по размерам) двумерного горизонтального интервала.

3. Таким образом, центр тяжести всего небоскреба будет заключен в пределах некоторого трехмерного интервала.

На рисунке 1 схематично изображен небоскреб. Для простоты показаны всего по две комнаты на этаже. В комнатах одного из этажей схематично показаны примеры расположения тяжестей. В остальных комнатах расположение тяжестей известно только с точностью до некоторого интервала.

Сплошными стрелками схематично показаны веса и линии положения центров тяжести отдельных предметов на том этаже, для которого точно известно расположение тяжестей. Заштрихованными интервалами схематично показаны интервалы положения центров тяжести двух комнат, этажа и всего небоскреба. Очевидно, что в пределах каждого интервала наихудшим положением центра тяжести будет левая (дальняя от ветра) верхняя точка, а наилучшим положением центра тяжести будет правая (ближняя к ветру) нижняя точка. Пунктирными стрелками схематично показаны веса в наихудших и наилучших положениях центров тяжести двух комнат, этажа и всего небоскреба.

На рисунке 2 укрупненно изображено формирование интервалов центров тяжести первой (левой) и второй (правой) комнат и всего этажа. Для простоты, во внимание принимается только одна горизонтальная (слева направо) координата и (для интервалов) полагается, что общий вес тяжестей одинаков для каждой из обеих комнат.

Рисунок 2 состоит из четырех фрагментов:

- 1) На первом сверху фрагменте сплошными стрелками схематично показаны веса и линии положения центров тяжести отдельных предметов, центров тяжести первой M_1 и второй M_2 комнат и всего этажа $M_{1,2}$, для которого точно известно расположение тяжестей.
- 2) На втором фрагменте сплошными стрелками схематично показаны веса и линии положения центров тяжести первой $M_{1,Left}$ и второй $M_{2,Left}$ комнат и всего этажа $M_{1,2,Left}$, для случая, когда все тяжести смещены максимально влево.
- 3) На третьем фрагменте сплошными стрелками схематично показаны веса и линии положения центров тяжести первой $M_{1,Right}$ и второй $M_{2,Right}$ комнат и всего этажа $M_{1,2,Right}$, для которого точно известно расположение тяжестей, для случая, когда все тяжести смещены максимально вправо.

Очевидно, в рамках каждого интервала, наихудшим положением центра тяжести будет крайняя левая, а наилучшим – крайняя правая точка.

Очевидно, что для каждой комнаты интервал возможных положений центра тяжести комнаты расположен между этими крайними левой и правой точками. Поскольку центр тяжести этажа является суммой центров тяжести комнат, то его возможные положения будут представлять собой интервал так же, как и положения центров тяжести комнат.

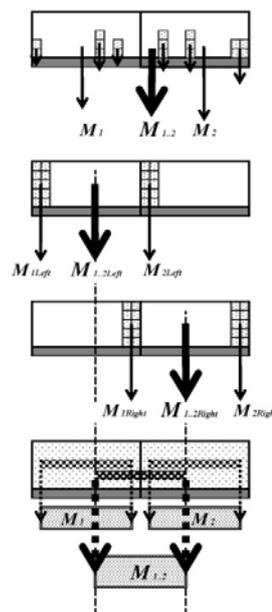


Рис. 2. Формирование интервалов положений центров тяжести комнат и этажа.

- 4) На четвертом сверху, нижнем фрагменте заштрихованными интервалами схематично показаны интервалы положения центров тяжести первой и второй комнат и всего этажа, для которого неизвестно точное расположение тяжестей. Пунктирными стрелками схематично показаны веса в наихудших и наилучших положениях центров тяжести двух комнат и всего этажа.

Таким образом, если известны общие веса тяжестей, и известны только предельные, крайние возможные положения этих тяжестей в комнатах, то положения центров тяжести комнат и всего этажа будут представлять собой интервалы. Знание интервалов центров тяжести всех комнат позволяет рассчитать интервалы центров тяжести этажей и всего небоскреба и оценить его устойчивость.

2.2 Опломбированный автофургон

Пусть имеются высокие, крытые, пломбируемые автофургоны. Пусть регулярно ставится задача максимально быстро и полно загружать их коробками с грузами и максимально быстро перегонять их из города в город по дороге с частыми крутыми поворотами.

Загрузка ведется в разных складах и разными грузчиками. Коробки примерно одинаковы по размерам (или отличаются по размерам в 2 или 4 раза), то есть ряды по размерам примерно равные. Коробки достаточно прочные и грузы не чрезмерно тяжелые, так что любую коробку можно ставить на любую высоту. Загрузка ведется строго последовательно по рядам от пола до потолка в порядке (произвольной) подачи коробок. Из города в город машину ведет другой водитель. Известен минимальный радиус поворотов дороги.

Для каждого рейса известен свой максимальный и минимальный вес одного коробко-места и общий вес автофургона.

Таким образом, получаем задачу, в которой имеет место произвольное интервальное распределение весов коробок по вертикали и по горизонтали в опломбированном автофургоне. Требуется для каждого рейса найти свою максимальную скорость, с которой можно проезжать частые повороты так, чтобы автофургон не перевернулся.

Эта задача об автофургоне аналогична предыдущей задаче о нахождении интервала положения центра тяжести небоскреба.

2.3 Другие области возможного применения

Аналогичные расчеты, оценки оптимального территориального распределения магазинов, пунктов услуг, размеров автостоянок, ширины трасс и т.п. могут проводиться при строительстве и расширении городов и поселков и улучшении их инфраструктуры; а также для сетей магазинов, автозаправок, сервисов и т.п. крупных фирм; а также для расчета, оценки места наилучшего расположения своего магазина, автозаправки, пункта обслуживания и т.п. малой и средней фирмой при планировании размещения своей единственной, или одной из немногих точек и т.п.

Аналогичные расчеты, оценки оптимального расположения громкоговорителей, колонок, точек питания, услуг, и т.п. могут проводиться при планировании массовых мероприятий.

Аналогичные расчеты, оценки могут применяться при составлении расписаний, например, занятий в ВУЗах, движения поездов и т.п.

Аналогичные расчеты, оценки графиков нагрузок, расхода в течение дня, недели, года могут проводиться обслуживающими ведомствами, организациями и фирмами по таким видам потребления, услуг, как вода, электричество, топливо, питание, товары, перевозки и т.п.

Интервальный анализ распределений может выполняться для текста, речи, музыки, изображений, видео и т.п. и для их машинного распознавания, преобразования и создания [2].

Интервальный анализ распределений может выполняться для анализа объектов в Интернете.

3 Анализ интервалов моментов распределения

3.1 Общие условия

Пусть на некотором отрезке $[A, B]$ дана некоторая величина (распределение плотности (относительных) весов (weights)) $\{w(x_k)\} : k=1, 2, \dots, K : 1 \leq K \leq \infty$ и

$$\sum_{k=1}^K w(x_k) = W < \infty.$$

По умолчанию будем считать

$$W = 1,$$

то есть веса $w(x_k)$ (и далее w_i) будем считать относительными.

Пусть величина $\{w(x_k)\}$ известна с точностью до некоторой системы элементарных смежных интервалов $\{X_i\} : i=1, 2, \dots, I :$

$$2 \leq I < \infty, X_1 + X_2 + \dots + X_I = X_{1..I} \equiv [A, B]$$

$$A \equiv X_{1..I} = X_1 < X_1 = X_2 \dots < X_I = X_{1..I} \equiv B.$$

Веса элементарных интервалов $\{X_i\}$ по определению равны

$$\sum_{x_k \in X_i} w(x_k) \equiv w_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^I w_i = W = 1.$$

Важно, что для получения величины общего веса W достаточно выполнить всего одно дополнительное измерение либо общего отрезка $X_{1..I} \equiv [A, B]$, либо последнего (неизмеренного) элементарного интервала (при оптимальном расположении элементарных интервалов). То есть, для применения интервального анализа распределений достаточно, чтобы для исследуемой величины $\{w(x_k)\}$ ее общий вес был известен, или мог быть измерен, вычислен, оценен, и т.п. на отрезке $[A, B]$ в целом и мог быть в целом измерен не менее, чем на одном элементарном интервале, принадлежащем $[A, B]$.

Определим среднее значение M величины $\{w(x_k)\}$ как

$$M \equiv \sum_{k=1}^K x_k w(x_k).$$

В общем случае, это среднее значение известно с точностью до некоторого интервала M .

Заметим, что суммирование величины на смежных интервалах в точках пересечения этих интервалов, во избежание двойного суммирования, должно производиться только один раз. Например, величина в точке пересечения суммируется только для левого (нижнего) интервала.

Заметим, что возможен анализ и для несмежных интервалов.

3.2 Средние значения

Рассчитаем интервал средних значений $M_{1..I}$ для общего, объединенного интервала $X_{1..I}=[A, B]$:

Для левого конца интервала $M_{1..I}$ получаем через веса

$$\begin{aligned} \underline{M}_{1..I} &= \sum_{i=1}^I \underline{X}_i w_i = \\ &= \underline{X}_1 (w_1 + \sum_{i=2}^I w_i - \sum_{i=2}^I w_i) + \sum_{i=2}^I \underline{X}_i w_i =, \\ &= \underline{X}_{1..I} + \sum_{i=2}^I w_i \sum_{m=1}^{i-1} \text{wid } X_m \end{aligned}$$

или через ширины получаем

$$\begin{aligned} \underline{M}_{1..I} &= \underline{X}_{1..I} + \sum_{i=2}^I w_i \sum_{m=1}^{i-1} \text{wid } X_m = \\ &= \underline{X}_{1..I} + \sum_{i=1}^{I-1} \text{wid } X_i \sum_{m=i+1}^I w_m \end{aligned}$$

Для правого конца интервала $M_{1..I}$ через веса получаем

$$\begin{aligned} \overline{M}_{1..I} &= \sum_{i=1}^I \overline{X}_i w_i = \\ &= \overline{X}_{1..I} - \sum_{i=1}^{I-1} w_i \sum_{m=i+1}^I \text{wid } X_m \end{aligned}$$

или через ширины получаем

$$\begin{aligned} \overline{M}_{1..I} &= \overline{X}_{1..I} - \sum_{i=1}^{I-1} w_i \sum_{m=i+1}^I \text{wid } X_m = \\ &= \overline{X}_{1..I} - \sum_{i=2}^I \text{wid } X_i \sum_{m=1}^{i-1} w_m \end{aligned}$$

3.3 Разрывы для средних значений

Если ширина элементарных интервалов не может быть меньше некоторой ненулевой величины $\text{wid } X_{Min} > 0$ и вес этих интервалов не может быть меньше некоторой ненулевой величины $w_{Min} > 0$, то это приводит к наличию ненулевых разрывов между областью средних значений и границами общего интервала

$$\begin{aligned} R_{Left} &\equiv \text{Min}(\underline{M}_{1..I} - \underline{X}_{1..I}) = \\ &= \frac{I(I-1)}{2} w_{Min} \text{wid } X_{Min} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} R_{Right} &\equiv \text{Min}(\overline{X}_{1..I} - \overline{M}_{1..I}) = \\ &= \frac{I(I-1)}{2} w_{Min} \text{wid } X_{Min} \end{aligned}$$

и

$$R_{Left} = R_{Right} = \frac{I(I-1)}{2} w_{Min} \text{wid } X_{Min} > 0,$$

то есть, между областью, внутри которой может быть расположен интервал средних значений $M_{1..I}$, и любой из границ общего интервала $X_{1..I}$, при этих условиях, существует ненулевой разрыв. При этом крайнее левое, например, положение области средних значений достигается при следующих условиях: Ширины интервалов равны $\text{wid } X_1 = \text{wid } X_2 = \dots = \text{wid } X_{I-1} = \text{wid } X_{Min}$ и $\text{wid } X_I = \text{wid } X_{I-1} - (I-1) \text{wid } X_{Min}$. Веса интервалов равны $w_2 = w_3 = \dots = w_I = w_{Min}$ и $w_1 = I - (I-1)w_{Min}$. Веса сконцентрированы на левых краях интервалов.

3.4 “Кольцо” формул

Ширина интервала $M_{1..I}$ равна (через веса)

$$\overline{M}_{1..I} - \underline{M}_{1..I} = \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I w_i \sum_{m=1, \dots, N | m \neq i} \text{wid } X_m$$

или (через ширины)

$$\overline{M}_{1..I} - \underline{M}_{1..I} = \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I \text{wid } X_i \sum_{m=1, \dots, N | m \neq i} w_m$$

или (по формуле Новоселова [3])

$$\begin{aligned} \overline{M}_{1..I} - \underline{M}_{1..I} &= \sum_{i=1}^I w_i \overline{X}_i - \sum_{i=1}^I w_i \underline{X}_i = \\ &= \sum_{i=1}^I w_i \text{wid } X_i \end{aligned}$$

Можно показать, что три вышеприведенные формулы для ширины интервала средних значений могут быть преобразованы друг в друга:

$$\begin{aligned} \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I \text{wid } X_i \sum_{m=1, \dots, N | m \neq i} w_m &= \\ = \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I \text{wid } X_i (1 - w_i) &= \sum_{i=1}^I \text{wid } X_i w_i \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I w_i \text{wid } X_i &= \sum_{i=1}^I w_i (\text{wid } X_{1..I} - \sum_{m=1, \dots, N | m \neq i} \text{wid } X_m) = \\ &= \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I w_i \sum_{m=1, \dots, N | m \neq i} \text{wid } X_m \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили “кольцо” из трех формул для ширины интервала средних значений

$$\begin{aligned} \text{wid } M_{1..I} &= \sum_{i=1}^I w_i \text{wid } X_i = \\ &= \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I w_i \sum_{m=1, \dots, N | m \neq i} \text{wid } X_m = \\ &= \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I \text{wid } X_i \sum_{m=1, \dots, N | m \neq i} w_m \end{aligned}$$

Оно может быть записано и в упрощенной форме

$$\begin{aligned} \text{wid } M_{1..I} &= \sum_{i=1}^I w_i \text{wid } X_i = \\ &= \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I w_i (\text{wid } X_{1..I} - \text{wid } X_i) = \\ &= \text{wid } X_{1..I} - \sum_{i=1}^I \text{wid } X_i (1 - w_i) \end{aligned}$$

3.5 Интервалы моментов

Рассчитаем интервалы моментов распределений $E_{1..I}(X - X_0)^n$ для общего случая. Из формулы Новоселова для интервала средних значений получаем обобщенные формулы Новоселова:

Для нечетных степеней n - для любых x_0 , а для четных степеней n - только для $x_0 \leq A$ и $x_0 \geq B$

$$\begin{aligned} \text{wid } E(X - X_0)_{1..I}^n &\equiv \\ &\equiv \overline{E(X - X_0)_{1..I}^n} - \underline{E(X - X_0)_{1..I}^n} = \\ &= \sum_{i=1}^I w_i (\overline{X_i} - x_0)^n - \sum_{i=1}^I w_i (\underline{X_i} - x_0)^n = \\ &= \sum_{i=1}^I w_i ((\overline{X_i} - x_0)^n - (\underline{X_i} - x_0)^n) \end{aligned}$$

Для четных степеней n , при $A \leq x_0 \leq B$, минимальные значения моментов достигаются, когда вес одного или двух интервалов сконцентрирован в точке x_0 .

Рассмотрим $h : 1 \leq h \leq I$. Если

$$\underline{X_h} < x_0 < \overline{X_h}$$

тогда

$$\begin{aligned} \text{wid } E(X - X_0)_{1..I}^n &= \\ &= \sum_{i=1}^{h-1} w_i ((\underline{X_i} - x_0)^n - (\overline{X_i} - x_0)^n) + \\ &+ w_h \text{Max}((\overline{X_h} - x_0)^n; (\underline{X_h} - x_0)^n) + \\ &+ \sum_{i=h+1}^I w_i ((\overline{X_i} - x_0)^n - (\underline{X_i} - x_0)^n) \end{aligned}$$

Если, для $1 \leq h \leq I-1$,

$$x_0 = \overline{X_h} = \underline{X_{h+1}}$$

тогда

$$\begin{aligned} \text{wid } E(X - X_0)_{1..I}^n &= \\ &= \sum_{i=1}^{h-1} w_i ((\underline{X_i} - \overline{X_h})^n - (\overline{X_i} - \overline{X_h})^n) + \\ &+ w_h (\underline{X_h} - \overline{X_h})^n + w_{h+1} (\overline{X_{h+1}} - \overline{X_h})^n + \\ &+ (\sum_{i=h+2}^I w_i ((\overline{X_i} - \overline{X_h})^n - (\underline{X_i} - \overline{X_h})^n) | h \leq I - 2) \end{aligned}$$

Заметим, что для интервалов центральных моментов $E_{1..I}(X-M)^n$ положения среднего значения M могут различаться для минимальных и максимальных значений $E_{1..I}(X-M)^n$.

Литература

- [1] С.П. Шарый. *Конечномерный интервальный анализ*. Издательство “XYZ”, Новосибирск, 2010.
- [2] Б.С. Добронез. *Интервальная математика*. Издательство КГУ, Красноярск, 2004.
- [3] А. А. Харин. Интервальный анализ распределений. Интервальные образы текста, речи, музыки, изображений и видеoinформации // *Труды 54-й научной конференции МФТИ*, Москва, 2011.
- [4] А. А. Харин. О возможных дополнениях к интервальной арифметике // *X Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий*, 2011.

Экономика. Парадоксы. Разрывы. Эвентология

Александр Александрович Харин

Московский физико-технический институт

Современная Гуманитарная Академия

Москва

aaharin@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены парадоксы теории полезности и теорема о существовании разрывов у границ шкалы вероятностей, позволяющая объяснить эти парадоксы. Сформулированы вопросы, которые может помочь решить эвентология.

Ключевые слова. Эвентология, риск, экономика, вероятность, неопределенность, разрывы, моделирование, теория полезности, теория принятия решений.

1 Введение

Явным или неявным фундаментом большинства разделов экономической теории являются описание экономического поведения человека (как самостоятельного экономического субъекта и как элемента других экономических субъектов).

Без этого фундамента нельзя получить большинство разделов экономической теории. Нельзя получить и экономическую теорию в целом. Проблемы фундамента ведут к проблемам в разделах и во всей экономической теории.

К сожалению, описание экономического поведения человека, как фундамент экономической теории, является одной из ее наиболее фундаментальных проблем.

В экономическом поведении человека можно выделить такую базовую составляющую, как принятие решения. При принятии решения в условиях неопределенности, человек зачастую выглядит совершенно иррационально. Впервые это было обнаружено более 250 лет назад, при рассмотрении Санкт-Петербургского парадокса [1]. Затем, более 50 лет назад, в парадоксе Алле [2].

Обобщенно, главные черты этой иррациональности отражены в парадоксе "четырёх областей" (см., напр., [3]): Даны четыре эксперимента: для выигрышей и проигрышей, для малых и больших вероятностей. В каждом эксперименте - по два исхода с одинаковым средним значением: один исход - гарантированный, а другой - вероятностный.

С «рациональной» точки зрения люди должны одинаково часто выбирать и гарантию и риск, то есть $гарантия = риск$.

Однако, многократными экспериментами достоверно установлено, что большинство людей нарушает эту

«рациональность». И, что самое «иррациональное», в наиболее близких, похожих случаях - нарушения противоположны:

1) Выигрыш \$99 гарантированно или \$100 с вероятностью 99%, то есть с риском?

Люди выбирают выигрыш \$99 гарантированно, то есть $гарантия > риск$

2) Выигрыш \$1 гарантированно или \$100 с вероятностью 1% (с риском)?

Люди выбирают выигрыш \$100 с вероятностью 1%, то есть $риск > гарантия$

3) Проигрыш -\$99 гарантированно или -\$100 с вероятностью 99% (с риском)?

Люди выбирают проигрыш -\$100 с вероятностью 99%, то есть $риск > гарантия$

4) Проигрыш -\$1 гарантированно или -\$100 с вероятностью 1% (с риском)?

Люди выбирают проигрыш -\$1 гарантированно, то есть $гарантия > риск$

Этот парадокс обобщает большинство других парадоксов и дает ключ к их решению.

Было предложено много решений этих (и неназванных здесь) проблем. Но это были либо частные решения, хорошо описывающие только отдельный случай, либо общие решения, решающие проблемы только частично.

Итог: Человек, как главный субъект экономической теории, остался иррациональным. Крайне сложно, если вообще возможно, построить рациональную теорию иррационального субъекта.

В конце концов, возникло сомнение, способна ли экономическая теория в принципе решить эти парадоксы и проблемы. Это оправдало постановку вопроса о рациональности человека.

В 2002 году Дэниел Канеман получил Нобелевскую премию по экономике за применение психологии при исследовании решений людей в условиях неопределенности. Его (с соавторами) эксперименты показали, что людей можно считать иррациональными.

В 2006 году Kahneman и Thaler [4] констатировали, что до сих пор не удалось удовлетворительно решить целый

ряд проблем теории полезности, в т.ч. парадоксы Алле и Эллсберга.

Однако еще Неу и Орме (см. [5]) пришли к выводу, что поведение человека может быть разумно моделировано как ожидаемая полезность плюс шум и, возможно, следует уделить шумам больше внимания, чем новым моделям полезности.

Выяснилось также, что большинство проблем сосредоточено или наиболее ярко выражено при вероятностях событий: очень малых, $P \sim 0\%$ и очень больших, $P \sim 100\%$, то есть, вблизи границ шкалы вероятностей. В связи с этим, возник общий вопрос о существовании разрывов у границ шкалы вероятностей при ненулевом разбросе данных.

2 Пример разрывов в шкале вероятностей

Простейший пример разрывов – стрельба в мишень. Пусть размер мишени (Рис. 1) равен $2L > 0$.

Пусть, при точном прицеливании, имеет место разброс попаданий (Рис. 2), например, диаметр пули меньше диаметра ствола, и пуля вылетает из ствола не по оптической оси ствола, а по некоторому пучку траекторий вокруг этой оси. Для упрощения рассмотрения, допустим, что попадания распределены равномерно в круге диаметром 2σ .

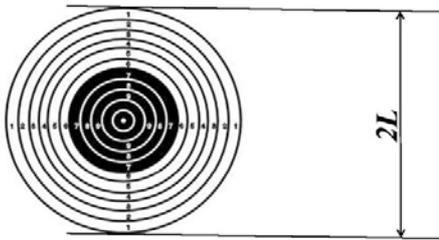


Рис. 1: Мишень размером $2L > 0$

Рассмотрим два случая: 1) малое рассеяние $2\sigma_{Small} \ll 2L$ и 2) большое рассеяние $2\sigma_{Large} > 2L$

1) Small scattering of hits



2) Large scattering of hits

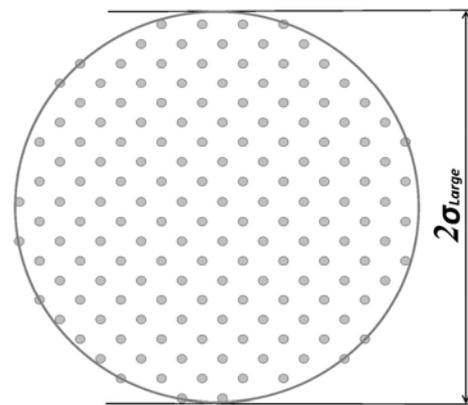


Рис. 2: Два случая рассеяния: 1) малое рассеяние $2\sigma_{Small} \ll 2L$, 2) большое рассеяние $2\sigma_{Large} > 2L$

Стрельба в случае малого рассеяния ($2\sigma_{Small} \ll 2L$) показана на Рис. 3.

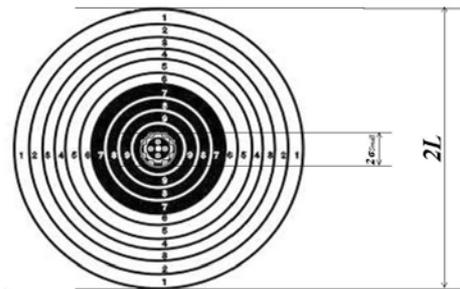


Рис. 3: Стрельба в случае малого рассеяния $2\sigma_{Small} \ll 2L$

В случае малого ($2\sigma_{Small} \ll 2L$) рассеяния максимальная вероятность попадания в мишень может достигать границы шкалы вероятностей, т.е. быть равна 1.

Стрельба в случае большого ($2\sigma_{Large} > 2L$) рассеяния показана на Рис. 4.

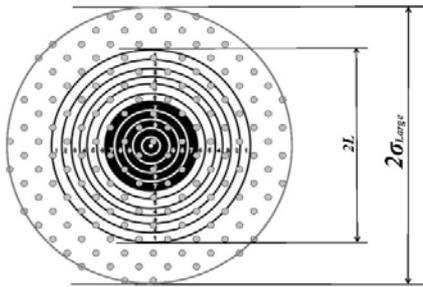


Рис. 4: Стрельба в случае большого рассеяния

В случае большого рассеяния ($2\sigma_{Large} > 2L$) максимальная вероятность попадания в мишень не может достигать границы шкалы вероятностей, т.е. не может быть равна L .

3 Теорема о существовании разрывов у границ шкалы вероятностей. Общая схема доказательства

В 2010 году в [6] доказана очевидная, но принципиальная, теорема о существовании разрывов у границ шкалы вероятностей. Эта теорема может объяснить большинство парадоксов теории полезности.

3.1 Общая лемма

Если математическое ожидание M некоторой непрерывной или дискретной величины $f(x)$ или $f(x_k)$ стремится к границе A конечного интервала $[A, B]$, то конечные центральные моменты этой величины стремятся к 0 , в т.ч.

$$|E(X - M)^n| \leq (B - A)^n \times 2 \frac{(M - A)}{(B - A)} \xrightarrow{M \rightarrow A} 0.$$

3.2 Общая теорема

Если, на конечном интервале, какой-либо конечный центральный момент не может приближаться к нулю ближе, чем на $r_{dispers} > 0$, то математическое ожидание тоже не может приближаться к границе этого интервала ближе, чем на $r_{mean} > 0$, в т.ч.

$$0 < r_{dispers} \leq |E(X - M)^n| \leq 2(B - A)^{n-1}(M - A),$$

$$0 < \frac{r_{dispers}}{2(B - A)^{n-1}} \leq (M - A),$$

$$r_{mean} \equiv \frac{r_{dispers}}{2(B - A)^{n-1}}.$$

3.3 Теорема для оценки вероятности

Если на интервале $[0, 1]$ для оценки вероятности, частоты $F \equiv M$ существует ненулевой разрыв $r_{dispers} > 0$ между дисперсией ее плотности и нулем, то между F и границами интервала тоже существуют ненулевые разрывы $r_{mean} > 0$, в т.ч.

$$0 < r_{mean} \equiv \frac{r_{dispers}}{2} \leq M = F.$$

3.4 Теорема для вероятности

Если вероятность P является пределом, к которому стремится оценка вероятности, частота F при стремлении количества испытаний K к бесконечности, и существуют ненулевые разрывы $r_{mean} > 0$ между F и границами шкалы вероятностей, то между P и границами шкалы вероятностей существуют такие же ненулевые разрывы $r_{mean} > 0$, в т.ч.

$$P = \lim_{K \rightarrow \infty} F_K,$$

$$F_K \geq r_{mean} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \lim_{K \rightarrow \infty} F_K \geq \lim_{K \rightarrow \infty} r_{mean} = r_{mean}.$$

Таким образом, если, на конечном интервале, конечный центральный момент функции не может приближаться к нулю ближе, чем на ненулевую величину $r_{dispers} > 0$ (dispersion), то математическое ожидание функции тоже не может приближаться к границам этого интервала ближе, чем на ненулевую величину $r_{mean} > 0$.

4 Решение парадокса

Из существования разрывов у границ шкалы вероятностей следует, что у каждой границы вероятность будет смещена на величину разрыва от границы - к середине шкалы.

Это соответствует результатам экспериментов и позволяет с единой точки зрения и без дополнительных предположений объяснить рассматриваемые парадоксы.

А) Парадокс происходит вблизи границ диапазона вероятностей.

Б) Шумы приводят к смещению вероятностей от границ к середине диапазона. Учтем, что Проигрыш=-Выигрыш ($\Pi=-B$) и смещение среднего значения исхода меняется на противоположное.

Получаем следующее влияние шумов на вероятностные исходы:

1) (большая) Вероятность уменьшается ->
гарантия > риск

- 2) (малая) Вероятность увеличивается ->
риск > гарантия
- 3) (малая) Вероятность увеличивается, но $P=-B$ и ->
гарантия > риск
- 4) (большая) Вероятность уменьшается, но $P=-B$ и ->
риск > гарантия

Парадокс качественно решен.

4.1 Замечания к построению моделей поведения людей

Сделаем краткие замечания о разрывах для их использования в будущих моделях поведения людей.

1) По-видимому, простейший способ распространения выводов о существовании разрывов у границ шкалы вероятностей на внутреннюю часть шкалы – это соединение прямой линией двух точек разрывов на противоположных границах шкалы прямой линией внутри шкалы.

2) Из того, что вероятность непредусмотренных событий больше нуля (см., напр., [7], – решение парадокса Эллсберга), следует, что эта прямая должна быть смещена вниз относительно симметричного положения.

Заметим также, что ситуация с кривой Прелека у границ шкалы вероятностей аналогична ситуации с принципом Гейзенберга, когда координаты одной частицы измеряются с помощью другой частицы.

5 Эвентология

В эвентологии человек может являться и субъектом и объектом вероятностных процессов. Это дает новые возможности для анализа ситуаций, в которых человек может осознанно или бессознательно влиять на их исход.

В 2007 году в [8] была сформулирована цель: "Наша цель в определенном смысле противоречит этому раннему выводу (1979) нобелевского лауреата: мы надеемся показать, что поведение всех людей может быть эвентологически описано полностью в рамках колмогоровской теории вероятностей".

Может ли эвентология помочь объяснить, почему в экспериментах большинство испытуемых давало правильные ответы, несмотря на очевидное противоречие между этими ответами и общепринятой теорией вероятностей?

Может ли эвентология создать первую в мире успешную модель "поведения людей в рамках колмогоровской теории вероятностей"?

Литература

- [1] D. Bernoulli. Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 5:175-192, 1738.
- [2] M. Allais. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine. Econometrica 21:503-46, 1953.
- [3] A. Tversky and P. Wakker. Risk attitudes and decision weights. Econometrica, 63:1255-1280, 1995.
- [4] D. Kahneman and R. Thaler. Anomalies: Utility Maximization and Experienced Utility. Journal of Economic Perspectives, 20 (1):221-234, 2006.
- [5] J. Hey and C. Orme. Investigating Generalizations of Expected Utility Theory Using Experimental Data. Econometrica, 62:1291-1326, 1994.
- [6] А.А. Харин. Теорема о существовании разрывов в шкале вероятностей. IX Международная конференция по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий. Красноярск, 2010.
- [7] А.А. Харин. Принцип неопределенного будущего, примеры его применения в экономической теории, возможности его применения в теориях сложных систем, в теории множеств, теории вероятностей и логике. Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 7-я Международная Научная Школа, С-Петербург, 2007.
- [8] О.Ю. Воробьев. Эвентология (как наука о событиях и со-бытии) (второе издание). Сиб. фед. ун-т, Красноярск, 2007.

Процентная остаточная продолжительность безотказной работы в информативной модели неполных наблюдений при случайном цензурировании с двух сторон

Фарход Маматхонович Холмуродов

Национальный Университет Узбекистана,
Ташкент
hfarhod@bk.ru

Аннотация. В работе в информативной модели случайного цензурировании с двух сторон используя полупараметрическую степенную оценку для функции распределения построена оценка для процентной остаточной продолжительности безотказной работы.

Ключевые слова. Случайное цензурирование, полупараметрическая степенная оценка, квантильная функция.

1. Введение

Пусть $F(t) = P(X \leq t)$ - функция распределения (ф.р.) продолжительности жизни X , $F(0) = 0$ и $Q(y) = F^{-1}(y) = \inf\{t \geq 0: F(t) \geq y\}$ - соответствующая квантильная функция, $0 < y < 1$, $Q(1) = T_F = \inf\{t \geq 0: F(t) = 1\}$. Для $0 < p < 1$ рассмотрим $(1-p)$ -процентную остаточную продолжительность жизни $\pi(p; t) = Q(1 - p(1 - F(t))) - t$, $t > 0$ (см [2]). В статистической литературе отмечены преимущества медианной остаточной продолжительности жизни $\pi(\frac{1}{2}; t)$ по сравнению со средней остаточной $E(t) = M(X - t | X > t)$. Интерес представляет оценивание $\pi(p; t)$ и для других значений p . Рассмотрим модель случайного цензурирования X с двух сторон парой с.в. (Y_1, Y_2) с ф.р. $G_k(t) = P(Y_k \leq t)$, $k = 1, 2$. Пусть с.в. $\{X, Y_1, Y_2\}$ взаимонезависимы и $\{(X_i, Y_{1i}, Y_{2i}), i \geq 1\}$ - последовательность независимых и одинаково распределенных реализаций вектора (X, Y_1, Y_2) . Наблюдается выборка объема n : $S^{(n)} = \{(Z_i, \delta_{0i}, \delta_{1i}, \delta_{2i}), 1 \leq i \leq n\}$, где $Z_i = \max(Y_{1i}, \min(X_i, Y_{2i}))$, $\delta_{0i} = I(Y_{1i} > \min(X_i, Y_{2i}))$, $\delta_{1i} = I(Y_{1i} \leq X_i \leq Y_{2i})$, $\delta_{2i} = I(Y_{1i} \leq Y_{2i} < X_i)$ и $I(A)$ - индикатор события A . Рассмотрим информативное цензурирование, согласно которому для всех $t \geq 0$:

$$\begin{cases} G_1(t) = [1 - (1 - F(t))^{\theta+1}]^\beta, \\ G_2(t) = 1 - (1 - F(t))^\theta, \end{cases} \quad (1)$$

где параметры $\beta, \theta > 0$ - неизвестны. Модель (1) была введена и исследована в [1]. Эта модель характеризуется тем, что выполнения равенств (1) эквивалентно независимости с.в. Z_i и вектора $(\delta_{0i}, \delta_{1i}, \delta_{2i})$.

Рассмотрим следующую оценку для $\pi(p; t)$:

$$\pi_n(p; t) = Q_n(1 - p(1 - F_n(t))) - t, \quad t \geq 0, \quad 0 < p < 1, \quad (2)$$

где $1 - F_n(t) = [1 - (H_n(t))^{\lambda_n}]^{\gamma_n}$ - оценка для $1 - F(t)$

$$Q_n(y) = F_n^{-1}(y) = Q_n^H \left\{ \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{\lambda_n}} \right]^{\frac{1}{\gamma_n}} \right\}$$

- оценка для $Q(y)$, $Q_n^H(y) = H_n^{-1}(y) = \inf\{t \geq 0: H_n(t) \geq y\}$

- оценка квантиля $Q^H(y) = H^{-1}(y) = \inf\{t \geq 0: H(t) \geq y\}$,

$$H(t) = P(Z_i \leq t), \quad H_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(Z_i \leq t), \quad \lambda_n = 1 - p_n^{(0)},$$

$$\gamma_n = p_n^{(1)} (1 - p_n^{(0)})^{-1}, \quad p_n^{(m)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^m, \quad m = 0, 1.$$

Приведем асимптотические свойства оценки $\pi(p; t)$. Прежде всего сформулируем утверждение о состоятельности оценки (2).

Теорема 1. Пусть $t > 0$ и $0 < p < 1$ фиксированы. Если Q непрерывна в точке $1 - p(1 - F(t))$ и $Q(1 - p(1 - F(t)))$ является единственным решением s неравенства $F(s-) \leq 1 - p(1 - F(t)) \leq F(s)$, то при $n \rightarrow \infty$, $\pi_n(p; t) \xrightarrow{п.н.} \pi(p; t)$.

Пусть $f = F'$ - плотность. Определим нормированную функцию

$$r_n(p; t) = n^{1/2} f(t + \pi(p; t)) (\pi_n(p; t) - \pi(p; t)).$$

Теорема 2. Пусть $t > 0$ и $0 < p < 1$ фиксированы так, что $H(t + \pi(p; t)) < 1$, а функция $f(Q(\cdot))$ - положительна и конечна в точке $1 - p(1 - F(t))$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$r_n(p; t) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(p; t)),$$

где $\sigma^2(p; t) = p^2 (1 - F(t))^2 [d(t + \pi(p; t)) - d(t)]$,
 $d(t) = A^2(t)H(t)(1 - H(t)) + B^2(t)p^{(o)}(1 - p^{(o)}) +$
 $+ C^2(t)p^{(1)}(1 - p^{(1)}) - 2B(t)C(t)p^{(o)}p^{(1)}$; $p^{(m)} = P(\delta_{mi} = 1)$,

$$m = 0, 1; A(t) = p^{(1)} \left[(H(t))^{p^{(o)}} - H(t) \right]^{-1},$$

$$B(t) = - \left[\frac{p^{(1)}}{1 - p^{(o)}} C(t) + \frac{A(t)}{1 - p^{(o)}} H(t) \log H(t) \right],$$

$$C(t) = - \frac{1}{1 - p^{(o)}} \log \left[1 - (H(t))^{1 - p^{(o)}} \right].$$

Определим при $\lambda > 0$ функции:

$$\mathbb{B}_n^\pm(\lambda; p; t) = \pi_n(p; t) \pm \lambda n^{-1/2} \sigma_n(p; t),$$

где $\sigma_n^2(p; t)$ оценка $\sigma^2(p; t)$:

$$\sigma_n^2(p; t) = p^2 (1 - F_n(t))^2 [d_n(t + \pi_n(p; t)) - d_n(t)],$$

$$d_n(t) = A_n^2(t)H_n(t)(1 - H_n(t)) + B_n^2(t)p_n^{(o)}(1 - p_n^{(o)}) +$$

$$+ C_n^2(t)p_n^{(1)}(1 - p_n^{(1)}) - 2B_n(t)C_n(t)p_n^{(o)}p_n^{(1)},$$
 а $A_n(t), B_n(t)$

и $C_n(t)$ соответствующие оценки $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$,

получаемые заменой $H(t)$, $p^{(m)}$, $m=0,1$ на их оценки

$$H_n(t), p_n^{(m)}, m = 0, 1.$$

Следующее утверждение даёт возможность построения доверительного интервала для $\pi(p; t)$.

Теорема 3. Если $0 < \alpha < 1$, то в условиях теоремы 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{B}_n^-(\lambda_\alpha; p; t) \leq \pi(p; t) \leq \mathbb{B}_n^+(\lambda_\alpha; p; t)) = 1 - \alpha, \text{ где}$$

$$\lambda_\alpha > 0 \text{ решение уравнения } \Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ и } \Phi(\cdot) -$$

стандартное нормальное распределение.

Литература

- [1] Abdushukurov A.A., Nonparametric estimation of the distribution function based on relative risk function. *Commun. Statist.: Th.&Meth.* - 1998.v.27.n. 8.p.1991-2012.
- [2] Haines A.L., Sindpurvalla N.D., Some contributions to the stochastic characterization of wear. *Reliability and Biometry: Statistical Analysis of life Length (F. Proschan and R.J. Serfling, eds.)*. SIAM, Philadelphia. 1974.p.47-80.

Двойственность в асимптотическом анализе вероятности связности случайных графов

**Гурами Шалвович
Цициашвили**

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки ИПМ ДВО РАН
Лаборатория вероятностных методов и
системного анализа
Владивосток
guram@iam.dvo.ru

**Марина Анатольевна
Осипова**

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки ИПМ ДВО РАН
Лаборатория вероятностных методов и
системного анализа
Владивосток
mao1975@list.ru

**Александр Сергеевич
Лосев**

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки ИПМ ДВО РАН
Лаборатория вероятностных методов и
системного анализа
Владивосток
A.S.Losev@yandex.ru

Аннотация. В работе получены асимптотические формулы для вероятности связности весьма широкого класса графов с высоконадежными ребрами. Вычисление коэффициентов в этих формулах требует геометрически растущего с числом вершин графа количества арифметических операций. Однако обращение к планарным и двойственным им графам существенно упрощает решение данной задачи.

Ключевые слова. Планарный граф, вероятность связности, двойственный граф, разрезы, циклы.

1 Введение

Задача вычисления вероятности связности графа с ненадежными ребрами рассматривалась во многих работах по теории надежности [1 - 4] и др. Она возникает при изучении электротехнических объектов, компьютерных сетей и других технических систем [5, 6]. Эта задача имеет многочисленные приложения к исследованию сотовых структур и наносистем (нанотрубок, фуллеренов, графенов и т.д.) [7 - 9].

В [10] построены верхние и нижние оценки вероятности связности (полинома надежности) для сетей общего вида на основе использования максимальных систем попарно непересекающихся разрезов. При относительно небольшом числе ребер в графе (с независимыми ребрами) в [11] приведены ускоренные алгоритмы вычисления коэффициентов полинома надежности, показавшие хорошие результаты в сравнении с Maple 11. В [12] к решению данной задачи был применен метод Монте-Карло в сочетании со специфическими комбинаторными формулами. Особое внимание исследователями уделялось вероятности связности прямоугольных решеток, для вычисления которых применялся метод трансфер матриц [13].

Однако при увеличении числа ребер в графе задача существенно усложняется и появляется необходимость в разработке асимптотических методов вычисления. В настоящей работе выводится аналог известной асимптотической формулы Буртина-Питтеля для вероятности несвязности графа общего вида с высоконадежными ребрами [14], параметрами которой являются минимальное число ребер D в разрезах графа и

число C разрезов с D ребрами. Определение константы D в случае двухполюсника с единичной пропускной способностью ребер сводится [15] к вычислению максимального потока и имеет кубическую сложность по числу ребер графа. В свою очередь, вычисление константы C для графа общего вида имеет геометрическую вычислительную сложность.

В настоящей работе параметры D , C вычисляются для планарных графов (в том числе для плоских графов, составленных из правильных многоугольников, являющихся плитками паркета [18]) и их обобщений. Решение этой задачи сводится к перечислению циклов минимальной длины в двойственном графе [16], что является более простой в вычислительном смысле задачей. Общие методы перечисления таких циклов изложены в [17].

2 Обобщение формулы Буртина-Питтеля

Рассмотрим неориентированный связный граф G с конечными множеством вершин U и множеством ребер W . Считаем, что каждая пара вершин графа G может соединяться не более чем одним ребром и в графе нет петель. Обозначим $\mathcal{L}(u, v)$ множество всех разрезов графа G , разделяющих вершины $u, v \in U$, $u \neq v$, и определим множество $\mathcal{L} = \bigcup_{u \neq v} \mathcal{L}(u, v)$ всех разрезов графа.

Разрезом графа называется некоторое подмножество ребер, при удалении которых граф перестает быть связным. Положим $d(L)$ число ребер в разрезе L и определим

$$D(u, v) = \min(d(L) : L \in \mathcal{L}(u, v)), \quad D = \min_{u \neq v} D(u, v),$$

$$\mathcal{L}_* = \{L \in \mathcal{L} : d(L) = D\},$$

C - число разрезов из множества \mathcal{L}_* . Пусть ребра графа G работают независимо с вероятностями $p(w)$, $w \in W$.

Теорема 1. Если $\bar{p}(w) = 1 - p(w) = h$, $w \in W$, то для вероятности несвязности \bar{P} графа G выполняется соотношение

$$\bar{P} \sim Ch^D, \quad h \rightarrow 0.$$

Доказательство. Пусть V_L случайное событие, состоящее в отказе всех ребер разреза L , тогда при $h \rightarrow 0$

$$\bar{P} = P\left(\left(\bigcup_{L \in \mathcal{L}} V_L\right) \cup \left(\bigcup_{L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_*} V_L\right)\right) \sim P\left(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_*} V_L\right).$$

Так как $P(V_L) = o(h^D)$, $h \rightarrow 0, L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_*$, то

$$P\left(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_*} V_L\right) \sim Ch^D, h \rightarrow 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если $\bar{p}(w) \sim c_w h$, $h \rightarrow 0, w \in W$, тогда

$$\bar{P} \sim \sum_{L \in \mathcal{L}_*} h^D \prod_{w \in L} c_w, h \rightarrow 0.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Теоремы 1, 2 являются обобщениями известной асимптотической формулы Буртина-Питтеля [14].

3 Принцип двойственности в перечислении разрезов с минимальным числом ребер

Обозначим W_0 множество ребер графа G , каждое из которых не входит ни в один цикл графа. **Теорема 3.** *Множество ребер W_0 графа G совпадает с множеством разрезов \mathcal{L}_* с $D=1$.*

Доказательство. Если в графе G нет вершин степени один (число ребер, в которых она содержится), то нетрудно методом математической индукции доказать, что $W_0 = \emptyset$. Если множество вершин степени один непусто, то можно вершину вместе с присоединенным к ней единственным ребром удалить и повторить данную процедуру до тех пор, пока не будут удалены вершины степени один с соответствующими ребрами. Нетрудно убедиться, что удаляемые ребра являются разрезами в графе G . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь частный случай. Предположим, что граф G является планарным и каждое ребро в нем принадлежит какому-либо простому циклу. Ребра разбивают плоскость на грани [16, гл. 1]. Сопоставим графу G двойственный граф G^* . Каждой грани z графа G соответствует вершина z^* графа G^* , каждому ребру w графа G , принадлежащему граням z_1, z_2 , соответствует ребро w^* , соединяющее вершины z_1^*, z_2^* графа G^* .

Набору ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$ в графе G можно однозначно сопоставить подграф R^* в графе G^* . Для этого каждому ребру $w_i, 1 \leq i \leq d$, сопоставим пару граней, которым это ребро принадлежит. Тогда этой паре граней соответствует пара вершин в подграфе R^* , соединенных ребром w^* . Скажем, что подграф R^* порождается набором ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$.

Теорема 4. 1. *Если набор ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$ графа G порождает ациклический подграф в графе G^* , то этот набор не является разрезом в G .*

2. *Если набор ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$ графа G порождает простой цикл в графе G^* , то этот набор является разрезом в G .*

Доказательство. 1. Пусть набор ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$ графа G порождает ациклический подграф R^* в графе G^* . Докажем, что каждое ребро этого набора можно обойти в графе G путем, не содержащим ребер из этого набора.

Подграф R^* является совокупностью несвязных между собой деревьев S_1^*, \dots, S_m^* (лесом в терминологии теории графов). Расположим каждое дерево $S_i^*, 1 \leq i \leq m$, на плоскости так, чтобы в любом его узле ребра, связанные с этим узлом, располагались так, как ребра, их прообразы, располагаются на грани z при ее обходе против часовой стрелки. Сопоставим каждому графу $S_i^*, 1 \leq i \leq m$, путь, обходящий все его ребра по одному разу с обеих сторон (рис. 1).

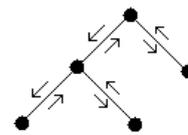


Рис. 1. Обход ребер в дереве.

Сопоставим пути Γ_i^* , дважды обходящим ребра дерева S_i^* , замкнутый путь Γ_i , проходящий в графе G через все вершины ребер той части набора $\{w_1, \dots, w_d\}$, которая порождает дерево S_i^* (рис. 2). По построению путь Γ_i не имеет общих ребер с набором $\{w_1, \dots, w_d\}$. Таким образом, каждое ребро набора $\{w_1, \dots, w_d\}$ можно обойти в графе G путем, не содержащим ребер этого набора.

Отсюда следует, что набор ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$ графа G , который не порождает цикл в графе G^* , не принадлежит множеству разрезов \mathcal{L} .

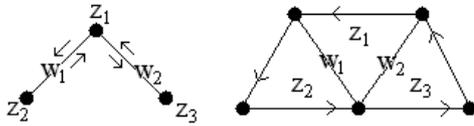


Рис. 2: Обход ребер в дереве и в двойственном ему графе.

2. Пусть простой цикл в графе G^* , порожденный набором ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$ графа G , состоит из граней z_1, \dots, z_d таких, что грани z_1, z_2 имеют общее ребро w_1 , грани z_2, z_3 имеют общее ребро w_2, \dots , грани z_d, z_1 имеют общее ребро w_d . Обозначим x_i середину ребра w_i . Очевидно, что точки x_i, x_{i+1} , принадлежащие границе грани z_{i+1} можно соединить ломаной без самопересечений, целиком содержащейся в грани z_{i+1} , такой, что ее начальное и конечное звено перпендикулярно ребрам w_i, w_{i+1} в точках x_i, x_{i+1} , соответственно, $1 \leq i \leq d-1$. Аналогично точки x_d, x_1 можно соединить ломаной без самопересечений, целиком содержащейся в грани z_1 , такой, что ее начальное и конечное звено перпендикулярно ребрам w_d, w_1 в точках x_d, x_1 , соответственно. Объединение построенных ломаных образует замкнутую без самопересечений ломаную γ в силу того, что любые две грани не имеют общих внутренних точек. Из теоремы Жордана [16, теорема 1.2] следует, что удаление замкнутой ломаной γ разделяет плоскость на две открытые компоненты связности Γ_1, Γ_2 .

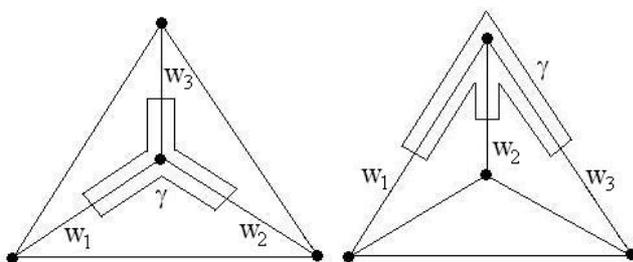


Рис. 3: Ломаная γ , разделяющая плоскость на две открытые компоненты связности.

В любой окрестности точки ломаной γ содержатся как точки, принадлежащие Γ_1 , так и точки, принадлежащие Γ_2 . Тогда у каждого ребра набора $\{w_1, \dots, w_d\}$ одна из его вершин принадлежит области Γ_1 , а другая - области Γ_2 . Следовательно, любые две вершины графа, принадлежащие различным компонентам связности, могут быть соединены в графе G только путем, содержащим одно из ребер набора $\{w_1, \dots, w_d\}$. Поэтому удаление из графа G ребер набора $\{w_1, \dots, w_d\}$ делает его несвязным и значит этот набор является разрезом графа G . Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 4 является следствием теоремы Уитни [16, теорема 1.5], [19]. Однако в настоящем изложении эта теорема допускает некоторые обобщения на непланарные графы.

Выделим вершину u в планарном графе G . Грани, которым принадлежат ребра, содержащие вершину u , образуют цикл в графе G^* . Множество циклов, порождаемых наборами ребер в графе G , непусто. Обозначим D^* минимальную длину циклов в графе G^* , порожденных наборами ребер из графа G .

Следствие 1. Справедливо равенство $D = D^*$, причем множество разрезов \mathcal{L}_* состоит из всех наборов ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$, которые порождают циклы в двойственном графе G^* .

Пример 1. На рис. 4 приведены примеры планарных графов с изображением элементов множества их разрезов \mathcal{L}_* :

- 1) целочисленный прямоугольник (\mathcal{L}_* состоит из пар ребер, соединенных с угловыми вершинами),
- 2) сотовая структура (\mathcal{L}_* состоит из всевозможных пар ребер, принадлежащих одновременно внешней грани и внутренней грани),
- 3) трубка, образованная склеиванием одной пары противоположных сторон целочисленного прямоугольника (\mathcal{L}_* состоит из троек ребер, имеющих одну общую торцевую вершину).

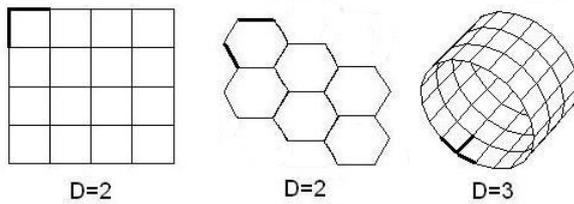


Рис. 4: Планарные графы с выделенными жирным шрифтом разрезами.

Рассмотрим некоторые обобщения планарного графа. Известно, что граф, ребрами которого являются ребра выпуклого многогранника в трехмерном пространстве является планарным [16, глава 1, §1, пункт 1.2]. Построим связный граф G' из нескольких выпуклых многогранников в трехмерном пространстве так, что любые два многогранника или не пересекаются, или накладываются вершиной, ребром, гранью. По определению каждое ребро графа G' принадлежит не менее чем двум граням. Скажем, что набор ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$ порождает двойственный этому набору граф, если каждому ребру этого набора сопоставляется некоторая пара граней графа G' (необязательно единственным способом). Обозначим \mathcal{L}' множество наборов, порождающих двойственные циклы минимальной длины D^* и являющихся разрезами в графе G' .

Теорема 5. Если множество \mathcal{L}' непусто, то для графа G' справедливы равенства $D = D^*$, $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}'$.

Доказательство. Любой ациклический граф, двойственный набору ребер $\{w_1, \dots, w_d\}$, не является разрезом. Доказательство данного утверждения дословно повторяет доказательство пункта 1 теоремы 4. В свою очередь, набор ребер $\{w_1, \dots, w_d\} \in \mathcal{L}'$ является разрезом по определению. Теорема доказана.

Замечание 1. В графах, удовлетворяющих условиям одной из теорем 4, 5, если ребра набора $\{w_1, \dots, w_d\}$, порождающего цикл минимальной длины, имеют общую вершину, то этот набор является разрезом.

Пример 2. На рис. 5 приведены примеры графов G' с изображением элементов множества их разрезов \mathcal{L}_* :

1) граф, образованный из целочисленного прямоугольника склеиванием обеих пар противоположных сторон (\mathcal{L}_* состоит из четверок ребер, имеющих общую вершину),

2) граф, составленный из кубов с единичной длиной ребер и целочисленными координатами вершин (\mathcal{L}_* состоит из троек ребер, содержащих вершину куба).

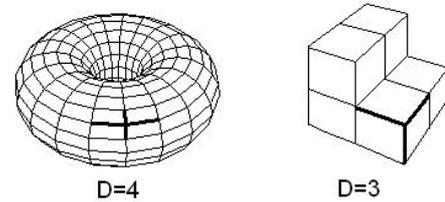


Рис. 5: Графы G' с выделенными жирным шрифтом разрезами.

4 Численные эксперименты

Вычислим вероятность несвязности сотовой структуры (рис. 4, в центре) с помощью теоремы 1 и следствия 1, а также методом Монте-Карло с числом реализаций 10^6 . Результаты представлены в таблице 1. Вероятность работоспособности отдельно взятого ребра во всех экспериментах составляет 0.005.

Размер структуры	Асимптотический метод	Метод Монте-Карло	Относительная погрешность
2×2	0.00045	0.000439	2.4 %
3×3	0.00055	0.000526	4.3 %
3×4	0.00060	0.000579	3.5 %
3×5	0.00065	0.000621	4.5 %
4×4	0.00065	0.000619	4.8 %
5×5	0.00075	0.000732	2.4 %

Таблица 1: Результаты вычислений.

Время счета предложенным в работе асимптотическим методом составляет несколько секунд, методом Монте-Карло исчисляется в часах [20].

Литература

[1] R. E. Barlow, F. Proschan. Mathematical Theory of Reliability. London and New York, Wiley, 1965.
 [2] И. А. Ушаков и др. Надежность технических систем. Справочник. Москва, Радио и связь, 1985.

- [3] И. А. Рябинин. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. Санкт-Петербург, Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007.
- [4] Е. Д. Соложенцев. Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и экономике. Санкт-Петербург, Изд. дом «Бизнес-пресса», 2006.
- [5] A. Satyanarayana, R. K. Wood. A linear time algorithm for computing k-terminal reliability in series-parallel networks. SIAM, J. Computing, 14: 818-832, 1985.
- [6] M. O. Ball, C. J. Colbourn, J. S. Provan. Network Reliability. Network Models. Handbook of Operations Research and Management Science, 7: 673-762, 1995.
- [7] Н. Кобаяси. Введение в нанотехнологию. Москва, БИНОМ, 2008.
- [8] Е. А. Беленков, В. В. Ивановская. Ноноалмазы и родственные углеродные нономатериалы. Екатеринбург, УрО РАН, 2008.
- [9] П. Н. Дьячков. Углеродные нанотрубки: строение, свойства, применение. Москва, Бином, 2006.
- [10] В. П. Полесский. Оценки вероятности связности случайного графа. Проблемы передачи информации, 26(1): 90-98, 1990.
- [11] O. K. Rodionova, A. S. Rodionov, H. Choo. Network Probabilistic Connectivity Exact Calculation with Use of Chains. Springer LNCS, 3046: 315-324, 2004.
- [12] I. Gertsbakh, Y. Shpungin. Models of Network Reliability. Analysis, Combinatorics and Monte-Carlo. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2010.
- [13] C. Tanguy. What is the probability of connecting two points? J. Phys. A: Math. Theor., 40: 14099-14116, 2007.
- [14] Ю. Буртин, Б. Питтель. Асимптотические оценки надежности сложных систем. Техническая кибернетика, 10(3): 90-96, 1972.
- [15] Л. Форд, Д. Фалкерсон. Потоки в сетях. Москва, Мир, 1966.
- [16] В. В. Прасолов. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. Москва, МЦНМО, 2004.
- [17] Ф. Харари. Теория графов. Москва, Мир. 1973.
- [18] А.Н. Колмогоров. Паркетты из правильных многоугольников. Квант, 3. 1970 г.
- [19] Whitney H. Nonseparable and planar graphs. Transactions of American Mathematical Society, 34: 339-362, 1932.
- [20] А. С. Лосев. Электронный информационный образовательный ресурс: <Приближенное вычисление несвязности гексагональных структур >. Хроники объединенного фонда электронных ресурсов <Наука и образование>, № 11, 2011.

Влияние фотофоретического взаимодействия на тепловую коагуляцию аэрозолей

Черемисин Александр Алексеевич

Сибирский федеральный университет
Красноярск
aacheremisin@gmail.com

Кушнаренко Андрей Викторович

Сибирский федеральный университет
Красноярск
avkushnarenko@gmail.com

Аннотация. Компьютерный эксперимент, выполненный по алгоритму на основе метода Монте-Карло и приближения свободномолекулярного режима, позволил выявить возникновение нового типа взаимодействия аэрозольных частиц, хорошо поглощающих солнечное излучение. Это взаимодействие имеет газокинетическую природу и, при определённых условиях, оказывается столь сильным, что способно существенно повлиять на процесс тепловой коагуляции аэрозольных частиц.

Ключевые слова. Метод Монте-Карло, аэрозоль, коагуляция, взаимодействие аэрозольных частиц, фотофорез, газокинетические явления.

1 Введение

Одним из наиболее важных процессов, которые происходят в аэрозольных системах, является коагуляция аэрозольных частиц [7]. Находясь в газе или жидкости и испытывая броуновское движение, частицы сталкиваются друг с другом, и в результате адгезии способны образовывать агломераты, состоящие из большого числа изначально отдельных частиц. Зачастую эти агломераты обладают свойствами фракталов [14].

Основные представления о процессе обычной тепловой коагуляции заложены достаточно давно. Они базируются на положениях о броуновском движении и диффузии аэрозольных частиц. Одним из важнейших аспектов, которые учитываются в описании тепловой коагуляции, является наличие между частицами сил взаимодействия. Обычно это силы электростатического взаимодействия, возникающие из-за приобретения частицами заряда, и силы Ван-дер-Ваальса. Электростатическое взаимодействие способно существенно повлиять на коагуляцию аэрозолей ввиду его дальнего действия, а силы Ван-дер-Ваальса обычно учитывают, когда расстояние между частицами очень мало.

Однако, в последнее время стали появляться работы, посвящённые изучению влияния на коагуляцию взаимодействий частиц совершенного иного происхождения - газокинетического. Известно, что термофорез [2, 8], одно из явлений относящихся к типу газокинетических, приводит к взаимодействию [12, 15] аэрозольных частиц, которое убывает с расстояни-

ем r_{12} между ними как $1/r_{12}^7$. Термофорез Ч это направленное движение аэрозольных частиц, возникающее при наличии градиентов температурных полей в газовой среде. В работе [11] исследовано влияние термофоретического взаимодействия на коагуляцию частиц. При градиенте порядка 10 К/см влияние на коагуляцию оказывается существенным.

Между тем, хорошо известно ещё одно явление газокинетического типа - фотофорез [6, 13, 9, 18, 16, 17], которое способно привести аэрозольные частицы в направленное движение, притом достаточно сильное [10, 4, 5]. Фотофорез возникает в результате поглощения частицами электромагнитного излучения (солнечного света, лазерного излучения, ИК источников и др.), которое приводит к неравномерному разогреву поверхности частицы и, как следствие, к нескомпенсированности импульса, передаваемого молекулами окружающего газа, поскольку после соударения с поверхностью частицы, молекулы покидают её с большей скоростью там, где поверхность разогрета сильнее (ΔT фотофорез). В сочетании с неравномерностью процесса аккомодации энергии молекулы на поверхности частицы эффект может усиливаться.

Нарушение равномерности передаваемого молекулами газа импульса частицам может возникнуть даже в случае предположения, что температура поверхности частицы одинакова во всех её точках и процесс аккомодации на поверхности частиц также происходит равномерно. Для этого достаточно рассмотреть две такие одинаковые частицы расположенные недалеко друг от друга. Некоторые молекулы, столкнувшись с поверхностью одной из частиц и приняв от неё дополнительную энергию, затем могут достигнуть поверхности другой частицы и передать ей избыточный импульс и энергию. В результате на те части поверхностей частиц, которые обращены друг к другу, начинает действовать избыточное давление и возникают силы, отталкивающие частицы друг от друга.

Мы провели компьютерный эксперимент по алгоритму [3], целью которого было выяснение величины этих сил в зависимости от расстояния между частицами, их размера, условий освещения, температуры и давления окружающего газа, а также способности повлиять на константу тепловой коагуляции.

2 Фотофоретическое взаимодействие

Техника расчёта основана на газокинетических уравнениях Больцмана в свободномолекулярном режиме (когда свободный пробег молекулы много больше расстояния между частицами), которые решаются в приближении свободномолекулярного режима. Порядок задачи понижается за счёт специального разложения рядов Неймана по разделяющимся переменным скоростям и пространственным координатам молекул. Тогда можно использовать специальные матрицы переноса, сократить объёмы вычислений, повысить точность, простым образом получить зависимости физических величин от неизвестных температур частиц. Это позволяет решить нелинейную задачу теплового баланса существенно проще. Путём решения системы уравнений теплового баланса рассчитываются температуры частиц. Каждое уравнение (в общем случае для n аэрозольных частиц)

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k}(T_k - T_i) + \Phi_{abs,i}^V + \Phi_{abs,i}^{IR} - \Phi_{emi,i}^{IR} = 0 \quad (1)$$

включает в себя учёт потоков молекулярного теплообмена, поглощения видимого излучения $\Phi_{abs,i}^V$, поглощения частицей ИК излучения $\Phi_{abs,i}^{IR}$ и испускания ИК излучения самой частицей $\Phi_{emi,i}^{IR}$. Коэффициенты молекулярного переноса $\lambda_{i,k}$ получены в процессе статистического моделирования методом Монте-Карло. Расчёт силы производится по формуле

$$F_{1,\alpha}^{ph} = 2\pi R_0^2 (p/\sqrt{T_0}) \sum_{k=1}^n P_{i,k,\alpha}^F (\sqrt{T_k} - \sqrt{T_0}) \quad (2)$$

Здесь $\alpha = x, y, z$, а $P_{i,k,\alpha}^F$ обозначает элементы матрицы переноса импульса, а суммирование ведётся по всем частицам системы. Элементы этой матрицы не зависят от давления p и температуры газа T_0 и получены в результате статистического моделирования.

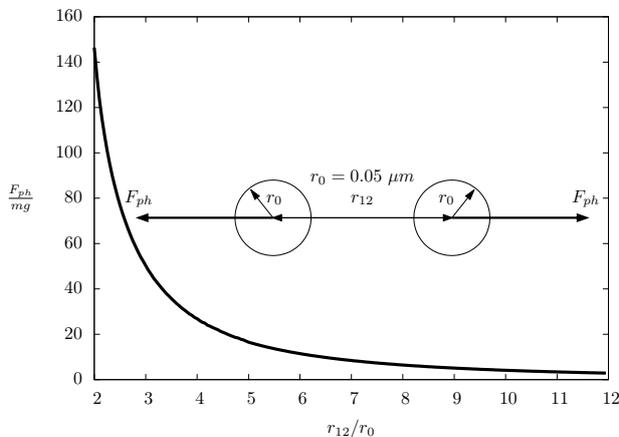


Рис. 1: Зависимость относительной силы фотофоретического взаимодействия от расстояния между центрами частиц.

На рисунок 1 демонстрирует два особо важных свойства фотофоретического взаимодействия. Первое свойство - это дальное действие, поскольку даже на расстояниях в несколько радиусов частицы сила фотофоретического взаимодействия остаётся существенно больше силы тяжести. Второе свойство - это характер поведения в зависимости от расстояния. Начиная с расстояния в $4r_0$ сила убывает с его увеличением обратно пропорционально квадрату расстояния:

$$F_{ph}(r_{12}) \approx \frac{C}{r_{12}^2} \quad (3)$$

Это даёт возможность провести аналогию с электростатическим взаимодействием.

3 Влияние на тепловую коагуляцию

Учёт электростатического взаимодействия в тепловой коагуляции - известная задача [1]. Для одноименно заряженных аэрозольных частиц одинакового размера. Выражение для константы коагуляции при учете электростатического отталкивания имеет вид

$$K = \beta K_0, \quad \beta = \frac{\lambda_{12}}{e^{\lambda_{12}} - 1} \quad (4)$$

где K_0 - константа коагуляции для одинаковых сферических частиц радиусом r без зарядов, β - поправочный коэффициент, где $\lambda_{12} = \frac{U}{kT}$, $U = q_1 q_2 / 2r$ - энергия электростатического взаимодействия частиц при их контакте друг с другом. Заменяем электростатическую энергию U на работу фотофоретической силы U_{ph} при сближении частиц, получим

$$\lambda_{12} = \frac{U_{ph}}{kT}, \quad U_{ph} = \int_{2r}^{\infty} F_{ph} ds \approx C/2r, \quad (5)$$

где C константа в выражении (3) для зависимости фотофоретических сил от расстояния.

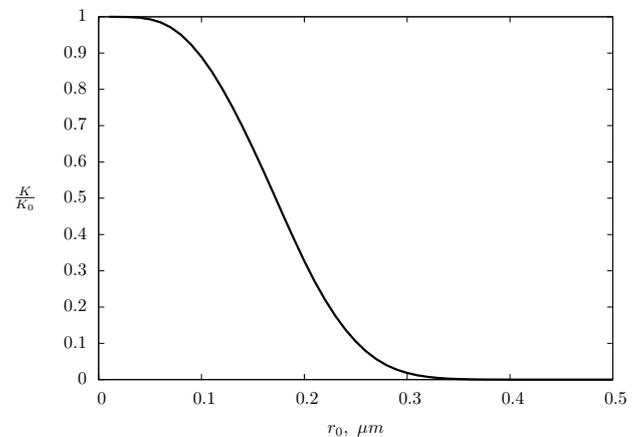


Рис. 2: Зависимость отношения констант коагуляции от размера частиц.

Рисунок 2 демонстрирует, что даже при постоянной интенсивности падающего видимого излучения равной солнечной константе $I = 1368 \text{ W/m}^2$ имеет место падение константы коагуляции с увеличением размера частиц. Примерно при $r_0 = 0.17 \text{ }\mu\text{m}$ константа коагуляции падает в двое.

Благодарности

Это исследование выполнено при поддержке грантов РФФИ 10-05-00907а (проект 2.1.1/ 6996) и РНП-19

Список литературы

- [1] Фукс Н.А. *Механика аэрозолей*. Изд-во Академии наук СССР, 1955.
- [2] S.P. Bakanov. Thermophoresis of aerosols: a review. *Journal of Aerosol Science*, 22, Supplement 1(0):S215 – S218, 1991.
- [3] A.A. Cheremisin. Transfer matrices and solution of the heat-mass transfer problem for aerosol clusters in a rarefied gas medium by the monte carlo method. *Russian Journal Numeric Analysis Mathematics*, 25:209–233, 2010.
- [4] A.A. Cheremisin, Yu.V. Vassilyev, and H. Horvath. Gravito-photophoresis and aerosol stratification in the atmosphere. *Journal of Aerosol Science*, 36(11):1277 – 1299, 2005.
- [5] Aleksander A. Cheremisin, Yu. V. Vassilyev, and A. V. Kushnarenko. Photophoretic forces for bispherical aerosol particles. volume 5027, pages 21–32. SPIE, 2003.
- [6] Vladimir Chernyak and Sergey Beresnev. Photophoresis of aerosol particles. *Journal of Aerosol Science*, 24(7):857 – 866, 1993.
- [7] N.A. Fuchs. On the brownian coagulation of aerosols. *Journal of Colloid and Interface Science*, 73(1):248 – 249, 1980.
- [8] N.A. Fuchs. Thermophoresis of aerosol particles at small knudsen numbers: Theory and experiment. *Journal of Aerosol Science*, 13(4):327 – 330, 1982.
- [9] G.F.S. Photophoresis. *Journal of the Franklin Institute*, 202(3):407 – 408, 1926.
- [10] Hans and Rohatschek. Levitation of stratospheric and mesospheric aerosols by gravito-photophoresis. *Journal of Aerosol Science*, 27(3):467 – 475, 1996. Atmospheric Aerosols.
- [11] Haesung Jung, Sun Young Lee, and Jung Hyeun Kim. Numerical analysis for the thermophoretic coagulation of monodisperse particles at continuum regime. *Journal of Colloid and Interface Science*, 349(1):438 – 441, 2010.
- [12] Huan J. Keh and Shih H. Chen. Particle interactions in thermophoresis. *Chemical Engineering Science*, 50(21):3395 – 3407, 1995.
- [13] S.P. Lin. On photophoresis. *Journal of Colloid and Interface Science*, 51(1):66 – 71, 1975.
- [14] M.Matti Maricq. Coagulation dynamics of fractal-like soot aggregates. *Journal of Aerosol Science*, 38(2):141 – 156, 2007.
- [15] L.D. Reed and F.A. Morrison Jr. Particle interactions in low knudsen number thermophoresis. *Journal of Aerosol Science*, 6(5):349 – 365, 1975.
- [16] Hans Rohatschek. Direction, magnitude and causes of photophoretic forces. *Journal of Aerosol Science*, 16(1):29 – 42, 1985.
- [17] Hans Rohatschek. Semi-empirical model of photophoretic forces for the entire range of pressures. *Journal of Aerosol Science*, 26(5):717 – 734, 1995.
- [18] Walter Zulehner and Hans Rohatschek. Representation and calculation of photophoretic forces and torques. *Journal of Aerosol Science*, 26(2):201 – 210, 1995.

О законе распределения стьюдентизированного отклонения выброса от среднего в нормально распределенной выборке

Людмила Константиновна Ширяева

Самарский государственный экономический университет
Кафедра математической статистики и эконометрики
Самара
Shiryeva_LK@mail.ru

Аннотация. Найдено новое представление для закона распределения стьюдентизированного отклонения выброса от среднего в нормально распределенной выборке, основанное на использовании функции Эрмита с отрицательным целым значением. Это представление может быть применено для вычисления мер мощности критерия Граббса.

Ключевые слова. Выброс, критерий Граббса проверки на один выброс, функция Эрмита, меры мощности Дэвида для критерия Граббса, нормальный закон распределения.

1 Введение

Обработку статистических данных часто приходится сопровождать анализом резко выделяющихся результатов измерений (выбросов). Если не проверять значимость отличий "подозрительных" наблюдений в выборке от остальных, то оценки параметров распределения, получаемые по такой выборке, могут быть статистически ненадежными. Наиболее часто для проверки на аномальность одного резко выделяющегося справа наблюдения применяют статистический критерий Граббса.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ — случайная выборка из n значений нормально распределенной случайной величины X ; $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n-1)} \leq X_{(n)}$ — построенный по ней упорядоченный вариационный ряд; $X_{(j)}$ — j -ая порядковая статистика ($j = \overline{1, n}$).

Проверяемая нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что наблюдения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ являются независимыми случайными величинами с нормальным распределением $N(a, \sigma^2)$. В качестве конкурирующей гипотезы H_1 рассмотрим случай, когда какие-либо $(n - 1)$ из n наблюдений имеют одинаковое $N(a, \sigma^2)$ распределение, а одно из них — выброс X_{out} — имеет распределение $N(a + \lambda\sigma, \nu\sigma^2)$. Параметр сдвига $\lambda \geq 0$ характеризует среднее (ожидаемое) смещение выброса вправо, а параметр масштаба $\nu > 0$ определяет изменение дисперсии выброса относительно остальных наблюдений, причем в случае $\lambda = 0$ предполагается, что $\nu \neq 1$. Гипотеза H_1 является правдоподобным приближением к действительности, в случае, когда вероятность "засорения" выборки аномальными наблюдениями весьма мала [3].

Статистика критерия Граббса для проверки на один верхний выброс имеет вид [5]:

$$G_n = (X_{(n)} - \bar{X}) / S, \quad (1)$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ и $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Гипотеза H_0 отвергается, если наблюдаемое значение статистики Граббса превысит критическое:

$$G_n > G_{n;\alpha}^{cr},$$

где $G_{n;\alpha}^{cr}$ — критическое значение статистики G_n , отвечающее уровню значимости α .

Критерий Граббса был предложен в работе [5] около шестидесяти лет назад, однако его мощностные свойства еще мало исследованы. Существует подход Г. Дэвида, согласно которому в качестве показателей качества критериев для аномальных наблюдений следует использовать некоторые "естественные" меры мощности этих критериев [3]. Для случая одного выброса в выборке имеем следующие меры мощности Дэвида для статистики Граббса:

$$P_1 = P(G_n > G_{n;\alpha}^{cr} | H_1),$$

$$P_2 = P((X_{out} - \bar{X}) / S > G_{n;\alpha}^{cr} | H_1),$$

$$P_3 = P(\{G_n > G_{n;\alpha}^{cr}\} \cap \{X_{(n)} = X_{out}\} | H_1),$$

$$P_4 = P\left(\left\{\frac{X_{out} - \bar{X}}{S} > G_{n;\alpha}^{cr}\right\} \cap \left\{\frac{X_{(n-1)} - \bar{X}}{S} < G_{n;\alpha}^{cr}\right\}\right),$$

$$P_5 = P(\{G_n > G_{n;\alpha}^{cr}\} | H_1 \cap \{X_{(n)} = X_{out}\}).$$

Как отмечено в работе [3], мера мощности P_1 является, по сути, "классической" функцией мощности критерия Граббса, ибо она равна вероятности не допустить ошибку второго рода. Мера P_1 задает вероятность получения значимых значений статистики (1) независимо от того, является ли экстремальное наблюдение $X_{(n)}$ выбросом или нет. Поэтому мера P_1 особенно подходит для задачи выявления выбросов с аномальными наблюдениями. Меры P_2 – P_5 могут быть использованы для обнаружения выброса в выборке. Мера P_2 задает вероятность того, что значение стьюдентизированного отклонения выброса от среднего попадет в критическую область, независимо от того, является ли выброс максимальным наблюдением

в выборке или нет. Мера мощности P_3 задает вероятность того, что выброс является максимальным в выборке, а вычисленное по нему значение статистики G_n будет значимым. Мера мощности P_4 задает вероятность того, что только выброс дает значимое значение статистики Граббса, в то время как для остальных наблюдений такая возможность исключена. Мера P_5 дает условную вероятность того, что значение статистики Граббса является значимым при условии, что именно выброс оказался максимальным в выборке. Заметим также, что вероятность выявления выборки с аномальным наблюдением не совпадает с вероятностью обнаружения выброса, так как [3]:

$$P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_4.$$

В работе [4] были найдены рекурсивные соотношения для вычисления мер мощности Дэйвида критерия Граббса в случае, когда в нормально распределенной выборке имеется один выброс. Для их использования следует знать закон распределения случайной величины

$$\tilde{T}_n = \frac{X_{out} - \bar{X}}{S}. \tag{2}$$

Случайная величина \tilde{T}_n является студентизированным отклонением выброса X_{out} от среднего по выборке. В работе [4] была доказана следующая теорема о законе ее распределения.

Теорема 1. Пусть наблюдения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_{out}$ являются независимыми случайными величинами, причем X_1, X_2, \dots, X_{n-1} имеют нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$, а выброс X_{out} имеет нормальный закон распределения $N(a + \lambda\sigma, \nu\sigma^2)$, где $\lambda \geq 0$ и $\nu > 0$. Тогда для $n \geq 3$ плотность распределения вероятностей случайной величины \tilde{T}_n имеет вид:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \begin{cases} K_n \left[\frac{(n-1)^2}{n} - t^2 \right]^{\frac{n-4}{2}} I_n(t), & |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}} \\ 0, & |t| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}} \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\eta = \frac{1 + \nu(n-1)}{n}; \tag{4}$$

$$\mu = \lambda \sqrt{\frac{n-1}{n\eta}} \tag{5}$$

$$q = \eta \frac{(n-1)^2}{n} + (1-\eta)t^2 \tag{6}$$

$$K_n = \frac{(n-1)^2}{n\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n-2}{2})} \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{\mu^2}{2}};$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi;$$

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int_0^{+\infty} y^{\frac{n-3}{2}} e^{t\mu\sqrt{y}-0,5qy} dy \\ &= e^{\frac{t^2\mu^2}{2q}} 2^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{1-n}{2}} \sum_{j=0}^{n-2} \delta_j C_{n-2}^j \left(\frac{t\mu}{\sqrt{2q}}\right)^{n-2-j}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\delta_0 = \sqrt{\pi} \left(0, 5 + \Phi\left(\frac{t\mu}{\sqrt{q}}\right)\right); \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi;$$

$$\delta_1 = 0, 5e^{-\frac{t^2\mu^2}{2q}};$$

$$\delta_j = 0, 5e^{-\frac{t^2\mu^2}{2q}} \left(-\frac{t\mu}{\sqrt{2q}}\right)^{j-1} + \frac{j-1}{2}\delta_{j-2}, \quad j \geq 2.$$

В данной работе найдено новое представление для плотности распределения вероятностей случайной величины \tilde{T}_n через специальную функцию Эрмита и показано, что это представление совпадает с формулой (3).

2 Вывод основных соотношений для плотности вероятностей случайной величины \tilde{T}_n

Для того, чтобы вывести новое представление для плотности распределения вероятностей случайной величины (2), докажем две вспомогательные теоремы.

Теорема 2. Пусть величины W и Z являются независимыми случайными величинами, причем случайная величина W имеет $\chi^2(n-1)$ распределение, а случайная величина Z имеет нормальное $N(\mu, 1)$ распределение. Тогда $\forall t \in \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$ случайная величина

$$V_n(t) = \beta_n(t)\sqrt{W} - Z$$

имеет плотность распределения вероятностей

$$f_{V_n(t)}(v) = \int_0^\infty f_{\chi_{n-1}^2}(x) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{x} - v) dx, \tag{8}$$

где

$$\beta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\eta}} \frac{t}{\sqrt{(n-1)^2 - nt^2}}, \quad |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}; \tag{9}$$

параметры η и μ вычисляются по формулам (4) и (5); $f_{\chi_{n-1}^2}(x), f_Z(x)$ — плотности распределения вероятностей случайных величин W и Z соответственно;

$$f_{\chi_{n-1}^2}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{10}$$

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}; \tag{11}$$

Доказательство. Найдем для $\forall t \in \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$ интегральную функцию распределения случайной величины

$$V_n(t) = \beta_n(t)\sqrt{W} - Z.$$

Имеем, согласно определению:

$$F_{V_n(t)}(v) = P(V_n(t) < v) = P(\beta_n(t)\sqrt{W} - Z < v);$$

$$F_{V_n(t)}(v) = P(\{Z > \beta_n(t)\sqrt{W} - v\} \cap \{0 < W < \infty\}).$$

Согласно условию случайные величины W и Z являются независимыми случайными величинами, следовательно,

$$F_{V_n(t)}(v) = \int_0^\infty f_{\chi_{n-1}^2}(x) dx \int_{\beta_n(t)\sqrt{x-v}}^\infty f_Z(z) dz,$$

где плотность распределения вероятностей $f_{\chi_{n-1}^2}(x)$ случайной величины W вычисляется по формуле (10), плотность вероятностей $f_Z(x)$ случайной величины Z — по формуле (11).

Тогда плотность распределения вероятностей случайной величины $V_n(t)$ для $\forall t \in \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$ равна:

$$f_{V_n(t)}(v) = \frac{dF_{V_n(t)}(v)}{dv};$$

$$f_{V_n(t)}(v) = \int_0^\infty f_{\chi_{n-1}^2}(x) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{x-v}) dx,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Пусть величины W и Z являются независимыми случайными величинами, причем случайная величина W имеет $\chi^2(n-1)$ распределение, а случайная величина Z имеет нормальное $N(\mu, 1)$ распределение. Тогда для $\forall t \in \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$ плотность распределения вероятностей случайной величины

$$V_n(t) = \beta_n(t)\sqrt{W} - Z$$

в точке $v = 0$ может быть вычислена следующим образом:

$$f_{V_n(t)}(0) = A_n [(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{n-1}{2}} H_{-n+1} \left(\frac{-t\mu}{\sqrt{2q}} \right) \quad (12)$$

где функция $\beta_n(t)$ вычисляется по формуле (9);

$$A_n = 2 \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} f_Z(0) \left(\frac{\eta}{nq} \right)^{\frac{n-1}{2}};$$

параметры η и μ вычисляются по формулам (4) и (5); q вычисляется согласно формуле (6);

$$f_Z(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2}};$$

функция Эрмита с отрицательным целым значком

$$H_k(z) = \frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^\infty e^{-\xi^2 - 2z\xi} \xi^{-k-1} d\xi, \quad k < 0. \quad (13)$$

Доказательство. Найдем для $\forall t \in \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$ значение функции $f_{V_n(t)}(v)$ в точке $v = 0$. Имеем, согласно (8):

$$f_{V_n(t)}(0) = \int_0^\infty f_{\chi_{n-1}^2}(x) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{x}) dx. \quad (14)$$

Сделаем под знаком интеграла в (14) замену переменных: $\xi = \sqrt{\frac{1+\beta_n^2(t)}{2}}\sqrt{x}$, получим:

$$f_{V_n(t)}(0) = \int_0^\infty f_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{2\xi^2}{1+\beta_n^2(t)} \right) \times f_Z \left(\beta_n(t) \sqrt{\frac{2}{1+\beta_n^2(t)}} \xi \right) \frac{4\xi}{1+\beta_n^2(t)} d\xi.$$

Легко проверить, что

$$f_{V_n(t)}(0) = \frac{2f_Z(0)}{(1+\beta_n^2(t))^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \times \int_0^\infty e^{-\xi^2 - 2\left(\frac{\beta_n(t)\mu}{\sqrt{2(1+\beta_n^2(t))}}\right)\xi} \xi^{n-2} d\xi = \frac{2f_Z(0)\Gamma(n-1)}{(1+\beta_n^2(t))^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \times H_{-n+1} \left(-\frac{\beta_n(t)\mu}{\sqrt{2(1+\beta_n^2(t))}} \right),$$

где $f_Z(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2}}$;

$H_k(z) = \frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^\infty e^{-\xi^2 - 2z\xi} \xi^{-k-1} d\xi, \quad k < 0$ — функция Эрмита с отрицательным целым значком [2].

Легко убедиться в справедливости равенств:

$$\frac{\beta_n(t)\mu}{\sqrt{2(1+\beta_n^2(t))}} = \frac{t\mu}{\sqrt{2q}};$$

$$\frac{1}{(\beta_n(t)+1)^{\frac{n-1}{2}}} = \left(\frac{\eta}{nq} \right)^{\frac{n-1}{2}} [(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Отсюда

$$f_{V_n(t)}(0) = \frac{2f_Z(0)\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{\eta}{nq} \right)^{\frac{n-1}{2}} \times [(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{n-1}{2}} H_{-n+1} \left(\frac{-t\mu}{\sqrt{2q}} \right).$$

Обозначим

$$A_n = 2 \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} f_Z(0) \left(\frac{\eta}{nq} \right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

С учетом этого обозначения получим

$$f_{V_n(t)}(0) = \int_0^\infty f_{\chi_{n-1}^2}(x) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{x}) dx = A_n [(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{n-1}{2}} H_{-n+1} \left(\frac{-t\mu}{\sqrt{2q}} \right),$$

что и требовалось доказать.

Используя соотношения (8), (12), можно найти новое представление для плотности вероятностей случайной величины \tilde{T}_n . Для этого докажем теорему:

Теорема 4. Пусть наблюдения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_{out}$ являются независимыми случайными величинами, причем X_1, X_2, \dots, X_{n-1} имеют нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$, а выброс X_{out} имеет нормальный закон распределения $N(a + \lambda\sigma, \nu\sigma^2)$, где $\lambda \geq 0$ и $\nu > 0$. Тогда для $n \geq 3$ плотность распределения вероятностей случайной величины \tilde{T}_n имеет вид:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \begin{cases} B_{\Gamma_n} \cdot \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot f_{V_n(t)}(0), & |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}} \\ 0, & |t| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}} \end{cases} \quad (15)$$

где $f_{V_n(t)}(v)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $V_n(t) = \beta_n(t)\sqrt{W} - Z$; случайная величина W имеет $\chi^2(n-1)$ распределение; случайная величина Z имеет нормальное $N(\mu, 1)$ распределение; случайные величины W и Z являются независимыми.
 $f_{V_n(t)}(0)$ вычисляется согласно (12); функция $\beta_n(t)$ вычисляется согласно (9); параметры η и μ вычисляются согласно (4) и (5)
 $B_{\Gamma_n} = \sqrt{\frac{2n}{\eta}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $n \geq 3$. Нетрудно проверить, что справедливы следующие равенства:

$$X_{out} - \bar{X} = \frac{n-1}{n} (X_{out} - \bar{X}^*); \quad (16)$$

$$S^2 = \frac{n-2}{n-1} S^{*2} + \frac{(X_{out} - \bar{X}^*)^2}{n}, \quad (17)$$

где $\bar{X}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ и $S^{*2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X}^*)^2$ вычисляются по выборке объема $(n-1)$, не содержащей выброса.

С учетом (16) и (17) для случайной величины \tilde{T}_n получим:

$$\tilde{T}_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \frac{\text{sign}(X_{out} - \bar{X}^*)}{\sqrt{\frac{n(n-2)S^{*2}}{(n-1)(X_{out} - \bar{X}^*)^2} + 1}}. \quad (18)$$

Рассмотрим случайные величины

$$Y = (n-2)S^{*2}/\sigma^2, \quad Z = \sqrt{\frac{n-1}{n\eta}} (X_{out} - \bar{X}^*)/\sigma,$$

где параметр η вычисляется согласно (4).

Согласно теореме Фишера [1] случайная величина Y имеет распределение $\chi^2(n-2)$. Поскольку независимые случайные величины X_1, X_2, \dots, X_{n-1} имеют нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$, а выброс X_{out} имеет нормальный закон распределения $N(a + \lambda\sigma, \nu\sigma^2)$, то случайная величина Z имеет нормальное распределение $N(\mu, 1)$, где $\mu = \lambda\sqrt{\frac{n-1}{n\eta}}$. Далее

$$\frac{n(n-2)S^{*2}}{(n-1)(X_{out} - \bar{X}^*)^2} = \frac{n}{1 + \nu(n-1)} \cdot \frac{Y}{Z^2} = \eta^{-1} \frac{Y}{Z^2},$$

так что соотношение (18) примет вид

$$\tilde{T}_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \frac{\text{sign}(Z)}{\sqrt{1 + \eta^{-1}Y/Z^2}}. \quad (19)$$

Пусть $t \geq 0$. Найдем интегральную функцию распределения: $F_{\tilde{T}_n}(t) = P(\tilde{T}_n < t)$. С учетом (19) получаем:

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(\frac{\text{sign}(Z)}{\sqrt{1 + \eta^{-1}Y/Z^2}} < \frac{\sqrt{n}}{n-1}t\right).$$

Далее, действуя по теореме сложения вероятностей для несовместных событий, можно записать:

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left\{(Z \leq 0) \cap \left(\frac{\text{sign}(Z)}{\sqrt{1 + \eta^{-1}Y/Z^2}} < \frac{\sqrt{n}}{n-1}t\right)\right\} + P\left\{(Z > 0) \cap \left(\frac{\text{sign}(Z)}{\sqrt{1 + \eta^{-1}Y/Z^2}} < \frac{\sqrt{n}}{n-1}t\right)\right\} = P(Z \leq 0) + P\left\{(Z > 0) \cap \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \eta^{-1}Y/Z^2}} < \frac{\sqrt{n}}{n-1}t\right)\right\}.$$

Заметим, что случайная величина Z имеет нормальное $N(\mu; 1)$ распределение, поэтому:

$$P(Z \leq 0) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{0 - \mu}{1}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(\mu),$$

где $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа.

Следовательно,

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = \frac{1}{2} - \Phi(\mu) + P\left\{(Z > 0) \cap \left(Y > \eta\left(\frac{(n-1)^2}{nt^2} - 1\right)Z^2\right)\right\}. \quad (20)$$

В случае $t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}$ событие $\left\{Y > \eta\left(\frac{(n-1)^2}{nt^2} - 1\right)Z^2\right\}$ становится достоверным. Следовательно, вероятность

$$P\left\{(Z > 0) \cap \left(Y > \eta\left(\frac{(n-1)^2}{nt^2} - 1\right)Z^2\right)\right\} = P(Z > 0) = \frac{1}{2} + \Phi(\mu).$$

Поэтому

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = 1, \quad \left(t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right). \quad (21)$$

Найдем $F_{\tilde{T}_n}(t)$ для $0 \leq t < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$. Из (20) следует, что

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = \frac{1}{2} - \Phi(\mu) + P\left[\left(Z^2 < \frac{Y\eta^{-1}}{\frac{(n-1)^2}{nt^2} - 1}\right) \cap (Z > 0)\right] = \frac{1}{2} - \Phi(\mu) + P\left[(0 < Z < \sqrt{Y}\beta_n(t)) \cap (0 < Y < \infty)\right],$$

где $\beta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\eta} \frac{t}{\sqrt{(n-1)^2 - nt^2}}}$, $|t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$.

Заметим, что в силу теоремы Фишера случайные величины S^{*2} и \bar{X}^* являются независимыми [1], поэтому независимыми являются и случайные величины Z и Y . Следовательно, для $t \in [0; \frac{n-1}{\sqrt{n}})$

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = \frac{1}{2} - \Phi(\mu) + \int_0^\infty f_Y(y) dy \int_0^{\sqrt{y}\beta_n(t)} f_Z(z) dz, \quad (22)$$

где $f_Z(z)$ и $f_Y(y)$ – плотности распределения вероятностей случайных величин Z и Y соответственно [1]:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2}};$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^{\frac{n-4}{2}} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(\frac{n-2}{2})}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

Пусть $t < 0$. С учетом (19) для интегральной функции распределения получаем:

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(\{Z < 0\} \cap \left\{-\frac{1}{\sqrt{1 + \eta^{-1}Y/Z^2}} < \frac{\sqrt{nt}}{n-1}\right\}\right);$$

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(\{Z < 0\} \cap \left\{\sqrt{1 + \eta^{-1}Y/Z^2} < -\frac{n-1}{\sqrt{nt}}\right\}\right);$$

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(\{Z < 0\} \cap \left\{Z^2 > \frac{nt^2}{(n-1)^2 - nt^2} \cdot \frac{Y}{\eta}\right\}\right).$$

Заметим, что для $t \leq -\frac{n-1}{\sqrt{n}}$ событие

$$\left\{Z^2 > \frac{nt^2}{(n-1)^2 - nt^2} \cdot \frac{Y}{\eta}\right\}$$

становится невозможным, следовательно,

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = 0, \quad t \leq \frac{n-1}{\sqrt{n}}. \quad (23)$$

Найдем функцию распределения случайной величины \tilde{T}_n для $t \in (-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; 0)$.

Имеем для $t \in (-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; 0)$:

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(\{Z < 0\} \cap \left\{Z^2 > \frac{nt^2}{(n-1)^2 - nt^2} \cdot \frac{Y}{\eta}\right\}\right);$$

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(\left\{Z < -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{|t|}{\sqrt{(n-1)^2 - nt^2}} \sqrt{Y}\right\}\right);$$

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(\left\{Z < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{t}{\sqrt{(n-1)^2 - nt^2}} \sqrt{Y}\right\}\right).$$

Окончательно можно записать

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = P\left(Z < \beta_n(t)\sqrt{Y}\right), \quad -\frac{n-1}{\sqrt{n}} < t < 0, \quad (24)$$

где функция $\beta_n(t)$ определяется согласно (9).

С учетом того, что случайные величины Z и Y являются независимыми, соотношение (24) примет вид

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = \int_0^\infty f_Y(y) dy \int_{-\infty}^{\beta_n(t)\sqrt{y}} f_Z(z) dz. \quad (25)$$

Объединяя соотношения (23), (25), (21) и (22), получим

$$F_{\tilde{T}_n}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \\ \int_0^\infty f_Y(y) dy \int_{-\infty}^{\beta_n(t)\sqrt{y}} f_Z(z) dz, & -\frac{n-1}{\sqrt{n}} < t < 0; \\ \frac{1}{2} - \Phi(\mu) + \int_0^\infty f_Y(y) dy \int_0^{\beta_n(t)\sqrt{y}} f_Z(z) dz, & 0 \leq t < \frac{n-1}{\sqrt{n}}; \\ 1, & t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Найдем плотность распределения вероятностей случайной величины \tilde{T}_n :

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = F'_{\tilde{T}_n}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \\ \beta'_n(t) \int_0^\infty \sqrt{y} f_Y(y) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{y}) dy, & -\frac{n-1}{\sqrt{n}} < t < 0; \\ \beta'_n(t) \int_0^\infty \sqrt{y} f_Y(y) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{y}) dy, & 0 \leq t < \frac{n-1}{\sqrt{n}}; \\ 0, & t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

или

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}; \\ \beta'_n(t) \int_0^\infty \sqrt{y} f_Y(y) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{y}) dy, & |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\beta'_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\eta}} \cdot \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (27)$$

Легко проверить, что

$$\sqrt{y} f_Y(y) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} f_{\chi_{n-1}^2}(y), \quad (28)$$

где плотность распределения вероятностей $f_{\chi_{n-1}^2}(y)$ вычисляется согласно (10). Тогда для $|t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$ соотношение (26) с учетом (27) и (28) примет вид:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \sqrt{\frac{2n}{\eta}} \cdot \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \times \int_0^\infty \sqrt{y} f_{\chi_{n-1}^2}(y) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{y}) dy \quad (29)$$

Из соотношения (8) вытекает, что интеграл в (29)

$$\int_0^\infty f_{\chi_{n-1}^2}(y) f_Z(\beta_n(t)\sqrt{y}) dy = f_{V_n(t)}(0).$$

Поэтому для $|t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$ соотношение (29) примет вид:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \sqrt{\frac{2n}{\eta}} \cdot \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} f_{V_n(t)}(0),$$

что совпадает с соотношением (15).

Очевидно, что соотношения (15) и (3) совпадают в случае $|t| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}$. Покажем, что эти соотношения совпадают и в случае $|t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$. Подставив в (15) соотношение для плотности (12), можно записать:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \sqrt{\frac{2n}{\eta}} \cdot \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} f_{V_n(t)}(0);$$

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \sqrt{\frac{2n}{\eta}} \cdot \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} H_{-n+1} \left(-\frac{t\mu}{\sqrt{2q}} \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\eta}{nq} \right)^{\frac{n-1}{2}} [(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{n-1}{2}} \right\}.$$

Далее после элементарных преобразований получим

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \frac{2(n-1)^2}{\sqrt{\pi\eta}} \cdot \left(\frac{\eta}{nq} \right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \times$$

$$\times [(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{n-4}{2}} \cdot H_{-n+1} \left(-\frac{t\mu}{\sqrt{2q}} \right). \quad (30)$$

Заметим, что в силу (13) для $k = -n + 1$ можно записать

$$\Gamma(n-1)H_{-n+1} \left(-\frac{t\mu}{\sqrt{2q}} \right) = \int_0^\infty e^{-\xi^2 + \frac{2t\mu}{\sqrt{2q}}\xi} \xi^{n-2} d\xi.$$

Вводя новую переменную интегрирования $y = \frac{2\xi^2}{q}$, можно записать последнее соотношение в виде

$$\Gamma(n-1)H_{-n+1} \left(-\frac{t\mu}{\sqrt{2q}} \right) = \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-0,5qy + t\mu\sqrt{y}} y^{\frac{n-3}{2}} dy. \quad (31)$$

С учетом (7) соотношение (31) примет вид:

$$\Gamma(n-1)H_{-n+1} \left(-\frac{t\mu}{\sqrt{2q}} \right) = \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} I_n(t) \quad (32)$$

С учетом (32) соотношение (30) можно представить в виде

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi\eta}} \cdot \frac{(n-1)^2}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \cdot \left(\frac{\eta}{nq} \right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \times$$

$$\times [(n-1)^2 - nt^2]^{\frac{n-4}{2}} I_n(t).$$

После элементарных преобразований получим

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \frac{(n-1)^2}{n\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n-2}{2})} \left(\frac{\eta}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \times$$

$$\times \left[\frac{(n-1)^2}{n} - t^2 \right]^{\frac{n-4}{2}} I_n(t), |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}. \quad (33)$$

Если ввести обозначение

$$K_n = \frac{(n-1)^2}{n\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n-2}{2})} \left(\frac{\eta}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{\mu^2}{2}},$$

то соотношение (33) примет вид:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = K_n \left[\frac{(n-1)^2}{n} - t^2 \right]^{\frac{n-4}{2}} I_n(t), |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}},$$

что совпадает с соотношением (3) и в случае $|t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$.

3 Выводы

Получено новое представление для закона распределения студентизированного отклонения выброса от среднего в нормально распределенной выборке, основанное на использовании функции Эрмита с отрицательным целым значком. Найденное представление может быть применено для вычислений мер мощности критерия Граббса.

Благодарности

Выражаю искреннюю благодарность профессору Олегу Александровичу Репину за помощь и поддержку, оказанные им при работе со специальными функциями, а также за продуктивное обсуждение результатов данной статьи.

Список литературы

- [1] В.С. Мхитарян С.А. Айвазян. *Теория вероятностей и прикладная статистика. Т. 1.* ЮНИТИ-ДАНА, Москва, 2001.
- [2] Н.Н. Лебедев. *Специальные функции и их приложения.* Гл.Ред.Физ.-Мат.Лит., Москва, 1963.
- [3] Г. Дэйвид. *Порядковые статистики.* Наука, Москва, 1979.
- [4] Л.К. Ширяева. Вычисление мер мощности критерия Граббса проверки один выброс. *Сибирский журнал индустриальной математики*, 13 (4):141–154, 2010.
- [5] F.E. Grubbs. Sample criteria for testing outlying observations. *Ann. Math. Statist.*, 21 (1):27–58, 1950.

О распределении студентизированных отклонений в нормально распределенной выборке с выбросом

Людмила Константиновна Ширяева

Самарский государственный экономический университет
Кафедра математической статистики и эконометрики
Самара
Shiryayeva_LK@mail.ru

Константин Иванович Девятайкин

Самарский государственный университет
Механико-математический факультет
Самара
dev.konst@gmail.com

Аннотация. *Найден закон распределения студентизированных отклонений случайных наблюдений в нормально распределенной выборке с выбросом. Выполнены модельные расчеты плотности распределения вероятностей этих студентизированных отклонений. Результаты вычислений показали, что выброс может оказывать существенное влияние на параметры распределения студентизированных отклонений.*

Ключевые слова. *Выброс, студентизированное отклонение, плотность распределения вероятностей, нормальный закон распределения.*

1 Введение

Рассмотрим выборку из n наблюдений: x_1, x_2, \dots, x_n . Студентизированным отклонением любого из этих наблюдений от среднего будем называть случайную величину следующего вида:

$$T_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Заметим, что в (1) используется внутренняя студентизация [2], т.к. среднее и исправленное стандартное отклонение ищутся по одной и той же выборке.

Студентизированные отклонения используются для построения законов распределения ряда специальных статистик, применяемых для проверки выборки на наличие аномальных наблюдений. Примерами таких статистик являются следующие статистики отношения правдоподобия [4, 3]:

$$T_n^{(k)} = \frac{x_{(n-k+1)} + \dots + x_{(n)} - k\bar{x}}{S} \quad (k = 1, 2),$$

где $x_{(j)}$ – j -я порядковая статистика ($j = \overline{1, n}$).

Эти статистики используются для проверки нормальной выборки на один и два выброса.

Кроме того, студентизированные отклонения используются для построения мер мощности критерия Граббса проверки на один выброс [1].

Для ряда специальных случаев законы распределения студентизированных отклонений уже найдены. Опишем эти случаи.

Если нормально распределенная выборка из n наблюдений не содержит выбросов, т.е. наблюдения x_1, \dots, x_n имеют нормальное $N(a, \sigma^2)$ распределение, то в этом случае все студентизированные отклонения:

$$T_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}, \quad i = \overline{1, n}$$

одинаково распределены. Приведем вид плотности распределения вероятностей одной из этих случайных величин, например, T_n [4, 3]:

$$f_{T_n}(x) = \frac{\sqrt{n} \cdot \Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{\pi}(n-1)\Gamma(\frac{n-2}{2})} \cdot \left[1 - \frac{n}{(n-1)^2} x^2 \right]^{\frac{n-4}{2}}, \quad (2)$$

где $|x| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$.

Если же в выборке имеется выброс, т.е. если наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ являются независимыми случайными величинами, причем x_1, x_2, \dots, x_{n-1} имеют нормальное распределение $N(\alpha, \sigma^2)$, а выброс \tilde{x}_n имеет нормальный закон распределения $N(\alpha + \lambda \cdot \sigma, \nu \cdot \sigma^2)$, где $\lambda > 0, \nu > 0$, то закон распределения студентизированного отклонения для выброса:

$$\tilde{T}_n = \frac{\tilde{x}_n - \bar{x}}{S}$$

имеет вид для $n \geq 3$ [1]:

$$f_{\tilde{T}_n}(\xi) = \begin{cases} K_n \cdot \left[\frac{(n-2)^2}{n} - \xi^2 \right]^{\frac{n-4}{2}} \cdot I_n(\xi), & |\xi| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \\ 0, & |\xi| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$f_{\tilde{T}_n}(\xi) = F'_{\tilde{T}_n}(\xi),$$

$$F_{\tilde{T}_n}(\xi) = P(\tilde{T}_n < \xi),$$

$$K_n = \frac{(n-1)^2}{n\sqrt{2\pi} \cdot \Gamma(\frac{n-2}{2})} \cdot \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2}},$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \xi^{x-1} \cdot e^{-\xi} d\xi,$$

$$I_n(\xi) = \int_0^{+\infty} y^{\frac{n-3}{2}} \cdot e^{t \cdot \mu \sqrt{y} - 0.5 \cdot q \cdot y} dy,$$

$$q = \eta \cdot \frac{(b-1)^2}{n} + (1-\eta) \cdot \xi^2.$$

В данной работе найден закон распределения остальных студентизированных отклонений для выборки с выбросом:

$$T_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (4)$$

2 Закон распределения студентизированных отклонений в нормально распределенной выборке с выбросом

Теорема 1. Пусть наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tilde{x}_n$ являются независимыми случайными величинами, причем x_1, x_2, \dots, x_{n-1} имеют нормальное распределение $N(\alpha, \sigma^2)$, а выброс \tilde{x}_n имеет нормальный закон распределения $N(\alpha + \lambda \cdot \sigma, \nu \cdot \sigma^2)$, где $\lambda > 0, \nu > 0$. Тогда для $n \geq 3$ плотность распределения вероятностей случайной величины

$$T_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

имеет вид:

$$f_{T_i}(t) = \begin{cases} \frac{\frac{n-1}{\sqrt{n}} \int f_{\tilde{T}_n}(\xi) \cdot f_{T_{n-1}^*}(\rho_n(t, \xi)) \cdot \frac{\partial \rho_n}{\partial t}(t, \xi) d\xi, & |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \\ 0, & |t| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases} \quad (5)$$

где плотность распределения вероятностей $f_{\tilde{T}_n}(\xi)$ вычисляется по формуле (3),

$$f_{T_{n-1}^*}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-3}{2})} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{(n-2)^2} \cdot \xi^2\right)^{\frac{n-5}{2}}, & |\xi| < \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}, \\ 0, & |\xi| \geq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}, \end{cases}$$

$$\rho_n(t, x) = \begin{cases} \frac{t + \frac{x}{n-1}}{\sqrt{\frac{n-1}{n-2} \left(1 - \frac{n}{(n-1)^2} \cdot x^2\right)}}, & |x| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \\ 0, & |x| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t}(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{n-2} \left(1 - \frac{n}{(n-1)^2} \cdot x^2\right)}}, & |x| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \\ 0, & |x| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \xi^{x-1} \cdot e^{-\xi} d\xi,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \tilde{x}_n);$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{n-1} - \bar{x})^2 + (\tilde{x}_n - \bar{x})^2].$$

Доказательство. Рассмотрим "урезанную" выборку, т.е. выборку без выброса, содержащую $n-1$ наблюдений: x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

Обозначим:

$$\bar{x}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i,$$

$$S^{*2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}^*)^2.$$

Заметим, что для каждого наблюдения "урезанной" выборки можно найти соответствующее студентизированное отклонение:

$$T_i^* = \frac{x_i - \bar{x}^*}{S^*}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Очевидно, что случайные величины $T_1^*, T_2^*, \dots, T_{n-1}^*$ распределены одинаково. Плотность распределения вероятностей любой из этих случайных величин, например, T_{n-1}^* , согласно (2) имеет вид:

$$f_{T_{n-1}^*}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \sqrt{\frac{n-1}{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-3}{2})} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{(n-2)^2} \xi^2\right)^{\frac{n-5}{2}}, & |\xi| < \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}, \\ 0, & |\xi| \geq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \xi^{x-1} \cdot e^{-\xi} d\xi, x > 0$.

Из соотношения (6) следует также, что интегральная функция распределения имеет вид:

$$F_{T_{n-1}^*}(t) = P(T_{n-1}^* < t);$$

$$F_{T_{n-1}^*}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\frac{n-2}{\sqrt{n-1}} \\ \int_{-\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}}^t f_{T_{n-1}^*}(\xi) d\xi, & -\frac{n-2}{\sqrt{n-1}} < t < \frac{n-2}{\sqrt{n-1}} \\ 1, & t \geq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}} \end{cases} \quad (7)$$

Легко проверить справедливость следующих равенств:

$$\tilde{x}_n - \bar{x} = \frac{n-1}{n} \cdot (\tilde{x}_n - \bar{x}^*),$$

$$S^2 = \frac{n-2}{n-1} \cdot S^{*2} + \frac{(\tilde{x}_n - \bar{x}^*)^2}{n},$$

Тогда для студентизированного отклонения \tilde{T}_n можно записать

$$\tilde{T}_n = \frac{\tilde{x}_n - \bar{x}}{S} = \frac{\frac{n-1}{n} \cdot (\tilde{x}_n - \bar{x}^*)}{\sqrt{\frac{n-2}{n-1} \cdot S^{*2} + \frac{(\tilde{x}_n - \bar{x}^*)^2}{n}}}$$

или,

$$\tilde{T}_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\text{sign}(\tilde{x}_n - \bar{x}^*)}{\sqrt{\frac{n(n-2)}{n-1} \cdot \frac{S^{*2}}{(\tilde{x}_n - \bar{x}^*)^2} + 1}}. \quad (8)$$

Известно, что для случайной величины T_i справедливо следующее соотношение [4]:

$$T_i = T_i^* \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n-2} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n-1)^2} \cdot \tilde{T}_n^2\right)} - \frac{1}{n-1} \cdot \tilde{T}_n, \quad (9)$$

где $i = \overline{1, n-1}$.

Найдем интегральную функцию распределения случайной величины $T_i, i = \overline{1, n-1}$. Действуя по определению, имеем:

$$F_{T_i}(t) = P(T_i < t). \quad (10)$$

Подставим соотношение (9) в (10) и учтем, что областью возможных значений случайной величины \tilde{T}_n является промежуток $\left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$. Тогда

$$F_{T_i}(t) = P\left(\left(T_i^* < \rho_n(t, \tilde{T}_n)\right) \cap \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}} < \tilde{T}_n < \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad (11)$$

где

$$\rho_n(x, y) = \frac{x + \frac{1}{n-1} \cdot y}{\sqrt{\frac{n-1}{n-2} \cdot \left(1 - \frac{n}{(n-1)^2} \cdot y^2\right)}}, \quad (12)$$

$$|y| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}.$$

Тогда соотношение (11) можно представить в виде:

$$F_{T_i}(t) = \int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} d\xi \int_{-\infty}^{\rho_n(t, \xi)} f_{\tilde{T}_n T_i^*}(\xi, \eta) d\eta, \quad (13)$$

где $f_{\tilde{T}_n T_i^*}(\xi, \eta) d\eta = \frac{\partial^2 F_{\tilde{T}_n T_i^*}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} -$ совместная плотность распределения вероятностей случайных величин \tilde{T}_n и $T_i^*, i = \overline{1, n-1}$,

$F_{\tilde{T}_n T_i^*}(\xi, \eta) = P\left[\left(\tilde{T}_n < \xi\right) \cap \left(T_i^* < \eta\right)\right]$ - совместная интегральная функция распределения случайных величин \tilde{T}_n и $T_i^*, i = \overline{1, n-1}$.

Из соотношения (8) следует, что случайная величина \tilde{T}_n является функцией случайных величин $\bar{x}^*, S^*, \bar{x}_n$. Случайные величины $\{T_1^*, T_2^*, \dots, T_{n-1}^*\}$ распределены независимо от случайных величин \bar{x}^* и S^* [4]. Следовательно случайные величины \tilde{T}_n и $\{T_1^*, T_2^*, \dots, T_{n-1}^*\}$ являются независимыми. Поэтому

$$f_{\tilde{T}_n T_i^*}(\xi, \eta) = f_{\tilde{T}_n}(\xi) \cdot f_{T_i^*}(\eta).$$

Заметим, что студентизированные отклонения $\{T_1^*, T_2^*, \dots, T_{n-1}^*\}$ найдены по "урезанной" выборке, не содержащей выброса. Следовательно, они распределены одинаково, т.е.

$$f_{T_1^*}(x) = f_{T_2^*}(x) = \dots = f_{T_{n-1}^*}(x).$$

Поэтому

$$f_{\tilde{T}_n T_i^*}(\xi, \eta) = f_{\tilde{T}_n}(\xi) \cdot f_{T_{n-1}^*}(\eta).$$

Тогда соотношение (13) примет вид

$$F_{T_i}(t) = \int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_{\tilde{T}_n}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\rho_n(t, \xi)} f_{T_{n-1}^*}(\eta) d\eta. \quad (14)$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\rho_n(t, \xi)} f_{T_{n-1}^*}(y) dy = P(T_{n-1}^* < \rho_n(t, \xi)) = F_{T_{n-1}^*}(\rho_n(t, \xi)). \quad (15)$$

С учетом (15) соотношение (14) примет вид:

$$F_{T_i}(t) = \int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_{\tilde{T}_n}(\xi) F_{T_{n-1}^*}(\rho_n(t, \xi)) d\xi, \quad (16)$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

Легко проверить, что при $t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}$ и $\xi \in \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$ выполняется условие

$$\rho_n(t, \xi) \geq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}. \quad (17)$$

Тогда на основании формулы (7) можно утверждать, что

$$F_{T_{n-1}^*}(\rho_n(t, \xi)) = 1, \left(t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, -\frac{n-1}{\sqrt{n}} < \xi < \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right).$$

Следовательно, формула (16) примет вид:

$$F_{T_i}(t) = \int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_{\tilde{T}_n}(\xi) d\xi, \quad t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}. \quad (18)$$

Заметим, что из (3) вытекает:

$$\int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_{\tilde{T}_n}(\xi) d\xi = 1.$$

Поэтому (18) примет вид:

$$F_{T_i}(t) = 1, \quad t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}. \quad (19)$$

Легко проверить, что при $t \leq -\frac{n-1}{\sqrt{n}}$ и $\xi \in \left(-\frac{n-1}{\sqrt{n}}; \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right)$ выполняется условие

$$\rho_n(t, \xi) \leq -\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}. \quad (20)$$

Тогда на основании формулы (7) можно утверждать, что

$$F_{T_{n-1}^*}(\rho_n(t, \xi)) = 0, \left(t \leq -\frac{n-1}{\sqrt{n}}, -\frac{n-1}{\sqrt{n}} < \xi < \frac{n-1}{\sqrt{n}}\right).$$

Следовательно, соотношение (16) примет вид:

$$F_{T_i}(t) = \int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_{\tilde{T}_n}(\xi) \cdot 0 d\xi = 0, \quad t \leq -\frac{n-1}{\sqrt{n}} \quad (21)$$

С учетом (19) и (21) представление (16) для интегральной функции распределения случайной величины T_i ($i = \overline{1, n-1}$) примет вид:

$$F_{T_i}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -\frac{n-1}{\sqrt{n}} \\ \int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_{\tilde{T}_n}(\xi) \cdot F_{T_{n-1}^*}(\rho_n(t, \xi)) d\xi, & |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}} \\ 1, & t \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}} \end{cases} \quad (22)$$

Теперь найдем плотность

$$f_{T_i}(t) = F'_{T_i}(t), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Дифференцируя (22), получим

$$f_{T_i}(t) = \begin{cases} \int_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_{\tilde{T}_n}(\xi) \cdot f_{T_{n-1}^*}(\rho_n(t, \xi)) \cdot \frac{\partial \rho_n}{\partial t}(t, \xi) d\xi, & |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \\ 0, & |t| \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

3 Численное моделирование

В пп. 2 был найден закон распределения студентизированных отклонений случайных наблюдений в нормально распределенной выборке с выбросом (формула (5)). Эта формула может быть использована для анализа распределения студентизированных отклонений. Для этого был разработан алгоритм приближенного вычисления плотности распределения студентизированных отклонений $f_{T_i}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$. Определенный интеграл в (5) вычислялся приближенно по формуле Симпсона, при этом значения функции плотности распределения $f_{\tilde{T}_n}(t)$ вычислялись по формуле (3), а плотности $f_{T_{n-1}^*}(\xi)$ – по формуле (6).

Данный алгоритм был реализован на языке программирования C++ в виде клиент-серверного приложения. Для проверки корректности работы алгоритма к нему был применен ряд тестов. Один из тестов был основан на построении ядерной оценки плотности студентизированных отклонений по методу Монте-Карло. Оказалось, что ядерная оценка плотности практически не отличалась от результата численных расчетов, полученного данным алгоритмом. Кроме того, для случая $\lambda = 0, \nu = 1$ результаты численных расчетов плотности совпали с результатами вычислений плотности по формуле (2), что согласуется с общей теорией вопроса.

Были выполнены модельные расчеты плотности распределения вероятностей студентизированных отклонений для случая нормально распределенной выборки из 10 наблюдений, содержащей один выброс.

При этом предполагалось, что выброс имел ту же дисперсию, что и остальные наблюдения выборки, а его среднее (ожидаемое) значение превышало средние остальных наблюдений. Поэтому параметр масштаба ν был выбран равным 1, а параметр сдвига $\lambda > 0$.

Результаты модельных расчетов приведены на рис. 1 – 4.

Поскольку студентизированные отклонения $\{T_1, T_2, \dots, T_{n-1}\}$ распределены одинаково, на рис. 1 и рис. 3 представлены кривые распределения студентизированного отклонения $T_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{S}$ для значений λ от 0 до 3 в случае $n = 10$ и $n = 25$ соответственно.

Из рис. 1 видно, как кривая распределения изменяется с увеличением параметра сдвига λ : с ростом λ происходит смещение среднего (ожидаемого) значения T_1 влево от 0, сопровождающееся уменьшением дисперсии. Аналогичным образом изменяется кривая $f_{T_1}(t)$ и в случае $n = 25$ (см. рис. 3).

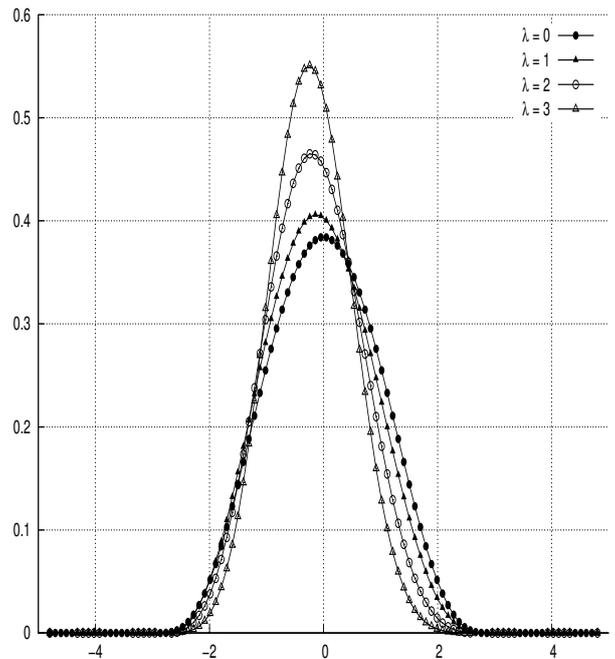


Рис. 1: Графики зависимости $f_{T_1}(t)$ для значений λ от 0 до 3 ($n = 10$).

На рис. 2 приведены результаты численных расчетов плотности распределения студентизированного отклонения выброса $\tilde{T}_n = \frac{x_n - \bar{x}}{S}$ в случае $n = 10$ для значений λ от 0 до 3. Плотность $f_{\tilde{T}_n}(t)$ вычислялась по формуле (3).

Из рис. 2 видно, как с ростом λ происходит изменение формы кривой распределения: с увеличением параметра λ кривая распределения перестает быть симметричной, приобретает левостороннюю асимметрию. Кроме того, наблюдается смещение модаль-

ного значения вправо, сопровождающееся уменьшением дисперсии. Аналогичным образом изменяется кривая $f_{\hat{T}_n}(t)$ и в случае $n = 25$ (см. рис. 4).

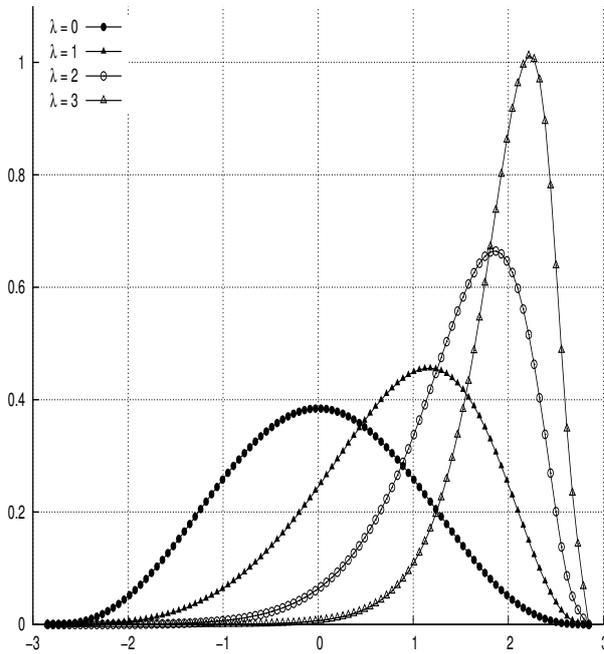


Рис. 2: Графики зависимости $f_{\hat{T}_n}(t)$ для значений λ от 0 до 3 ($n = 10$).

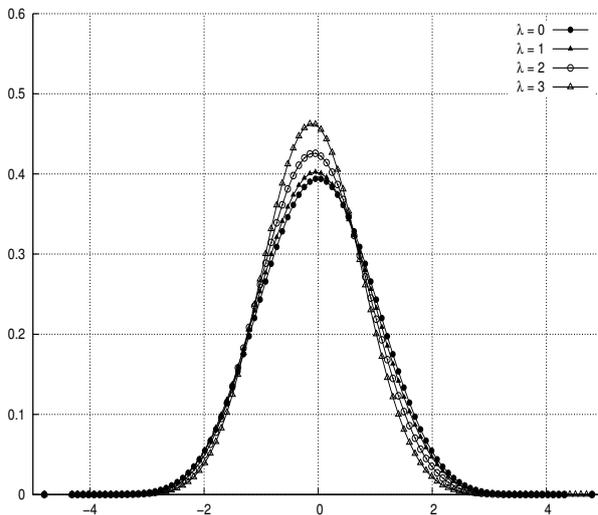


Рис. 3: Графики зависимости $f_{T_1}(t)$ для значений λ от 0 до 3 ($n = 25$).

Таким образом, результаты модельных расчетов показали, что присутствие выброса в выборке может оказывать существенное влияние на распределение студентизированных отклонений случайных наблюдений.

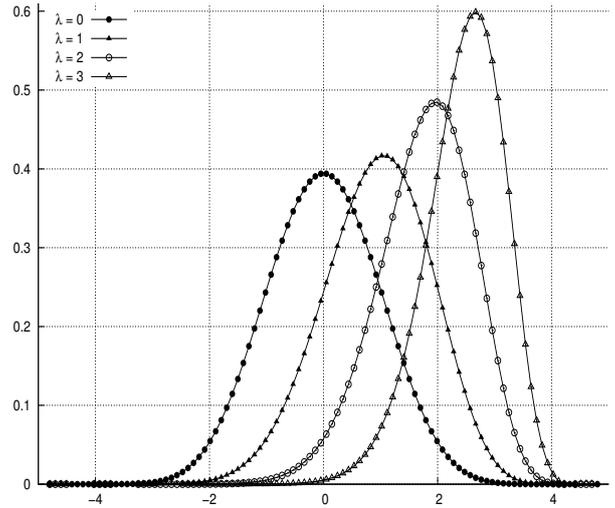


Рис. 4: Графики зависимости $f_{\hat{T}_n}(t)$ для значений λ от 0 до 3 ($n = 25$).

4 Выводы

В данной работе найден закон распределения студентизированных отклонений случайных наблюдений в нормально распределенной выборке с выбросом. Разработан алгоритм численных вычислений плотности распределения этих студентизированных отклонений. Выполнены модельные расчеты плотности распределения для случая нормально распределенной выборки, содержащей один выброс. Результаты вычислений оказались близки к теоретически ожидаемым.

Список литературы

- [1] Л. К. Ширяева. Вычисление мер мощности критерия Граббса проверки на один выброс. *Сибирский журнал промышленной математики*, 13:141–154, 2010.
- [2] Г. Дэйвид. *Порядковые статистики*. Наука, Москва, 1979.
- [3] V. Barnett and T. Lewis. *Outliers in statistical data*. Chichester, 1994.
- [4] J. Zhang and Y. Keming. The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test*, 15:141–150, 2006.

Интеллектуальная система ДИОС на основе пороговой и нечёткой логики и её приложения

Янковская Анна Ефимовна

Томский государственный архитектурно-строительный университет
Лаборатория интеллектуальных систем
Томский государственный университет
Томск
ayyankov@gmail.com

Китлер Сергей Владимирович

Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники
Кафедра компьютерных систем в управлении и проектировании
Томск
kitsv@sibmail.com

Аннотация. *Статья посвящается описанию интеллектуальной системы диагностики и интервенции организационного стресса (ИС ДИОС) на основе пороговой и нечёткой логики и её приложения. Приводятся математические основы построения ИС ДИОС. Рассматривается область приложения ИС ДИОС для оценки уровня психологической заболеваемости населения на различных административно-территориальных единицах исследуемого региона. Предлагается интеллектуальное расширение геоинформационной системы ArcView путём конвертации базы данных и знаний ИС ДИОС в базу данных ArcView. Предлагается создание интеллектуальной системы по оценке генетических нарушений обследуемых с применением того же математического аппарата, как и в ИС ДИОС и стыковка созданной системы с геоинформационной системой ArcView. Приводятся результаты исследования ИС ДИОС на выбранных территориальных единицах Томского региона.*

Ключевые слова. *Интеллектуальная система, уровень психологического здоровья населения, диагностика и интервенция организационного стресса, нечёткая логика, пороговая логика, интеллектуальное расширение геоинформационной системы.*

1 Введение

В последнее время для решения диагностических задач в различных слабоструктурированных областях, таких как медицина [1-6], психология [7-11], сфера охраны психического и соматического здоровья [12] создаются прикладные интеллектуальные системы (ИС).

Данная тенденция обусловлена ростом числа заболеваний людей. Особенно актуальна в настоящий момент оценка психологического здоровья населения, и в первую очередь, оценка уровня организационного стресса (ОС) населения, имеющего отношение к учебному процессу [13, 14].

Под организационным стрессом [15] будем понимать реакцию, стимул или результат взаимодействия человека и внешней среды, во время которой нарушается равновесие между ними.

Однако, анализ данных и знаний и принятие диагностических и коррекционных (интервенционных)

решений по ОС в вышеприведённых системах [7-11] требует больших и временных затрат.

В связи с этим задача создания интеллектуальной системы экспресс-диагностики и интервенции организационного стресса с учётом степени проявления того или иного признака (симптома) (никогда, редко, иногда, часто, постоянно) не вызывает сомнения. Применение такого показателя, как степень проявления симптома позволяет использовать аппарат нечёткой логики для принятия диагностических и интервенционных решений.

ИС ДИОС [16, 17] основана на нечёткой логике, когнитивных средствах визуализации информационных структур, результатов принятия и обоснования диагностических и интервенционных решений и предназначена для своевременного выявления организационного стресса.

В качестве области приложений ИС ДИОС предлагается применять интеллектуальное расширение геоинформационной системы (ГИС) [18] для оценки уровня заболеваемости населения и, в первую очередь, для выявления уровня организационного стресса населения на различных административно-территориальных единицах исследуемых регионов, а также с целью выявления генетических заболеваний обследуемых [4-6]. С целью выявления уровня психологического и генетического здоровья населения нами рассматривается Томский регион.

2 Математические основы создания ИС ДИОС

В основу построения ИС ДИОС положена идея трёхступенчатой диагностики ОС и математический аппарат, базируемый на пороговой и нечёткой логике [19], когнитивных средствах визуализации информационных структур и результатов принятия и обоснования диагностических и интервенционных решений.

Для экспресс-диагностики организационного стресса был сконструирован опросник, включающий вопросы по трём стадиям ОС (1–напряжения (возбуждающей), 2–адаптации (сохранения энергии), 3–истощения). В основе опросника лежит концепция Г. Селье [20]. В 1, 2-й стадиях используется 7 признаков (симптомов) для выявления ОС, в 3-й стадии – 8 признаков, причём

количество значений каждого признака равно 5 (никогда – 0, редко – 0.25, иногда – 0.5, часто – 0.75, постоянно – 1). Анализ признаков позволяет проводить экспресс-диагностику по выявлению ОС на каждой стадии.

Для принятия диагностического решения применяется пороговая функция $f(x)$.

$$\begin{aligned} &\text{Если } a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b, \\ &\text{то } f(x)=1, \\ &\text{иначе } f(x)=0, \end{aligned}$$

где a_n – степень выраженности симптома, $a_n \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, x_n – признаки для каждой стадии ОС, $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ – для 1,2-й стадий, $n \in \{1, 2, \dots, 8\}$ – для 3-й стадии, b – порог.

Основанием для принятия диагностических решений на каждой стадии ОС является выполнение критерия превышения порога ($b=3$).

Интеллектуальная система ДИОС реализует следующие функции: ввод анкетных данных об обследуемом; извлечение признаков (симптомов) с целью выявления наличия организационного стресса на каждой из трех стадий; диагностирование организационного стресса на основе пороговой с применением нечеткой логики по каждой их трех стадий, а также обоснование диагностических решений, вывод с применением когнитивных средств и формирование заключения по диагностическим и интервенционным решениям организационного стресса.

3 Описание интеллектуальной системы ДИОС

С целью проведения своевременной диагностики ОС и получения качественной интерпретации состояния обследуемого была разработана ИС ДИОС [16, 17].

Ранее была разработана первая версия ИС ДИОС [16], в которой использовалось 14 признаков на каждой из стадий ОС.

Во второй версии ИС ДИОС [17], для которой в дальнейшем версия не упоминается, используется только 7 признаков для каждой из первых двух стадий ОС и 8 – для третьей стадии ОС. Также в ИС ДИОС применяется градация выраженности симптомов ОС: от отсутствия симптома до его постоянного наличия. Такая детализация позволяет снабдить обследуемого индивидуальной подобранной рекомендацией по интервенционным мероприятиям и профилактике ОС.

В основе программной реализации ИС ДИОС лежит база данных и знаний, содержащая данные и знания об обследуемых и результаты их экспресс-диагностики, а также опросник, иллюстрации, поясняющие тексты.

Внешний вид главного окна ИС ДИОС приведён на рис

1.

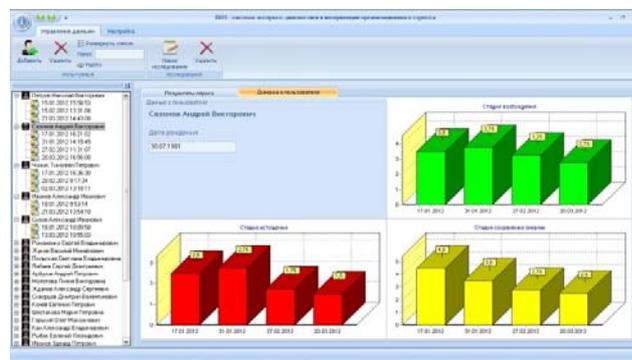


Рис. 1. Главное окно ИС ДИОС

В настоящее время интерфейс ИС ДИОС выполнен на русском языке.

Данные об обследуемых и их экспресс-опросах выводятся в виде древовидного списка в левой части главного окна ИС ДИОС, при этом ФИО обследуемого является корневым узлом для коллекции дочерних узлов, соответствующих данным об экспресс-опросах. При выделении обследуемого, раскрывается дочерний список экспресс-опросов по данному обследуемому и открывается окно, отражающее динамику изменения по каждой стадии организационного стресса в виде трех столбцовых диаграмм.

В режиме экспресс-опроса в ИС ДИОС выводятся вопросы опросника в отдельном диалоговом окне, где пользователь может выбрать один из предложенных вариантов ответов на каждый вопрос.

Приведём разработанный нами опросник без указания анкетных данных (Фамилия имя отчество, год рождения, пол, место работы/учёбы).

Стадия возбуждения

1. Испытываете ли психическое напряжение, обуславливающее повышенную активность в основных видах деятельности?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

2. Испытываете ли периодически возникающее раздражение? (Вас не покидает чувство раздражения в течение нескольких дней, у Вас возникает чувство недовольства собой и окружающими по разным мелочам, Вы сердитесь на других людей)

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

3. Появляется ли тревога и усилия в период профессиональной деятельности? (Вы чувствуете, что вам постоянно что-то (нет понимания что именно)

угрожает, у вас возникает ощущение неопределенности, ожидания негативных событий)

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

4. Появляется ли повышенная возбудимость (споры) в периоды совместной работы с коллегами? (у Вас наблюдается склонность к конфликтности, неспособность расслабиться в межличностном общении, нестабильность настроения)

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

5. Чувствуете ли при психических нагрузках постоянное мышечное напряжение в отдельных мышцах или во всем теле?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

6. Нарушения сна (трудности засыпания, поверхностный сон, раннее пробуждение)

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

7. Испытываете ли трудности концентрации внимания (рассеянность) при выполнении повседневной деятельности? (не способны помнить о делах, событиях, датах, которые важны для Вас)

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

Стадия адаптации.

8. Снижается ли активный образ жизни?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

9. Снижается ли интерес и удовольствие к рабочей деятельности?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

10. Стремитесь ли продлить пассивный отдых в течении недели?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

11. Появляются ли чувства нарушения привычного жизненного ритма?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

12. Испытываете ли субъективное ощущение снижения двигательной активности?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

13. Появляются ли сомнения и трудности в принятии решений?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

14. Используете ли лекарственные препараты для увеличения жизненного тонуса, продолжительности сна? (повышенное употребление алкоголя, кофе, энергетические безалкогольные напитки (Флеш, Редбул, кола и др.))

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

Стадия истощения.

15. Испытываете ли постоянное чувство неудовлетворенности своей деятельностью?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

16. Испытываете ли постоянную бессонницу, иногда с чувством полного отсутствия сна или кошмарными сновидениями?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

17. Присутствует ли постоянное предчувствие неблагоприятных жизненных событий?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

18. Испытываете ли хроническую печаль или депрессию?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

19. Формируется ли зависимость к лекарственным веществам и/или алкоголю?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

20. Испытываете ли выраженное уменьшение контактов с друзьями и семьей?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

21. Появляются ли и/или обостряются ли соматические жалобы и хронические физические заболевания?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

22. Присутствуют ли мысли о нежелании жить, замыслы причинить себе вред, покончить с собой?

0-никогда; 1-редко; 2-иногда; 3-часто; 4-всегда

К каждому вопросу приводится краткое текстовое описание и иллюстрация ситуации (рис. 2).



Рис. 2. Режим экспресс-опроса

После подтверждения пользователем правильности введенных ответов, результаты экспресс-опроса сохраняются в базе данных и могут впоследствии быть использованы как для формирования рекомендаций, так и для отображения динамики изменения уровней каждой стадии развития организационного стресса.

При выборе одного из результатов экспресс-опроса ИС ДИОС выводит на экран ответы на вопросы, введенные в ходе соответствующего сеанса тестирования (рис. 3). Красным цветом на прямоугольнике (рис.3) отмечен факт превышения значения пороговой функции величины в 3 балла на рассматриваемой стадии.

Также в ИС ДИОС по результатам опроса вычисляется численное значение пороговой функции каждой из стадий развития организационного стресса и в зависимости от этого значения формируется и выводится текст заключения, содержащий информацию о состоянии обследуемого и набор рекомендаций по интервенции развивающегося организационного стресса. В ряде особых случаев острого стресса, характеризующихся, например, склонностью к суициду, рекомендации формируются не на основании пороговых значений с учетом тяжести последствий, а необходимостью своевременного вмешательства.

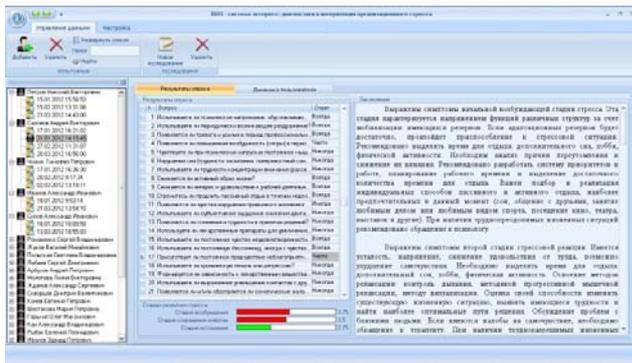


Рис. 3. Выбор результатов экспресс-опроса

4 Результаты исследования интеллектуальной системы ДИОС

Интеллектуальная система ДИОС исследована в учебном процессе, в котором в качестве обследуемых выступили студенты ряда факультетов ГБОУ ВПО Сибирского медицинского государственного университета (СибГМУ) Минздравсоцразвития России (101 респондент); студенты экономического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета (ТГУ) (19 респондентов), среди служащих в Муниципальном дошкольном образовательном учреждении (МДОУ) детском саду №6 (23 респондента), а также в производственном процессе Томского филиала ОАО «Ростелеком» (28 респондентов) и ОАО «Научно-исследовательский, проектно-конструкторский и технологический кабельный институт (НИКИ) с опытным производством (г.Томск)» (21 респондент).

По результатам исследования ИС ДИОС было выявлено количество обследуемых с наличием 1-й стадии ОС: 57 респондентов в СибГМУ, 7 – в ТГУ, 7 – в МДОУ №6, 8 –

в Томском филиале ОАО «Ростелеком», 2 – в ОАО «НИКИ», количество обследуемых с наличием 2-й стадии ОС: 47 респондентов в СибГМУ, 5 – в ТГУ, 4 – в МДОУ №6, 11 – в Томском филиале ОАО «Ростелеком», 5 – в ОАО «НИКИ», количество обследуемых с наличием 3-й стадии ОС: 22 респондентов в СибГМУ, 2 – в ТГУ, 4 – в МДОУ №6, 1 – в Томском филиале ОАО «Ростелеком», 1 – в ОАО «НИКИ».

Отметим, что у ряда студентов и служащих выявлено одновременно наличие нескольких стадий организационного стресса.

На рис.4 приведем гистограмму, отображающую результаты исследования.

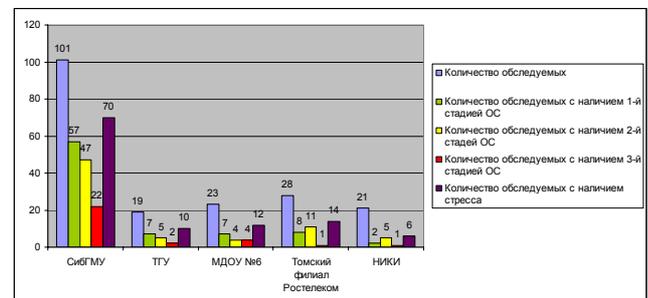


Рис. 4. Гистограмма результатов исследования ИС ДИОС

Результаты исследования показали, что первое место по наличию стрессового состояния наблюдается у студентов СибГМУ (69,3% респондентов), на втором месте – у студентов экономического факультета ТГУ (55,6% респондентов), на третьем месте – у служащих МДОУ детского сада №6 (52,2% респондентов), на четвертом месте – у служащих Томского филиала ОАО «Ростелеком» (50% респондентов), на пятом месте – у служащих ОАО «НИКИ» (28,6% респондентов).

Полученные результаты демонстрируют необходимость изменения психологического состояния большинства респондентов. Эффективным способом улучшения психологического состояния здоровья обследуемого является изменение образа жизни.

ИС ДИОС внедрена в учебный процесс кафедр клинической психологии и психотерапии; психиатрии, наркологии и психотерапии ФПК и ППС; медицинской и биологической кибернетики ГБОУ ВПО СибГМУ Минздравсоцразвития России.

5 Приложения

Поскольку уровень организационного стресса населения в современном мире постоянно возрастает, что отражено в данных Всемирной организации здравоохранения, то настоятельная необходимость его выявления не вызывает сомнения.

В связи с этим необходимо исследовать уровень ОС как для различных слоёв населения, так и для различных регионов. Нами предлагается применять ИС ДИОС [16, 17] в целях интеллектуального расширения ГИС [18] для оценки уровня психологической заболеваемости населения на различных административно-территориальных единицах исследуемых регионов.

В качестве приложения ИС ДИОС для интеллектуального расширения ГИС предлагается использовать один из двух подходов: осуществить конвертирование данных и знаний из одной из ГИС, например ArcView [21], в базу данных и знаний одной из разработанных нами интеллектуальных систем [16-18, 22] или конвертировать полученные результаты интеллектуальной обработки (базы знаний и результаты принятия и обоснования решений) с применением той или иной интеллектуальной системы [16, 17, 22] в выбранную ГИС.

Базу данных и знаний ИС ДИОС, предлагается конвертировать с применением плагина ArcViewSQL в базу данных и знаний ГИС ArcView и осуществлять запросы для обращения к записям, содержащимся в ИС ДИОС. Такой способ конвертации позволяет при расширении базы данных и знаний ИС ДИОС автоматически обновлять базу данных ГИС.

В результате любые изменения в базе данных и знаний ИС ДИОС будут представлены в ГИС ArcView.

В связи с ростом генетических нарушений актуально создание аналогичной ИС ДИОС интеллектуальной системы с целью выявления этих нарушений. В публикациях [4-6] была описана интеллектуальная система ГЕНЕТОН, исследованная в регионах г. Томска и области. Результаты исследования приведены в публикации [6].

Поскольку необходима периодическая диспансеризация населения и использование таких систем как ГЕНЕТОН требует инструментальных и инвазивных вмешательств для заполнения базы данных об обследуемых, то применение систем экспресс-диагностики, аналогично ИС ДИОС позволит своевременно, оперативно и, используя незначительные временные и стоимостные затраты, выявлять различные заболевания, связанные с генетическими нарушениями.

6 Заключение

Приведён математический аппарат, базируемый на пороговой и нечёткой логике и лежащий в основе создания ИС ДИОС. Описана интеллектуальная система ДИОС, предназначенная для экспресс-диагностики и интервенции организационного стресса. Диагностика

осуществляется в интерактивном режиме. Преимущество ИС ДИОС заключается в своевременности получения результатов диагностики и интервенционных решений при весьма незначительных временных и стоимостных затратах на проведение процедуры выявления ОС.

Приведены результаты исследования ИС экспресс-диагностики и интервенции организационного стресса, показавшие высокий уровень ОС, и в первую очередь среди студентов. Данные результаты диагностики ОС обладают высоким уровнем достоверности диагностических решений и позволяют дать качественную интерпретацию состояния обследуемого, а также снабдить его индивидуально подобранной рекомендацией по интервенции и профилактике ОС.

Для оценки уровня психологического здоровья населения на различных административно-территориальных участках исследуемого региона предложено использование интеллектуальной системы экспресс-диагностики ДИОС для интеллектуального расширения геоинформационной системы.

Предложено создание интеллектуальной системы, аналогичной ИС ДИОС, для оценки здоровья населения, связанного с генетическими нарушениями, при проведении диспансеризации населения.

Благодарности

Авторы выражают благодарность Н.А. Корнетову за постановку задачи трехступенчатой диагностики и участие в формировании опросника, Р.В. Аметову за участие в разработке графического интерфейса ИС ДИОС, А.В. Силаевой и Л.В. Шагаловой за участие в проведении эксперимента в СибГМУ, У.А. Китлер за участие в проведении эксперимента в НИ ТГУ и А.А. Изюмову за участие в проведении эксперимента в ОАО «НИКИ».

Работа поддержана грантами РФФИ, проект №10-01-004-62-а, проект № 11-07-98015-р_сибирь_a.

Литература

- [1] Кобринский Б.А. Ретроспективный анализ медицинских экспертных систем // Новости искусственного интеллекта. – 2005. – №2. – С. 6-17.
- [2] V. Pereverzev-Orlov Partner System and Ideas of Pattern Recognition Learning. // Pattern Recognition and Image Analysis. – 1992. – Vol. 2, No. 4. – P. 429-451.
- [3] Янковская А.Е. Тестовые распознающие медицинские экспертные системы с элементами когнитивной графики // Компьютерная хроника, 1994. № 8/9. С. 61-83.

- [4] Yankovskaya A.E., Il'inskikh N.N. On the Question of the Development and Application of Intelligent Biomedical Systems// *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 1998. – Vol.8, No.3. – P. 470-472.
- [5] Yankovskaya A.E., Gedike A.I., Il'inskikh N.N., Chernogoruk G.E. The Principles of the Development of an Intelligent Test Biomedical System// *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 2001. – Vol. 11, No. 2. – pp. 484-487.
- [6] Янковская А.Е., Ильинских Н.Н., Черногорюк Г.Э., Кузоваткин А.Н. Результаты исследований алгоритма принятия решений непосредственно в процессе построения смешанных диагностических тестов, реализованного в интеллектуальных биомедицинских системах// *Естествознание и гуманизм*. Сб. научных трудов. Т. 1. № 3. – Томск: Издание СибГМУ, 2004. – С. 95-99.
- [7] Янковская А.Е., Рождественская Е.А. Выявление социально-психологических факторов в условиях коммуникативного стресса в учебном процессе с использованием интеллектуальной системы// *Психологический универсум образования человека нозотического*. Материалы Международного симпозиума. – Томск, 1998. – С. 184-186.
- [8] Янковская А.Е., Муратова Е.А., Аметов Р.В., Рождественская Е.А. Интеллектуальная информационная система для диагностики состояний коммуникативного стресса // *Интеллектуальные системы (AIS'06), Интеллектуальные САПР (CAD-2006)*. Труды Международной научно-технической конф. – Т.1. – М.: Физматлит, 2006. – С. 258-266.
- [9] Янковская А.Е., Казанцева Н.В., Корнетов Н.А., Черногорюк Г.Э. Концептуализация создания современной интеллектуальной информационной технологии диагностики и коррекции состояний коммуникативного стресса на рабочем месте / *Современные информационные и телемедицинские технологии для здравоохранения*. Материалы II Международной конференции. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2008. – С. 349-353.
- [10] Янковская А.Е., Казанцева Н.В. Пути дальнейшего развития интеллектуальной системы поддержки диагностики состояний коммуникативного стресса на рабочем месте для практического здравоохранения// *Современные информационные и телемедицинские технологии для здравоохранения*. Материалы II Международной конференции. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2008. – С. 344-348.
- [11] Янковская А.Е., Китлер С.В. Гибридная интеллектуальная система диагностики и коррекции организационного стресса, основанная на сочетании матричного и критериального подходов // *Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте*. Сборник научных трудов VI-й Международной научно-технической конференции. В 2-х томах. Т.2. – Москва: Физматлит, 2011. – С. 832-843.
- [12] Cooper J.E. Pocket guide to the ICD-10. Classification of Mental and Behavioral Disorders with Glossary and Diagnostic Criteria for Research / Compl. and Ed. J.E. Cooper. World Health Organization, Geneva, Churchill Livingstone, 1998. – 441 p.
- [13] R. Tyssen, Y. Per Vaglum, N. T. Gronvold, O. Ekeberg. The relative importance of individual and organizational factors for the prevention of job stress during internship: a nationwide and prospective study // *Medical Teacher*. – 2005. – Vol. 27. – No.8. – P. 726-731.
- [14] J.A. Gray-Stanley, N. Muramatsu, T. Heller, S. Hughes [et al.]. Work stress and depression among direct support professionals: the role of work support and locus of control // *Journal of Intellectual Disability Research*. – 2010. – Vol. 54. – No.8. – P. 749-761.
- [15] Carry L. Cooper, Philip J. Dewe, and Michael P. O'Driscoll *Organizational stress: A review and critique of theory, research, and applications*. – London: Sage Publications, 2001. – 288 p.
- [16] Янковская А.Е., Корнетов Н.А., Китлер С.В. Основанная на пороговой логике система интеллектуальными элементами система диагностики и интервенции организационного стресса// *Открытое образование* 2011. №2 (86). Ч.2. – С. 69-73.
- [17] Yankovskaya A.E., Ametov R.V., Kitler S.V. Decision-Making for Diagnostic and Intervention of Organizational Stress in Intelligent System DIOS // *Proceedings of 8th Open German-Russian Workshop "Pattern Recognition and Image Understanding" OGRW-8-11, Nizhny Novgorod*, 2011. – P. 353-356.
- [18] Yankovskaya A., Semenov M. To the problem about the intelligent extension construction of the geoinformational systems // *Proceedings of 8th Open German-Russian Workshop "Pattern Recognition and Image Understanding" OGRW-8-11, Nizhny Novgorod*, 2011. – P. 349-352.
- [19] Zadeh, Lotfi A. Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing// *Communications of the ACM*. – Vol. 37. – No.3. – P. 77-84.
- [20] Selye H. A Syndrome Produced by Diverse Nocuous Agents// *Nature*. – 1936. Vol. 138. – P. 32.
- [21] Кошкарев А. В., Тикунов В. С. Геоинформатика.- М.: Картгеоцентр -"Геодезиздат", 1993.– 213 с.
- [22] Yankovskaya A.E., Gedike A.I., Ametov R.V., Bleikher A.M. IMSLOG-2002 Software Tool for Supporting Information Technologies of Test Pattern Recognition// *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 2003. – Vol.13. – No.4. – P. 650-657.

Компетентностный подход к принятию решений в общающе-тестирующих системах на основе нечеткой и пороговой логики

Янковская Анна Ефимовна

Томский государственный архитектурно-строительный университет
Лаборатория интеллектуальных систем
Томский государственный университет
Томск
ayyankov@gmail.com

Семенов Михаил Евгеньевич

Томский политехнический университет
Кафедра высшей математики и математической физики
Томск
sme@tpu.ru

Аннотация. В статье рассматривается компетентностный подход к принятию решения в обучающе-тестирующих системах на основе смешанных диагностических текстов, нечеткой и пороговой логики. Излагается предыстория исследования, формулируется задача построения смешанного диагностического теста в рамках компетентностного подхода к обучению, приводится неформальное описание алгоритма построения смешанных диагностических тестов с одновременным принятием решения в обучающе-тестирующих системах. Показывается, что предлагаемый подход оценки компетенций студентов и выпускников позволяет сосредоточиться на индивидуальных результатах обучения каждого студента. Конструирование прикладной интеллектуальной обучающе-тестирующей системы предлагается осуществлять на основе интеллектуального инструментального средства ИМСЛОГ. Обсуждается проведение дальнейших исследований.

Ключевые слова. Нечеткая логика, пороговая логика, принятие решений, смешанные диагностические тесты, интеллектуальная обучающе-тестирующая система, дидактические единицы учебной дисциплины, компетентностный подход.

1 Введение

Большое значение при принятии решений по оценке компетенций студентов и выпускников вузов в настоящее время приобретает применение математического аппарата нечеткой и пороговой логики, смешанных диагностических тестов в интеллектуальных обучающе-тестирующих системах [1].

Под компетентностным подходом будем понимать метод моделирования результатов обучения и их представления как норм качества высшего образования. Результаты данного подхода представляют собой наборы компетенций, включающие знания, понимание и навыки обучаемого, которые определяются как для каждого раздела дисциплины, так и для дисциплины в целом [1]. В текущем учебном году высшая школа России переходит на Федеральные государственные образовательные стандарты. При этом одной из самых актуальных задач является создание обучающих, контролируемых и тестирующих систем для оценки знаний студентов и выпускников, в том числе в целях государственной аккредитации образовательных учреждений, плановых и внеплановых проверок,

внутривузовских систем мониторинга качества образования.

Данная публикация является продолжением исследований, опубликованных в [2-7]. Для оценки компетенций студентов и выпускников в статье предлагается развитие методов построения смешанных диагностических тестов (СДТ) к принятию решений в интеллектуальной системе на основе нечеткой и пороговой логики.

Одним из эффективных средств оценки знаний студентов являются диагностические тесты, которые в исследованиях [8] включены в состав закономерностей, используемых при принятии решений в интеллектуальных системах, основанных на тестовых методах распознавания образов.

Использование компетентностного подхода для оценки знаний обучающихся не ново. В рамках Болонского процесса Российская высшая школа осваивает данный подход, который рассматривается как инструмент усиления социального диалога высшей школы с рынком труда, путем усиления их сотрудничества [9, 10]. В данной публикации приводится предыстория и постановка задачи для применения компетентностного подхода к принятию решений в обучающе-тестирующих системах на основе нечеткой и пороговой логики.

2 Основные определения. Предыстория. Постановка задачи

Основные определения приведены в публикациях [2-6]. В данной публикации нами впервые предлагается проводить оценку компетенций знаний студентов и выпускников с использованием смешанных диагностических текстов на основе нечеткой и пороговой логики.

Компетенции это единый язык для описания академических и профессиональных профилей и уровней образования. Результаты образования, выраженные на языке компетенций, являются путем к расширению академического и профессионального признания и мобильности, к увеличению сопоставимости и совместимости дипломов и квалификаций.

Компетенции – это знания, представления, программы действий, системы ценностей и отношений обучаемого (тестируемого) [1, 9].

В данном исследовании предлагается использовать смешанные диагностические тесты [11, 12], явившиеся новой парадигмой создания интеллектуальных систем, основанных на тестовых методах распознавания образов. Преимущества смешанных диагностических тестов заключается в применении последовательности предъявляемых к решению задач, от которой также существенно зависит объем усвоенного материала (дидактических единиц) и в том, что принятие решений осуществляется одновременно с построением смешанного диагностического теста.

Сопоставим разделам внутри дисциплины основной образовательной программы (ООП) групповые характеристические признаки, а дидактическим единицам – характеристические признаки.

Будем считать тест *диагностическим*, если в результате его прохождения студенту доступен правильный результат и *проверяющим*, если доступен только итоговый результат. Предполагается, что студенты (респонденты) по итогам тестирования разбиты на два класса: соответствующих и несоответствующих требованиям федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) в рамках компетентного подхода к оценке результатов обучения [10], также как дисциплины, предъявляемые к тестированию.

Тест на основе СДТ считается успешно пройденным, если оценка респондента достигла среднюю величину (среднее арифметическое) из возможного количества баллов. После прохождения теста респондент получает описательную характеристику (например, плохо, удовлетворительно, хорошо, отлично, что соответственно, означает: материалом не владеет, удовлетворительно владеет материалом, хорошо владеет материалом, владеет материалом на высоком уровне).

Обоснованность, эффективность и перспективность применения смешанных диагностических тестов связаны с возможностью последовательного извлечения информации об исследуемом объекте для условной составляющей смешанного диагностического теста, с преимуществами использования безусловных составляющих тестов при построении решающих правил [12, 13], а также с целесообразностью применения смешанных диагностических тестов при организации интеллектуального интерфейса (построения опросника) [14].

Сформулируем задачу, решаемую в данной публикации. *Постановка задачи.* Дана дисциплина, разбитая на разделы, каждый из которых состоит из дидактических единиц.

Необходимо в рамках компетентного подхода для рассматриваемой дисциплины и каждого раздела дисциплины построить смешанный диагностический тест с использованием элементов нечеткой и пороговой логики.

Отметим, что построение СДТ производит высококвалифицированный эксперт в соответствующей проблемной области (изучаемой учебной дисциплины).

3 К методике построения смешанных диагностических тестов

Для контроля компетенций студентов и выпускников могут быть использованы различные модели: автоматные, графовые (сетевые, древовидные) [15-18] и другие.

В рамках традиционного подхода оценка результата решения задач не зависела от оптимальности пути, по которому было получено решение. В то время как в рамках автоматных, графовых моделей [15-18] оценка результата зависела от оптимальности пути, по которому было получено решение. В рамках нового компетентного подхода к оценке результатов обучения [10] для анализируемого списка дисциплин высококвалифицированный специалист в данной проблемной области знаний должен разбить множество разделов каждой дисциплины на подмножества. В рамках компетентного подхода к принятию решению в обучающе-тестирующих системах на основе СДТ, нечеткой и пороговой логики оценка результатов также зависит от оптимальности пути, по которому получено решение.

СДТ включает безусловную и условную составляющие смешанного диагностического теста.

Первое подмножество признаков (вопросов) включает безусловную составляющую смешанного диагностического теста, т. е. разделы дисциплины (групповые характеристические признаки), а также дидактические единицы (характеристические признаки), которые предъявляются студентам (респондентам) в произвольном порядке следования. Безусловная составляющая смешанного диагностического теста содержит задания в виде вопросника, решение которого необходимо всегда знать при прохождении тестирования [3]. Результат прохождения безусловной составляющей СДТ оценивается по двоичной шкале «правильно-неправильно».

Второе подмножество признаков (вопросов) включает условную составляющую СДТ. На первом уровне условной составляющей представлены задания, для выполнения которых студент самостоятельно должен

выбрать один из изученных способов решения. Это позволяет оценить не только полученные знания при изучении дисциплины (дидактической единицы), но и умения пользоваться ими. Результат прохождения второго уровня условной составляющей СДТ оценивается по нечеткой шкале с учетом частично правильно решенных заданий.

На последующих уровнях условной составляющей СДТ студенту (респонденту) предъявляются задания, для решения которых необходимо применить комплекс умений, комбинировать различные способы решения и использовать знания из разных дидактических единиц данной и других учебных дисциплин. Результат прохождения этих уровней условной составляющей СДТ оценивается по нечеткой шкале с учетом частично правильно решенных заданий.

После прохождения СДТ компетенции студента оцениваются суммарным баллом, полученным за выполнение всех заданий. Предлагаемые подходы использования нечеткой логики позволяют сделать выводы об уровне знаний, навыков и умений каждого студента и выдать ему рекомендации по формированию дальнейшей траектории обучения.

Корневой вершине дерева поиска сопоставляется безусловная составляющая смешанного диагностического теста. Предъявление группового характеристического признака (характеристического признака) из второго подмножества – условной составляющей теста – зависит от того, какой предыдущий признак был предъявлен на соответствующем уровне дерева поиска. Каждая ветвь дерева представляет собой допустимую последовательность действий по выбору раздела (дидактической единицы), приводящая к листу (концевая вершина дерева поиска). Каждому листу сопоставляется результат прохождения теста.

Следует отметить, что порядок следования признаков на одном уровне дерева поиска не имеет значения. Обход ветвей дерева поиска осуществляется слева направо.

4 Схема прохождения обучения, контроля, тестирования

На рис. 1 приведена концептуальная схема прохождения обучения, контроля, тестирования в обучающе-тестирующей системе. В верхней части рис. 1 приведена таблица. Строкам таблицы сопоставлены тестовые вопросы, предъявляемые студенту (респонденту) при прохождении безусловной составляющей теста. Столбцам таблицы сопоставлены номера ответов респондента, где n – число вопросов (мощность безусловной составляющей теста), k – максимальное

число различных ответов. Элемент таблицы, лежащий на пересечении i -ой строки и j -го столбца, задает вес j -го ответа по i -му вопросу, $0 \leq a_{ij} \leq 1$. В результате прохождения безусловной составляющей СДТ вычисляется средний вес ответа по всем вопросам. Заметим, что максимальное число ответов на вопрос равно k , причем количество ответов не на все вопросы могут достигать величины k , что не показано на рис. 1.

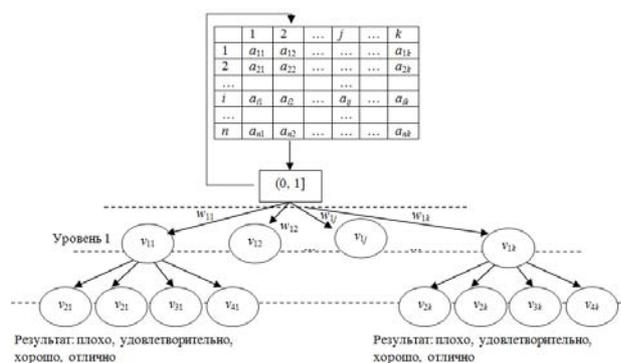


Рис. 1: Концептуальная схема прохождения обучения (контроля, тестирования) в обучающе-тестирующей системе.

Если респондент набрал наперед заданную величину p ($0 \leq p < 1$) для данной дисциплины или дидактической единицы, то, в случае обучения, он допускается к прохождению условной составляющей СДТ, представленной в виде графа в нижней части рис. 1. В случае контроля (тестирования), если заданная величина p не достигнута, то студент (респондент) не допускается к прохождению условной составляющей СДТ. При обучении студент (респондент) проходит повторное изучение материала по разделам дисциплины, по которым набрана величина ниже наперед заданного значения p_r ($p_r < p$).

5 Неформальное описание алгоритма

В данном разделе приведем неформальное описание алгоритма построения СДТ, используемого для принятия решения в интеллектуальной обучающе-тестирующей системе в условиях неопределенности. Под неопределенностью будем понимать степень усвоения знаний, понимания и навыков обучаемого (тестируемого). С целью обеспечения в рамках компетентного подхода триады – "знать, уметь и применять".

Вопросник в рамках компетентного подхода формируется исходя из набора компетенций по изучаемому разделу (дисциплине), т.е. должен включать вопросы по выявлению знаний, умений и навыков обучаемого (тестируемого).

Перед началом работы алгоритма необходимо указать режим использования СДТ (обучение, контроль, тестирование). Далее для каждой дисциплины или дидактической единицы необходимо выполнить следующий алгоритм формирования очередного СДТ:

1. Присвоить каждому вопросу (каждой компоненте безусловной и условной составляющих СДТ) вес в интервале от 0 до 1 каждому вопросу.
2. Сгенерировать безусловную составляющую очередного СДТ.
3. Найти вес безусловной составляющей СДТ, равный сумме весов всех компонент безусловной составляющей СДТ.
4. Вычислить набранную респондентом сумму весов ответов по компонентам безусловной составляющей СДТ.
5. Сравнить сумму, набранную в пункте 4 с наперед заданной величиной p . Если набранная сумма больше величины p , то перейти к пункту 8.
6. При обучении, если респондент не набрал требуемую сумму весов ответов, то перейти к пункту 7. В случае тестирования принять решение о неудовлетворительной оценке результата и выдать рекомендацию на повторное прохождение обучения. Перейти к пункту 15.
7. Выдать рекомендации респонденту по итогу прохождения безусловной составляющей СДТ. Перейти к пункту 2.
8. Сгенерировать первую условную составляющую СДТ.
9. Предъявить респонденту очередную условную составляющую рассматриваемого СДТ. Определить вес ответа по рассматриваемой условной составляющей.
10. Увеличить сумму весов ответов респондента на вес полученного ответа по очередной условной составляющей СДТ.
11. Проверить предъявлены ли респонденту все условные составляющие СДТ. Если нет, то сгенерировать следующую условную составляющую СДТ и перейти к пункту 9.
12. Проанализировать набранную сумму весов ответов респондента по итогу прохождения СДТ.
13. Выставить оценку респонденту, т.е. принять решение по прохождению СДТ на основе набранного суммарного веса ответов.
14. Если оценка удовлетворяет критерию прохождения теста, то перейти к пункту 15. Иначе выдать рекомендации респонденту по итогу прохождения условной составляющей СДТ. перейти к пункту 2.
15. Конец.

7 Заключение

Впервые предложено в рамках компетентного подхода осуществлять принятие решений в интеллектуальных обучающе-тестирующих системах на основе нечеткой и пороговой логики, а также в целях обучения, контроля и тестирования применять

смешанные диагностические тесты, использование которых позволяет одновременно с построением СДТ принимать решение.

Предлагаемый подход проведения оценки компетенций студентов и выпускников позволяет сосредоточить внимание на индивидуальных результатах каждого респондента.

Описана предыстория исследований применения диагностических тестов для построения обучающих и тестирующих интеллектуальных систем.

Кратко изложена методика построения смешанных диагностических тестов.

Приведена схема прохождения обучения, контроля и тестирования в обучающе-тестирующей системе, дано неформальное описание алгоритма построения смешанных диагностических тестов с использованием элементов нечеткой логики для оценки знаний, как в целях обучения (контроля), так и тестирования.

Предложенный алгоритм предполагается реализовать в интеллектуальной обучающе-тестирующей системе, построенной на основе ИИС ИМСЛОГ [14].

В дальнейшем планируется провести исследования, которые позволят выбрать при компетентном подходе для каждой дисциплины, разбитой на разделы, состоящей из дидактических единиц, наиболее адекватную структурную среднюю величину (мода, медиана, среднее геометрическое, гармоническое или другое).

Кроме того, предлагается проведение исследований для выработки рекомендаций эксперту (программному агенту) по определению веса тестовых заданий, а именно, веса каждой компоненты условной и безусловной составляющих смешанного диагностического теста в зависимости от количества вариантов ответов и типа тестового задания (например, вопросы с единственным или множественным выбором, вопросы с открытым ответом, вопросы на упорядочение и соответствие). Предлагаемый компетентный подход может быть использован для решения задач из различных проблемных и междисциплинарных областей (геоинформатика, медицина, геобиомедицина, дискретная математика, психология, социология, экология), проблематика которых представлена в следующих публикациях [15-20].

Благодарности

Работа поддержана РФФИ, грант №10-01-004-62-а, грант № 11-07-98015-р_сибирь_а.

Литература

- [1] Кривов В.Д. и др. Разработка инновационных подходов к обучению в сфере информационно-аналитического обеспечения деятельности органов государственного управления // В.Д. Кривов, Н.А. Мамедова, В.В. Крупенков, А.А. Мельников. М.: Издательство "Академия Естествознания". 2010. [Электр. ресурс]. Режим доступа <http://www.rae.ru/monographs/68>. – Заглав. с экрана. Рус. яз. (10.02.2012).
- [2] Янковская А.Е., Семенов М.Е. Построение смешанных тестов в системах контроля качества образования/ Информационные технологии будущего и современное электронное обучение. Материалы международной научной конференции (Modern IT &(e-) Learning). – Астрахань: ООО "Типография "НОВА"". – 2009. – С. 125-129.
- [3] Yankovskaya A., Semenov M. Foundation of the Construction of Mixed Diagnostic Tests in Systems for Quality Control of Education // Proceedings of the 13th IASTED International Conference Computers and Advanced Technology in Education (CATE 2010) 23-25 August 2010, Maui, Hawaii, USA. – 2010. – P. 142-145.
- [4] Янковская А.Е., Семенов М.Е. Принятие решений в обучающе-тестирующих системах в условиях неопределенности // Труды X международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий / под ред. О.Ю. Воробьева. – Красноярск: КГТЭИ, СФУ, 2011. – С. 382-388.
- [5] Yankovskaya A.E., Semenov M.E. Intelligent System for Knowledge Estimation on the Base of Mixed Diagnostic Tests and Elements of Fuzzy Logic // Proceedings of the IASTED International Conference on Technology for Education (TE 2011) 14-16 December 2011, Dallas, USA. – 2011. – P.108-113.
- [6] Янковская А.Е., Семенов М.Е. Принятие решений в интеллектуальных обучающе-тестирующих системах, основанное на смешанных диагностических тестах // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2012. – №1. – С. 47-56.
- [7] Yankovskaya A., Semenov M. Computer Based Learning by Means of Mixed Diagnostic Tests, Threshold Function and Fuzzy Logic // Proc. of The 7-th IASTED International Conference on Human-Computer Interaction (HCI 2012), May 14-16, 2012, Baltimore, USA (принято в печать).
- [8] Янковская А.Е. Логические тесты и средства когнитивной графики в интеллектуальной системе// Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Доклады 3-ей Всерос. конф. с международным участием. – Томск: изд-во СО РАН, 2000. – С. 163-168.
- [9] Хроника эксперимента на факультете информатики Томского государственного университета [Электр. ресурс]. Режим доступа http://www.inf.tsu.ru/WebDesign/finf2.nsf/structurl/bpros_bpr6. – Заглав. с экрана. Рус. яз. (15.02.2012).
- [10] Федеральный экзамен в сфере высшего профессионального образования [Электр. ресурс]. Режим доступа <http://www.интернет-экзамен.рф>, свободный. – Заглав. с экрана. Рус. яз. (15.03.2012).
- [11] Yankovskaya A. Design of Optimal Mixed Diagnostic Test With Reference to the Problems of Evolutionary Computation // Proc. of the First International Conference on Evolutionary Computation and Its Applications, Moscow, 1996, EVCA'96. – P. 292-297.
- [12] Янковская А.Е., Ильинских Н.Н., Черногорюк Г.Э., Кузоваткин А.Н. Результаты исследований алгоритма принятия решений непосредственно в процессе построения смешанных диагностических тестов, реализованного в интеллектуальных биомедицинских системах// Естествознание и гуманизм. Сб. научных трудов. Т. 1. № 3. – Томск: Издание СибГМУ, 2004. – С. 95-99.
- [13] Янковская А.Е., Кузоваткин А.Н. Принятие решений в интеллектуальном инструментальном средстве ИМСЛОГ-2002 на основе смешанных диагностических тестов// Информационные системы и технологии (ИСТ-2003). Материалы международной конференции. Том 3. – Новосибирск: изд-во НГТУ, 2003. – С. 182-186.
- [14] Yankovskaya A.E., Gedike A.I., Ametov R.V., Bleikher A.M. IMSLOG-2002 Software Tool for Supporting Information Technologies of Test Pattern Recognition// Pattern Recognition and Image Analysis. – 2003. – Vol. 13. – No. 4. – P. 650-657.
- [15] Yankovskaya A. & Yevtushenko N. FSM-Based Knowledge Representation in a Computer Tutoring system // Proc. of the ICCE 95, USA, Singapore, 1995. – P. 66-72.
- [16] Yankovskaya A., Yevtushenko N. Finite State Machine (FSM) – Based Knowledge Representation in a Computer Tutoring System // New Media and Telematic Technologies for Education in Eastern European Countries. Ed. by P. Kommers & etc. Twenty University Press Enshede, 1997. – P. 67-74.
- [17] Yankovskaya A., Yevtushenko N., Parshina N. FSM-based Model of Computer Tutoring System // Proc. of the International Conference ISEL. Tools and Application, Austria, Villach, 1999. – P. 5.
- [18] Евтушенко Н.В., Паршина Н.А., Янковская А.Е. Автоматная модель контроля знаний в интеллектуальных обучающих системах// В сб.: Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. – Томск: изд-во ТГУ, 1999. – С. 60-66.
- [19] Yankovskaya A., Semenov M. To the problem about the intelligent extension construction of the geoinformational systems // Proceedings of 8th Open German-Russian Workshop "Pattern Recognition and Image Understanding" OGRW-8-11, Nizhny Novgorod, 2011. – P. 349-352.
- [20] Янковская А.Е., Семенов М.Е., Китлер С.В. Уточнения пространственной структуры модели местности с использованием интеллектуальной технологии// Системы проектирования технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2011). Труды 11-й международной конференции. Под ред. Е.И. Артамонова. М.: Институт проблем управления РАН. – 2011. – С. 111-114.

Математическая модель для диагностики технического состояния горного оборудования

Татьяна Александровна Янковская

Сибирский федеральный университет
Институт космических и информационных технологий
Красноярск
tajanko@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрен общий подход к построению математической модели диагностики технического состояния горного оборудования. Приведено общее описание модели, ее входных и выходных параметров, сформулированы критерии для их выбора, принципы построения экспертной системы диагностики.

Ключевые слова. Математическая модель, вибродиагностика, анализ состояния, экспертная система.

1 Введение

Отечественный и зарубежный опыт показывает, что внедрение средств диагностирования является одним из важнейших факторов повышения экономической эффективности использования оборудования в промышленности. Назначение диагностики – это выявление и предупреждение отказов и неисправностей, поддержание эксплуатационных показателей в установленных пределах, прогнозирование состояния в целях полного использования доремонтного и межремонтного ресурса. Общим для задач технического диагностирования горного оборудования является определение доминирующего повреждения, на основании которого дается оценка остаточного ресурса и назначаются компенсирующие мероприятия и мониторинг изменения технического состояния машин.

В отечественной и зарубежной практике используются два основных направления, связанных с оценкой состояния машин по их вибрации:

- *вибрационный мониторинг*, под которым понимается наблюдение за изменением вибрационных показателей машины и оценка ее технического состояния ("допустимо", "требуется принятие мер", "недопустимо");
- *вибрационная диагностика*, когда обнаруживаются и идентифицируются дефекты, приводящие к прогнозируемому техническому состоянию.

С точки зрения методов технической диагностики и неразрушающего контроля сегодня метод пассивного акустического неразрушающего контроля, основанный на анализе параметров (иногда говорят, спектра) вибрации, возникающей при работе объекта контроля, называют *вибрационнодиагностическим методом* [1-3,8].

В настоящее время разрабатываются системы вибрационной диагностики, которые решают

одновременно задачи вибрационного мониторинга и диагностики. Однако апробированных и эффективных систем вибрационной диагностики на рынке программных продуктов явно недостаточно.

В связи с этим, актуальной является проблема разработки методик диагностирования и создания программного комплекса вибродиагностического обследования горных машин. Целью которого, является автоматизация процесса диагностики позволяющего проводить детальный анализ технического состояния оборудования с определением дефектов по данным вибрации (временной сигнал, спектр временного сигнала), а так же визуальное изображение: чертеж либо 3D-модель агрегата, в котором обнаружены дефекты [5-7].

2 Формулировка общей задачи диагностики

Для решения задач диагностики технологического состояния оборудования с практической точки зрения наиболее применимы экспериментальные методы, которые позволяют создавать модели объектов по результатам измерения их входных и выходных величин. Процесс построения моделей этих объектов называют *идентификацией* [3].

В общем случае под идентификацией понимают определение структуры и параметров математической модели, которые обеспечивают наилучшую близость выходных величин модели и объекта в смысле заданного критерия при совпадающих входных воздействиях.

Общий подход при построении диагностических моделей предложен в [1,2,4,8] и заключается в следующем.

Предположим, что состояние объекта диагностирования можно оценить набором диагностических параметров, представленным в виде некоторого вектора

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\},$$

где d_i – фактор, характеризующий состояние i -го объекта, $i = 1, 2, \dots, n$.

Будем считать, что параметры d_i являются диагностическими признаками только в том случае, если они могут быть непосредственно измерены или вычислены на основе измеренных параметров диагностируемого объекта. А также, если они являются функцией структурных параметров объекта p_j ($j = 1, 2, \dots, m$), состояние которых необходимо контролировать и

изменение их может привести к появлению отказа в диагностируемом объекте:

$$d_i = f_i(p_1, p_2, \dots, p_m).$$

В этом случае определение текущих значений диагностических факторов d_i и сравнение их с эталонными значениями параметров d_i^{ST} , величины которых определены априори и соответствуют нормальному (бездефектному) состоянию технической системы, позволяют в принципе осуществить оценку состояния всей системы.

Такой подход является особенно эффективным, если необходимо различить только два состояния диагностируемой системы, одно из которых соответствует отсутствию, а другое - наличию дефекта. В этом случае выход одного или нескольких диагностических признаков за заранее заданные пределы является признаком наличия в технической системе какой-либо неисправности (например, трещины в конструкции, разбалансировки ротора и т.д.).

Как известно из практики, при тестовых испытаниях агрегатов и тем более при диагностике, в режиме нормального функционирования диагностируемой системы неизбежна вариация значений параметров d_i измеренных в различные моменты времени при гарантированном отсутствии каких-либо неисправностей или дефектов в системе. При определении эталонных значений диагностических показателей d_i^{ST} необходимо устанавливать и пределы допустимых отклонений $\Delta d_{i \max}$ для бездефектного состояния объекта, т.е. пороговых значений $d_{i \max}^{ST}$ ($d_{i \min}^{ST}$), набор которых соответствует границе работоспособности объекта.

При разработке алгоритмов диагностирования горного оборудования необходимо учитывать главным образом статистически значимые отклонения от нормы компонентов диагностического вектора состояния ΔD . В нашем случае будем считать, что $\Delta D_i \approx D$, так как в целях получения наиболее достоверной информации объекты диагностирования работали в режиме холостого хода.

Считая, что изменение со временем наработки технической системы какого-либо ее структурного параметра (появление дефекта) может привести к изменению одного или нескольких (и даже всех) диагностических признаков-компонентов вектора D , в общем случае каждому j -му структурному параметру можно поставить в соответствие n -мерный вектор диагностических признаков:

$$D_j = (s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{nj}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

что и является основой для решения задачи распознавания вида неисправности в процессе диагностики оборудования.

Однако также следует учитывать, что при относительно малой размерности вектора D различным дефектам могут соответствовать одинаковые изменения значений параметров d_i . В таком случае диагностическая модель, использующая эти параметры, может применяться для решения упрощенной задачи определения отсутствия или наличия дефектов без их классификации. Текущее состояние сложной технической системы зависит от скорости и характера протекающих в ней физических и химических процессов, в результате которых в силу деградиционных явлений и могут возникать дефекты в виде износа, появления трещин, ослабления крепления и т.д. Для выявления этих дефектов, необходимо проводить диагностические испытания либо в режиме нормального функционирования, либо подавая на вход тестовые сигналы.

В вибросигналах, снимаемых в контролируемых точках технической системы, содержится информация о входных воздействиях, что можно выразить в виде:

$$\bar{x}(t) = X \{ \bar{u}(t), \bar{p} \},$$

где $\bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\}$ – вектор выходных сигналов; $\bar{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)\}$ – вектор входных воздействий; $\bar{p}(t) = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ – вектор структурных параметров.

Таким образом, обработав выходные сигналы, получим их характеристики, являющиеся диагностическими признаками:

$$D = L \{ \bar{x}(t) \},$$

где L – оператор преобразования.

В итоге имеем

$$D = A \{ \bar{p} \}.$$

Здесь A – оператор, характеризующий преобразование параметров технического состояния p_i в пространство диагностических признаков.

Математическая модель задачи диагностики при таком представлении может быть выражена обратной зависимостью вида:

$$\bar{p} = A^{-1}\{D\}, \quad (2)$$

где A^{-1} – оператор, обратный A .

Выражение (2) представляет в самом общем виде связь между пространством параметров, характеризующих состояние технической системы, и пространством

диагностических признаков, т. е. является *диагностической моделью системы*. При этом для решения задачи диагностики не имеет принципиального значения, какой конкретный вид имеет эта модель. Главным требованием к модели является только наличие связи (1), и именно по этой причине для получения диагностических моделей может быть использован специальный математический аппарат, в том числе и такой, который не применяется при идентификации объектов управления.

В настоящее время обычно при проведении анализа полученного вибродиагностического сигнала используют аппарат спектрального анализа - быстрое преобразование Фурье. Так как в каждой области частот вибрация имеет свои физические особенности и вибросигнал носит случайный характер или имеет зашумление, что оказывает влияние на выбор вибродиагностических параметров и методов диагностирования. Рассмотрим обобщенный алгоритм диагностики оборудования.

3 Алгоритм задачи диагностирования

В отечественной литературе, например, [1-3,8] рассматривается методология технической диагностики оборудования, включающая в себя описание их бездефектных состояний и состояний с различными видами дефектов, выбор контролируемых параметров состояния и/или диагностических сигналов, оптимизацию диагностических параметров и средств их измерения и, наконец, составление алгоритмов постановки диагноза и прогноза.

При составлении алгоритмов диагностики обычно возможные состояния объектов разбивают на два подмножества: работоспособные и неработоспособные состояния.

Для подмножества работоспособных состояний составляются алгоритмы определения и прогноза степени работоспособности объекта, поиска дефектов, а для подмножества неработоспособных состояний – только алгоритмы поиска неисправностей (дефектов). Процесс формирования технического диагноза представлен в виде структурной схемы (Рис. 1).

В нашей работе мы рассматриваем виброакустическую диагностику, которая дает наиболее эффективные результаты в основном тогда, когда объект может функционировать и в нем формируются колебательные силы, возбуждающие вибрацию и/или шум. Поэтому в виброакустической диагностике множество состояний объекта разбивается минимум на два подмножества – множество бездефектных состояний и множество состояний с дефектами (неисправностями), при которых объект остается работоспособным, но степень его

работоспособности снижается. Те же состояния, когда объект теряет работоспособность, исключаются из рассмотрения [3,8].

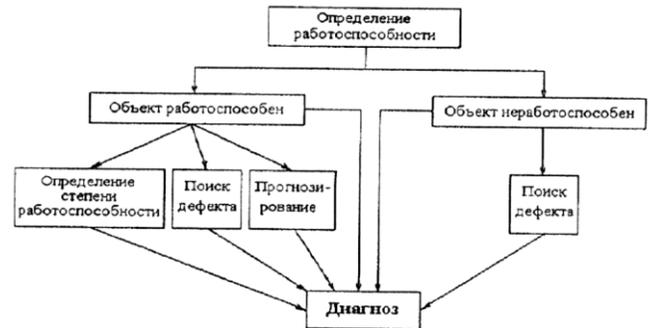


Рис. 1: Структурная схема формирования технического диагноза.

Рассмотрим основные допущения, при которых составляется обобщенный алгоритм диагностики.

1. Объект может находиться в конечном множестве состояний S , разделяемом на два подмножества: S_1 – (бездефектные состояния, различающиеся, например, режимами работы объекта) и S_2 – (состояния с различными видами дефектов, при которых объект остается работоспособным). При этом каждое состояние из подмножества S_2 отличается степенью или некоторым запасом работоспособности.

Состояние диагностируемого объекта характеризуется совокупностью диагностических показателей d_1, d_2, \dots, d_n , которая представляет собой вектор состояния D :

$$D = (d_1, d_2, \dots, d_n).$$

Диагностические показатели могут представлять собой параметры или характеристики. В качестве параметров могут быть использованы, например, уровень вибрации агрегата или акустического шума, давление, температура и т.п. В качестве характеристик могут быть использованы показатели, характеризующие форму кривой, например, огибающая спектра сигнала вибрации или шума («маска»), затухание, крутизна и т.п. Условие работоспособности в этом случае задают областью работоспособности исходя из следующих предположений:

- вектор состояний оборудования определен;
- существует номинальный вектор состояний;
- отклонения вектора состояний от номинального допускаются только в определенных пределах;
- допустимые отклонения определяют область работоспособности.

2. Условия работоспособности для случаев использования в качестве диагностического показателя параметров или характеристик задают по-разному.

Очень часто при диагностировании машин и оборудования вибрацию любого агрегата характеризуют также одним диагностическим нормируемым параметром d_i : вибросмещением, виброскоростью или виброускорением (иногда еще и резкостью – производной от виброускорения). Если в качестве диагностического показателя используется один параметр, то условия работоспособности будем задавать неравенствами, ограничивающими его значение с одной или с двух сторон.

Таким образом, объект работоспособен, если все неравенства выполняются:

$$d_i > d_{in}, d_i < d_{ib},$$

или

$$d_{in} < d_i < d_{ib},$$

где d_{ib} , d_{in} , d_{ib} – соответственно, текущее, нижнее допустимое и верхнее допустимое значения диагностического параметра.

3. Каждый из диагностических показателей состояния d_j может определяться по совокупности диагностических параметров d_{j1}, \dots, d_{jn} :

$$d_j = d_{j1}, \dots, d_{jn}.$$

4. Для каждого диагностического параметра d_i существует номинальное значение d_{oi} , область допустимых отклонений Δ_{oi} и предельное отклонение (порог опасного изменения параметра) Δ_i^{np} , при превышении которого объект считается неработоспособным и должен быть остановлен.

Объект считается бездефектным, если для каждого параметра выполняется неравенство

$$|d_i - d_{oi}| \leq \Delta_{oi},$$

где Δ_{oi} – порог допустимого отклонения.

Объект считается неработоспособным, если хотя бы для одного из параметров выполняется неравенство

$$|d_i - d_{oi}| > \Delta_i^{np},$$

где Δ_i^{np} – порог опасного изменения параметра.

Во всех других случаях объект имеет ограниченную работоспособность.

В качестве диагностических показателей могут использоваться не только параметры, но и характеристики объекта $y = f(x)$, где x и y – входная и выходная переменные соответственно. В последнем

случае условие работоспособности объекта определяется степенью отклонения $\rho_p(f, \varphi)$ текущей характеристики $f(x)$ объекта от номинальной $\varphi(x)$:

$$\rho_p(f, \varphi) = \left[\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, p > 0,$$

где p – фиксированный параметр, определяющий критерий принятия решения о степени отклонения текущей характеристики от номинальной.

При $p = 1$ получаем оценку среднего отклонения (критерий среднего отклонения):

$$\rho_1(f, \varphi) = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx,$$

При $p = 2$ получим среднеквадратическое отклонение, т.е. большее отклонение будет иметь больший вес (критерий среднеквадратического отклонения):

$$\rho_2(f, \varphi) = \left[\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

При $p = \infty$ основной вклад в выражение вносит только одно максимальное отклонение (критерий равномерного приближения):

$$\rho(f, \varphi) = \sup |f(x) - \varphi(x)|; x \in (a, b).$$

В общем случае условие работоспособности представляется в виде:

$$\rho_p(f, \varphi) \leq \xi,$$

где ξ – допустимое отклонение.

Если характеристики $y = f(x)$ оцениваются по точкам на ограниченном интервале значений входной переменной $x \in a, b$, то условие работоспособности задают в виде неравенств для каждой точки:

$$|f(x_i) - \varphi(x_i)| < \xi_i; i = \overline{1, n}.$$

Полагают, что объект работоспособен, если последние неравенства выполняются для всех без исключения точек, входящих в диапазон (a, b) . Сложные объекты в целом оцениваются как работоспособные при условии работоспособности каждого его узла или структурной единицы.

В случаях ограниченной работоспособности контролируемого объекта при любой степени (запасе) его работоспособности задачами диагностики являются

идентификация и прогноз развития имеющихся дефектов.

4 Общие принципы построения диагностической системы

Созданный 2002 г. в СФУ при Институте горного дела, геологии и геотехнологий Центр диагностирования электромеханических систем горно-металлургических предприятий проводит обследование горного оборудования, отработавшего нормативный срок эксплуатации в целях определения возможности и срока его дальнейшей безопасной эксплуатации. Наиболее распространенным из обследуемых выемочно-погрузочных машин являлся экскаватор ЭКГ-5А. Начиная с 2002 г. и по настоящее время собрана информация о техническом состоянии 25 экскаваторов данного типа, работающих на разрезах Красноярского края.

В настоящее время описан алгоритм диагностического, визуального обследования [6] - экскаватора ЭКГ-5А, как самой распространенной горной машины в нашем крае, учитывающий особенности его работы в конкретных условиях. В состав ЭКГ-5А входят основные механизмы: пятимашинный преобразовательный агрегат, механизм привода поворота, механизм привода хода, механизм привода подъема.

Диагностическое обследование карьерного экскаватора ЭКГ-5А производится по следующим правилам:

1. Для измерения вибрации используется вибронализатор модели СД-21 (ООО «Ассоциация ВАСТ», г. Санкт-Петербург).
2. Первичный сигнал снимается с помощью вибропреобразователя типа 603М127.
3. В качестве численной характеристики вибрации используется среднеквадратическое значение виброскорости, а также пиковое значение виброперемещения и виброускорения.

Точки контроля вибрации вращающегося оборудования при решении задач вибрационного контроля выбираются на подшипниковых узлах, причем вибрация измеряется на каждом узле в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Два из них, вертикальное и горизонтальное, должны быть перпендикулярны оси вращения, третье – вдоль оси вращения.

Для того чтобы не потерять диагностическую информацию при анализе периодических сигналов, использовались технические средства для узкополосного спектрального анализа сигналов с большим разрешением по частоте, что легко осуществляется с помощью цифровых методов Фурье анализа сигналов. Отметим, что этот вид анализа периодических сигналов считается

необходимым и достаточным для использования алгоритмов и программного обеспечения разрабатываемого для основных механизмов экскаватора ЭКГ-5А.

База данных дефектов основана на информации, представленной в работах [2,3].

Основной диагностической информацией в спектре сигнала является: частота основной гармоники, уровень (амплитуда) основной и кратных гармоник. Единственным входным параметром является частота вращения ротора, выходными параметрами: массив информативных частот и их амплитуда.

5 Итоги и выводы

В работе представлены предварительные результаты построения и формализации математической модели, лежащей в основе разрабатываемой экспертной системы диагностики горного оборудования.

На основе данной математической модели и формализованного алгоритма диагностирования [4-6] разрабатывается программное обеспечение для обработки результатов вибродиагностического обследования горного оборудования.

В целях повышения точности диагностического обследования горного оборудования и облегчения работы экспертов нами и предпринимается попытка создания интеллектуализированной экспертной системы диагностики, обеспечивающей:

- минимизацию времени сбора информации по обследуемому объекту экспертами;
- обмен данными с внешними устройствами;
- математическую обработку результатов обследования;
- визуализацию результатов экспертного, вибродиагностического и дефектоскопического обследования горного оборудования.

В настоящее время рассматривается два подхода к решению поставленной задачи:

- использование методов теории планирования эксперимента при проведении экспериментов по определению статистических характеристик диагностируемого объекта - построении прогностической модели;
- построение системы диагностики, основанной на использовании нечетких множеств, т.е. использующей модель на основе нечетких отношений.

Благодарности

Выражаю искреннюю благодарность организаторам XI Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентологии безопасности за предоставленную мне возможность участия в работе конференции.

Литература

- [1] М. Д. Генкин, А. Г. Соколова. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. М: Машиностроение, 1987.
- [2] А. В. Барков, Н. А. Баркова, А. Ю. Азовцев. Мониторинг и диагностика роторных машин по вибрации. СПб.: Изд. Центр СПбМТУ, 2000.
- [3] А. А. Алексеев, М. Ю. Шестопапов. Идентификация и диагностика систем. М.: Изд.центр «Академия», 2009.
- [4] Т. А. Янковская. Основные задачи структурного синтеза и их классификация. *Труды X Международ. ФАМ конференции по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий*, Красноярск: СФУ, КГТЭИ (под редакцией Олега Воробьева):389-392, 2011.
- [5] В. И. Мигунов, Т. А. Янковская, И. И. Демченко. К вопросу автоматизации вибродиагностирования горного оборудования. *Сб. статей Всероссийской науч.-практ. конф. с междунар. участием.(Ачинск, 28-29 апреля 2011 г.)*, Красноярск: СФУ: 131-133, 2011.
- [6] Т. А. Янковская, Д. Ю. Кривенко, О. Н. Мороз, С. В. Попов. Разработка информационной системы обработки результатов вибродиагностического обследования горного оборудования. *Сб. статей Всероссийской науч.-практ. конф. с междунар. участием (Ачинск, 28-29 апреля 2011г.)*, Красноярск: СФУ:126-128, 2011.
- [7] А. В. Михайленко, Т. А. Янковская, В.И. Мигунов И. И. Демченко, Разработка автоматизированного программного комплекса диагностического обследования горного оборудования. *Материалы XII Всероссийской конференции «Проблемы информатизации региона. ПИР-2011»*, Красноярск: СФУ: 172–178, 2011.
- [8] Ю. А. Епифанцев, С. В. Полищук. Мониторинг и диагностика механических объектов. Новокузнецк: СибГИУ, 2009.

С п и с о к а в т о р о в

Абасов Рагиб Зейнал оглы	40	Лосев Александр Сергеевич	374
Абдикаликов Фархад Абдиджалиевич	45	Лукьянова Наталья Александровна	347
Абдушукуров Абдурахим Ахмедович 45, 49, 51, 288		Мажаров Владимир Федорович	210, 224
Аверченко Евгения Александровна	224	Медницкий Алексей Николаевич	231
Агафонова Людмила Михайловна	56, 59	Михайлова Елена Владимировна	234
Амельчугов Сергей Петрович	62	Моисейченко Екатерина Сергеевна	239
Ашукавичуте Регина Игоревна	70	Москалева С.С.	171
Бабенышев Сергей Валерьевич	210, 224	Мошкович Леонид Иосифович	244
Бабина Ольга Ивановна	244	Муминов Аъзам Латифханович	247
Баранова Ирина Владимировна	72, 80	Мурадов Рустамжон	249
Багуро Алексей Николаевич	86	Мухитдинов Аброр Ахбарович	251
Болховец Владислав Олегович	103	Назаров Анатолий Андреевич	183
Бурцева Яна Игоревна	91	Нартов Яков Викторович	253, 309
Быкова Валентина Владимировна	95, 103, 105	Наумов Анатолий Александрович	257, 261, 267, 273, 279
Веретнова Ксения Юрьевна	107	Никишов Виктор Николаевич	234
Воробьев Олег Юрьевич	62, 113, 126, 131, 139	Новачук Анжелика Владимировна	283
Выдрыч Наталья Викторовна	148	Новоселов Аркадий Арсеньевич	285
Газеева Л.Х.	198	Нуритдинов Шамсутдин Нуритдинович	288
Горный Борис Эмануилович	224	Нурмухамедова Наргиза Сайдиллаевна .	51 Обухов
Григорьев Юрий Дмитриевич	152	А.В.	300
Головчанская Елена Васильевна	168	Овчинников Александр Евгеньевич	292
Девятайкин Константин Иванович	388	Олейников Борис Васильевич	293, 297
Демочкин Валерий	16	Осипова Марина Анатольевна	374
Джамирзаев Абдусуннат Абдурахмонович	163	Охроменко А.С.	300
Добронец Борис Станиславович	164, 168	Плотников Никита Юрьевич	224
Доррер Георгий Алексеевич	86, 171	Покидышева Людмила Ивановна	107
Доррер Михаил Георгиевич	175, 186, 192	Попел Егор Викторович	302
Душатов Нурлан Таирбекович	49	Попкова Маргарита Игоревна	307
Елина Мария Вадимовна	328	Попова Ольга Аркадьевна	168, 305
Замахаев Е. В.	182	Рвачев Александр Тимофеевич	62
Захорольная Ирина Алексеевна	183	Родионова Екатерина Владимировна	91
Зырянов Антон Александрович	186, 192	Рыбникова Марина Игоревна	253, 309
Иванова Т.П.	198	Садовский Михаил Георгиевич ...	323, 328, 333, 337
Ивахов Д.С.	182	Саркисов Виген Геннадьевич	343
Имомов Азам Абдурахимович	29	Свинцов Юрий Александрович	105
Калистратов С. А.	182	Семенова Дарья Владиславовна	253, 309, 347
Ким Оксана Эрнестовна	199	Семёнов Александр Трофимович	354, 360
Кирик Екатерина Сергеевна	302	Семенов Михаил Евгеньевич	399
Кирилук Анна Алексеевна	202	Тихонова Ирина Викторовна	224
Китлер Сергей Владимирович	393	Трусова Алла Юрьевна	231, 234
Клокова Ксения Андреевна	333	Турсунов Нурмухаммад	288
Ковязин Сергей Афанасьевич	305	Фишер Евгений Игоревич	219
Комарова Ольга Александровна	80	Харин Александр Александрович	363, 368
Коморовский Витольд Станиславович	86	Хисамутдинова Лариса Викторовна	56, 59
Кочанова Юлия Сергеевна	204	Холмуродов Фарход Маматхонович	372
Кранцевич Артгчм Михайлович	164	Цициашвили Гурами Шалвович	374
Кранцевич Николай Михайлович	164	Черемисин Александр Алексеевич	379
Крупкина Татьяна Валерьевна	210, 224	Шалабай Андрей Игоревич	293, 297
Крюков Сергей Витальевич	279	Шаумаров Борихан	288
Кустицкая Татьяна Алексеевна	34	Ширнаева Светлана Юрьевна	91
Курохтин Виталий Валерьевич	175	Ширяева Людмила Константиновна	382, 388
Кушнаренко Андрей Викторович	379	Де Шпинадель Вера	37
Кушбак кызы Гулиза	215	Янковская Анна Ефимовна	393, 399
Лабик Анастасия Генадьевна	219	Янковская Татьяна Александровна	404
Лебедев Юрий Александрович	221		
Логинова Екатерина Борисовна	337		

List of authors

Abasov Rahib	40
Abdikalikov Farhad	45
Abdushukurov Abdurakhim	45, 49, 51, 288
Agafonova Lyudmila	56, 59
Amelchugov Sergey	62
Ashukyavichute Regina	70
Averchenko Evgenia	224
Babenyshev Sergey	210, 224
Babina Olga	244
Baranova Irina	72, 80
Baturo Alexey	86
Bolchovec Vladislav	103
Burtseva Yana	91
Bykova Valentina	95, 103, 105
Cheremisin Alexander	379
Devyataikin Konstantin	388
Demotchkine Val	16
Djamirzaev Abdusunnat	163
Dobronets Boris	164, 168
Dorrer Georgy	86, 171
Dorrer Michael	175, 186, 192
Dushatov Nurlan	49
Elina Maria	328
Fisher Eugeny	219
Gazeeva L.	198
Golovchanskaya Helena	168
Gorny Boris	224
Grigor'ev Yuri	152
Harin Alexander	363, 368
Hisamutdinova Larisa	56, 59
Holmurodov Farhod	372
Imomov Azam	29
Ivahov D.	182
Ivanova T.	198
Kalistratov S.	182
Kim Oksana	199
Kirik Ekaterina	302
Kirilyuk Anna	202
Kitler Sergey	393
Klokoval Xenia	333
Kochanova Yulia	204
Komarova Olga	80
Komorovski Vitold	86
Kovyazin Sergey	305
Krantsevich Artyom	164
Krantsevich Nikolay	164
Krupkina Tatyana	210, 224
Kryukov Sergei	279
Kustitskaya Tatyana	34
Kushbak kyzy Guliza	215
Kushnarenko Andrei	379
Kurokhtin Vitaliy	175
Labik Anastasya	219
Lebedev Yuri	221
Loginova Ekaterina	337
Losev Alexandr	374
Lukyanova Natalia	347
Majarov Vladimir	210, 224
Mednitskiy Aleksey	231
Mihailova Elena	234
Moiseychenko Ekaterina	239
Moskaleva S.	171
Moshkovich Leonid	244
Mukhitdinov Abror	251
Muminov Azam	247
Muradov Rustamjon	249
Nartov Jakov	253, 309
Naumov Anatoly	257, 261, 267, 273, 279
Nazarov Anatoly	183
Nikishov Viktor	234
Novachuk Anjelica	283
Novosyolov Arcady	285
Nuritdinov Shamsutdin	288
Nurmuhamedova Nargiza	51
Obuhov A.	300
Ohromenko A.	300
Osipova Marina	374
Oleynikov Boris	293, 297
Ovchinnikov Alexander	292
Plotnikov Nikita	224
Pokidysheva Liudmila	107
Popel Egor	302
Popkova Margarita	307
Popova Olga	164, 168, 305
Rodionova Ekaterina	91
Rvachev Alexander	62
Rybnikova Marina	253, 309
Sadovsky Michael	323, 328, 333, 337
Sarkisov Vigen	343
Semenova Daria	253, 309, 347
Semenov Aleksandr	354, 360
Semenov Mikhail	399
Shalabay Andrey	293, 297
Shaumarov Borikhan	288
Shirnaeva Svetlana	91
Shiryaeva Ludmila	382, 388
de Spinadel Vera W.	37
Svintsov Yuriy	105
Tichonova Irina	224
Trusova Alla	231, 234
Tsitsiashvili Gurami	374
Tursunov Nurmakhammad	288
Veretnova Kseniya	107
Vorobyev Oleg	62, 113, 126, 131, 139
Vydrych Natalya	148
Yankovskaja Anna	393, 399
Yankovskaja Tatyana	404
Zakhrolnaja Irina	183
Zamahaev E.	182
Zyryanov Anton	186, 192

A b s t r a c t s

- ★ **Abasov Rahib Z. (Baku, Azerbaijan)**..... 40
Some generalized formulas and their rational application to the decision of tasks on the topic "Percents"

Abstract. *In this work led a few the generalized formulas on the themes of "Percents". Further, specified some their rational applications to the decision of tasks on percents.*

Keywords. *Generalization, percents, relation, rational decision.*

- ★ **Abdushukurov Abdurakhim and Farhad Abdikalikov (Tashkent, Uzbekistan)** 45

Semi-parametrical estimation of conditional survival function in regression model of random censoring from both sides

Abstract. *In informative regression model of random censoring from both sides the power type estimator for conditional survival function is constructed. The asymptotic properties of estimators are investigated.*

Keywords. *Nonparametrical regression, informative random censoring from both sides, power estimator of survival function.*

- ★ **Abdushukurov Abdurakhim and Nurlan Dushatov (Tashkent, Uzbekistan)** 49

Consistency of an estimator for mean residual life functions in dependent model of random censoring from the right

Abstract. *In this article an estimators for survival and mean residual life functions with using Archimedean copulas under random censoring from the right are proposed.*

Keywords. *Random censorship, survival function, mean residual life function, Archimedean copulas.*

- ★ **Abdushukurov Abdurakhim and Nargiza Nurmuhamedova (Tashkent, Uzbekistan)**..... 51

Approximation of Likelihood Ratio Statistics in competing risks model under informative random censorship from both sides

Abstract. *The paper is devoted on approximation of Likelihood Ratio Statistics with stochastic integrals of score function of sample in informative random censorship from both sides. The main result concerns the Locally Asymptotically Normality properties of experiment.*

Keywords. *likelihood ratio statistics, competing risks model, locally asymptotically normality, random censoring.*

- ★ **Agafonova Ludmila M. and Larisa V. Khisamutdinova (Krasnoyarsk, Russia)**..... 56

Logistic management and buyers: a problem

Abstract. *The paper presents a description of the problems and discrepancies to be found in a common practice of the departments of logistics and supply department. Some ways to eliminate the shortages and discrepancies are discussed.*

Keywords. *Logistics department, supply department, strategic level, tactic level, operation level*

- ★ **Agafonova Ludmila M. and Larisa V. Khisamutdinova (Krasnoyarsk, Russia)**..... 59

Choice of a strategy to deal with a supplier

Abstract. *Supply department should pursue to establish a partnership with a supplier. Thus, a structure analysis of the purchased product mix due to four criteria: i) amount, ii) expenses for a value development, iii) impact of the final result, and iv) risks and technical completeness.*

Keywords. *Partnership, supply department, volume of purchase, final results, ABC-analysis, XYZ-analysis*

- ★ **Amelchugov Sergey P., Vorobyev Oleg Yu. and Alexander T. Rvachev (Krasnoyarsk)** 62

Risks of spread of an oil spill

Abstract. *Oil spill definition is made. The random-set model, the mean-set model of spread are considered. Elementary events are defined. Eventological definitions of risks of spread of an oil spill are given.*

Keywords. *Eventology, safety, risk, threat, oil spill, eventological oil spill spread model.*

- ★ **Ashukyavichute Regina (Krasnoyarsk)** 70

Creation of system of effective management of preparation and assessment of ability of individuals and collectives taking into account their physiological, psychological condition, social and ergonomic (household) features

Abstract. *The purpose of researches is creation of system of efficient control of preparation and an estimation of ability of individuals and collectives at the enterprise taking into account their physiological, psychological condition, social and ergonomic (household) features.*

Keywords. *Elimination of fires and emergency situations.*

- ★ **Baranova Irina V. (Krasnoyarsk)** 72

Sets of bipartite sets of events and their application

Abstract. *In paper is offered the notion of the set of bipartite sets of events, consisting of the sets of events, whose first part corresponds to the random variables, and second part - to the sets. In work the formula of eventological distribution of all types of this set is shown. The concepts of the Minkovsky set-operation of the set of bipartite sets of events, its probability, the covariation and regression of bipartite sets of events are resulted. Also in article practical problems of application of the given set are considered.*

Keywords. *The bipartite set of events, the bipartite set of random elements, eventological distribution, the set of bipartite sets of events, Minkovsky set-operations.*

- ★ **Baranova Irina V. and Olga A. Komarova (Krasnoyarsk, Russia)**..... 80

The eventological interpretation of the association rules method

Abstract. *In article the basic methods, problems and applications of the Data Mining are considered. The purpose of Data Mining is identify the hidden rules and patterns in data sets. In work are described an association rules method and a trees of decisions method. It is suggested the eventological interpretation of the association rules method and shown its opportunities for practical applications.*

Keywords. *Data Mining, tasks, association rules method, eventology, event, probability, fuzzy implication, operations of Frechet*

- ★ **Baturo Alexey N., Dorrer Georgiy A. and Vitold S. Komorovski (Krasnoyarsk, Russia)** 86

Operational forecasting the number of fires at the regional level

Abstract. *The article deals with the operational forecasting of man-made fires on the regional level. The main method of prediction is the use of autocorrelation functions. It is also considered the threshold filtering to improve the quality of forecasts.*

Keywords. *Forecasting, man-made fires, autocorrelation, Fourier transformation, filtering threshold*

★ **Burtseva Yana I., Rodionova Ekaterina V. and Svetlana Yu. Shirnaeva (Samara, Russia)** 91

Statistical methods for studying the performance of insurance companies of Russia

Abstract. *This article describes the methods of mathematical statistics and probability theory to study the performance of insurance companies. A system of statistical indicators characterizing the activities of insurance companies, a correlation analysis of selected indicators are constructed regression models the relationship between those held rating of the largest Russian insurance companies with multi-dimensional non-parametric methods*

Keywords. *Mathematical statistics, probability theory, insurance companies, statistics, efficiency, regularity, distribution law, the rating, the method of "pattern the method of relative differences, the method of sum places.*

★ **Bykova Valentina V. (Krasnoyarsk, Russia)** 95

Recursion in computational problems of linear algebra

Abstract. *We give an analysis of Strassen's recursive algorithm for fast matrix multiplication and Gaussian elimination scheme. We show that the basic problems of linear algebra are polynomial solvable, and that they are polynomial reduced to the problem of matrix multiplication.*

Keywords. *Recursive algorithms, fast computation, matrix algebra.*

★ **Bykova Valentina V. and Vladislav O. Bolchovec (Krasnoyarsk, Russia)** 103

Algorithm for decomposition of a graph into atoms clique minimal separators

Abstract. *We present an algorithm and a program for decomposition of a graph into atoms Clique minimal separators. They are designed to solve NP-hard graph problems, which are based on the adjacency of vertices.*

Keywords. *Separators, algorithms on graphs, decomposition of the graph.*

★ **Bykova Valentina V. and Yuriy A. Svintsov (Krasnoyarsk, Russia)** 105

Software the construction of B&S Tree Decomposition

Abstract. *We present a set of programs B&S Tree, which is designed to convert a tree decomposition of a graph in a binary tree separator. This complex can be used for solving NP-hard graph problems by dynamic programming based on tree decomposition*

Keywords. *Tree decomposition, treewidth.*

★ **Cheremisin Alexander A., Kushnarenko Andrei V. (Krasnoyarsk, Russia)** 379

The influence of photophoretic interaction on aerosol coagulation

Abstract. *A new type of aerosol particles interaction was discovered in computer simulation by Monte-Carlo method. This is photophoretic interaction, which occurs due to gas-kinetic phenomena - photophoresis. If particles are strongly absorbs visible radiation, the interaction may be so significant, that may influence on coagulation process. The estimation of this influence are presented in this paper.*

Keywords. *Monte-Carlo method, aerosol, coagulation, aerosol particles interaction, photophoresis, gas-kinetic phenomena.*

★ **Demotchkine Val (London, United Kingdom)** 16

Hedge Fund Strategies, Financial Instability, and Global Financial Crisis

Abstract. *The article discusses hedge funds in connection to the latest financial crisis.*

Keywords. *Hedge Funds, Performance fees, Hedge Fund Redemptions, Capital Raising, traders, speculators, risk, volatility, financial markets, Currency speculations, Bank Run, Global Financial Crisis, eventology, Financial Instability, Nash Equilibrium, Government intervention.*

★ **Djamirzaev Abdusunnat (Tashkent, Uzbekistan)** . 163

About one of the G.Kramer's theorem

Abstract. *In this paper the theorem of G.Kramer on convergence of distributions of sums and products of two sequences of random variables is generalized.*

Keywords. *Random variables, distribution function, convergence.*

★ **Dobronets Boris S., Krantsevich Artyom M., and Nikolay M. Krantsevich (Krasnoyarsk, Russia)** 164

Software implementation of numerical operations on random variables

Abstract. *There is software implementation of numerical operations on different types of random variables considered in the paper. There are algorithms of arithmetic operations on random variables, which are represented by their probability densities, introduced in the paper. Accuracy evaluation of performed operations is given. The accuracy comparison of histogram arithmetic and the Monte Carlo method is adduced.*

Keywords. *Numerical operations on random variables, histogram arithmetic, Monte Carlo method, interval mathematics.*

★ **Dobronets Boris S., Popova Olga A., and Helena V. Golovchanskaya (Krasnoyarsk, Russia)** 168

Numerical probabilistic analysis for estimates of investment projects

Abstract. *In paper consider the use of a numerical probabilistic analysis for risk assessment of investment projects.*

Keywords. *Numerical probabilistic analysis, investment projects, risk assessment.*

★ **Dorrer Georgy A. and S. S. Moskaleva (Krasnoyarsk)** 171

Model of management of educational process on the basis of a competence approach

Abstract. *The model of transition of educational system on the new level defined by the state educational standards of the third generation which are focused on acquisition by trainees of a complex of competence is considered. As an initial formalism the model of dynamic system with two equilibrium conditions for the description of processes of change such as the political power is used*

Keywords. *educational system, competence approach.*

★ **Dorrer Michael G. and Vitaliy V. Kurokhtin (Krasnoyarsk)** 192

Optimizing invariants calculation in Petri nets to support creation of integration testing scenarios

Abstract. *The article describes the method to find loops in business process. The method uses original translation process to build Petri net corresponding to source eEPC model, find it's loop invariants and reverse translate them back into eEPC notation. Optimized method to find Petri net invariants is also offered, it works by estimating possible value for separate vector*

elements (and group of elements) and then combining these values with each other to receive Petri net invariant. Resulting business process loops for example may be used to calculate process characteristics using it's topological equation.

Keywords. invariant, Petri net, optimization, integration testing.

★ Grigoriev Yuri D. (Saint-Petersburg) 152

Solutions branching in the nonlinear problems of objects placement and experimental design

Abstract. The examples of solutions branching are presented by construction D- and A-optimal placements of beacons in a distance measuring problem of navigation and by construction Bayesian and maximin D-efficient experimental designs.

Keywords. branching of solutions, bifurcation point, beacons, Bayesian and maximin D-efficient experimental designs.

★ Harin Alexander A. (Moscow, Russia) 363

About interval analysis of distributions

Abstract. Separate parts of introduction to systematic consideration of a new direction of the interval analysis are presented. The direction is conditionally named "Interval analysis of distributions." Examples, conditions, formulas and derivations of formulas are presented in the scope of the report. The so-called "Ring of formulas" and generalized Novoselov's formulas are obtained. The interval analysis of distributions may be used, e.g., in the mathematical statistics, probability theory, economics, modelling, forecasting, recognition, analysis of Internet distributions.

Keywords. Interval analysis, distributions, uncertainty, moments of distributions, mean values, ruptures for mean values.

★ Harin Alexander A. (Moscow, Russia) 368

Economics. Paradoxes. Ruptures. Eventology

Abstract. The paradoxes of the utility theory and the ruptures in the probability scale have been considered. Two questions have been formulated that the eventology can solve.

Keywords. Eventology, probability, economics, utility, decisions, uncertainty, risk, ruptures.

★ Holmurodov Farhod M. (Tashkent, Uzbekistan) .. 372

Percentile residual life function of infallible work in informative model with incomplete data of random censorship from both sides

Abstract. In the paper in informative model of random censorship from both sides by using semiparametrical power estimator of distribution function estimator for percentile residual life function is constructed.

Keywords. Random censorship, semiparametrical power estimator, quantile function.

★ Imomov Azam A. (Karshi city, Uzbekistan) 29

The limit theorem for joint distribution in Q-process

Abstract. We find out the limit law of the joint distribution of the population size and the total progeny in Q-processes.

Keywords. Galton-Watson Branching Processes; Q-processes; total progeny; limit theorem

★ Ivanova T. and L. Gazeeva (Krasnoyarsk) 198

Creation of system of effective management of preparation and assessment of ability of individuals and collectives at the enterprise for suppression and elimination of emergency situations

Abstract. The purpose of researches is creation of system of efficient control of preparation and an estimation of ability of

individuals and collectives at the enterprise for suppression and liquidation of emergency situations.

Keywords. Elimination of fires and emergency situations.

★ Kim Oksana E. (Krasnoyarsk, Russia) 199

The optimal placement of valves on the linear section of the pipeline by brute force

Abstract. We consider the valve location problem, occurring in the construction and operation of various types of pipelines. The purpose of the task is to minimize the maximum possible environmental damage, which occurs when depressurizing the pipeline. We give an algorithm and program of brute force of optimal placement of valves on the linear part of the pipeline.

Keywords. Graph algorithms, Gray code, the valve location problem.

★ Kirilyuk Anna A. (Krasnoyarsk, Russia) 202

Methodological approaches of teaching systems, and quick invoice fast computations in a secondary school

Abstract. We present a method of teaching systems, and quick invoice fast computations in secondary school. We also show their relevance in modern society.

Keywords. Fast computation, visualization of information.

★ Kochanova Yuliya Sergeevna (Krasnoyarsk, Russia) .. 204

Triangular norms and conorms

Abstract. We consider a general class of multiplications, known as triangular norm (briefly, t-norm). They are of interest to fuzzy logic because they retain the basic properties of ligaments "and" (which are executed at a time), namely, commutativity, monotonicity, associativity, and bounded, and thus they serve as a natural generalization of the classical conjunction to multi-valued systems of reasoning. The notion of t-norm associated the concept of a triangular conorm (t-conorm) $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. It is associated with the behavior of truth values connected by a bunch of "or". The notion of t-norms and t-conorms came to the theory of fuzzy sets in functional theories equations and probabilistic metric spaces. The axioms of operations make it possible to construct an infinite number of logical ligaments.

Keywords. t-norm, t-conorm, the order amount, the associative functions, copulas, generator.

★ Krupkina Tatiana V. (Krasnoyarsk, Russia), Babenyshev Sergey V. (Zheleznogorsk, Russia), and Majarov Vladimir F. (Krasnoyarsk, Russia) 210

Integral indicators in the synthesis of risk assessment of the potential loss of life

Abstract. We consider the two lower levels of multilevel hierarchical model describing the influence of socio-economic conditions on the potential loss of life in the Krasnoyarsk region. At the lower level criteria are the values of social and economic indicators for municipalities of the Krasnoyarsk region, divided into 6 groups, roughly corresponding to the following factors – income, socio-economic development of the region, consumption, financial, infrastructure, quality of life. At the second level criteria are integral indicators on basic indicators included in each of these factors. We investigate the conditions for choice, the applicability and possibility of adaptation, pertinent to the performance of various factors considered.

Keywords. PYLL, socio-economic indicators, matrix of pairwise comparisons.

★ Kustitskaya Tatyana A. (Krasnoyarsk, Russia) 34

Axial function for elliptic acceptance set

Abstract. In this paper the model of generalized coherent risk measures is considered. Within the bounds of the model the

elliptic acceptance set is examined. The axial function which reflects individual attitude to risk is studied.

Keywords. Generalized coherent risk measure, risk aversion, preference relation, elliptic cone, axial function.

★ **Kushbak kyzy Guliza(Krasnoyarsk, Russia)** 215

Eventology of fire safety: brief outlook

Abstract. Brief eventological outlook in fire safety is considered which is defined relatively a subject, an event, a probability and a value. The hierarchy of kinds of safety is resulted. A safety of the subject is defined. The random-set model and the eventological model of forest fire spread are considered also. Elementary forest fire events are defined.

Keywords. Eventology, safety, risk, threat, fire safety, eventological forest fire spread model.

★ **Labik Anastasya and Eugeny Fisher (Krasnoyarsk) . . .** 219

Alyumosilicate hollow microspheres

Abstract. Alyumosilicate hollow microspheres are considered.

Keywords. Alyumosilicate hollow microspheres.

★ **Lebedev Yuri A. (Moscow)** 221

New mathematical tools of Everetics

Abstract. The short review of new mathematical tools of the Everetics which have come to light during 2011-2012

Keywords. Everetics, irrationality, quasicrystals, quantum mechanics, group theory, graph theory, discrete space-time.

★ **Mednitskiy Aleksey N. and Alla Yu.Trusova (Samara, Russia)** 231

The actuarial calculations on voluntary medical insurance

Abstract. The actuarial accounts are considered by voluntary medical insurance. Formula of Shuett-Nessbitt was used for account of main part net premium and risk margin. There were shown 3 methods of calculation correction factors. In the programming environment Borland Delphi the programme was drawn up, which automatize actuarial accounts.

Keywords. Insurance, actuarial accounts, voluntary medical insurance, risk, probability, the net premium, the gross rate, rates, correction factor, unprofitability, the risk margin.

★ **Mihaylova Elena V., Alla Yu.Trusova and V.N.Nikishov (Samara, Russia)** 234

Asymptotic modeling of two-factor risk groups based on the Cornish-Fisher expansions and three-parameter gamma distribution

Abstract. This paper analyzes the two-factor collection separate type of risk insurance. Construction of the distribution function performed by asymptotic methods based on the Cornish-Fisher decomposition and normal and the three-parameter gamma distributions

Keywords. The distribution function, the expansion of Cornish-Fisher, normal approximation

★ **Moiseychenko Ekaterina (Krasnoyarsk, Russia) . . .** 239

Eventological approach to the problem of clustering of different types of data

Abstract. This article focuses on cluster analysis. Considered main goals and objectives of the cluster analysis. Describes the neural network clustering method – Kohonen Self-Organizing Maps. Proposed to develop an analogue of the algorithm Kohonen, using the apparatus eventology and method bipartite set of random events. We solve the problem of clustering brands instant coffee, based on consumer preferences. Task clustering

is solved in two ways: using the classical algorithm of the Self-Organizing Maps and using an algorithm developed by the analog Kohonen Self-Organizing Maps.

Keywords. Clustering, neural networks, Kohonen Self-Organizing Maps, Kohonen algorithm, bipartite set of random events.

★ **Majarov Vladimir F., Plotnikov Nikita Yu., Gorny Boris E., Krupkina Tatiana V., Babenyshev Sergey V., Tichonova Irina V. and Evgenia A. Averchenko (Krasnoyarsk, Russia)** 224

Monitoring Of Medical-Demographic Processes In Krasnoyarsk Region Between The All-Russia Population Censuses 2002 And 2010

Abstract. An analysis of medical-demographic processes in Krasnoyarsk region has shown, that realization of the Priority national project "Health in particular, programs of improvement of the demographic situation in the region contributed to an increase in fertility and decrease in mortality of the population. Achieved at the initial stage progress in decreasing of irrevocable losses among the population, mostly of working age, was replaced in recent years (2008-2010) by their sharp slowdown, and from separate classes of illnesses - an increase in mortality. Additional government efforts on modernization of the system of public health services, will certainly give new stimulus to the further decrease in mortality.

Keywords. Krasnoyarsk region, the population, birth rate, death rate, depopulation, the Priority national project in public health services sphere.

★ **Mochkovich Leonid I. and Olga I. Babina (Krasnoyarsk, Russia)** 244

Simulation method in Russia and abroad: current condition and basic directions of development

Abstract. . In this article questions of current development of simulation are analyzed in Russia and abroad, and besides basic directions of the future development of a method are considered.

Keywords. Simulation, model, method of simulation, computer experiment.

★ **Mukhitdinov Abror (Tashkent, Uzbekistan)** 251

On applications of the multitype branching processes to the some actuarial problems

Abstract. In the paper, to approach of estimation of the some main demographic development parameters, such as stationary age/regionally distribution of the population, intrinsic rate of population growth etc. are suggested by the using of multitype branching processes. Limit behavior of the some functional on the multitype branching process trajectory, which describes of the actuarial funding models is analysed.

Keywords. Multitype branching processes, functional on process trajectory, demographic development parameters, the actuarial funding models .

★ **Muminov Azam L. (Tashkent, Uzbekistan)** 247

About empirical Bayes estimates according to incomplete data

Abstract. In the model of competing risks are considered empirical Bayes estimates for exponential functionals.

Keywords. Bayesian estimation, cumulative hazard function, competing risks model

★ **Muradov Rustamjon(Tashkent, Uzbekistan)** 249

The estimating a mixture of two-dimensional survival functions on the plane under random censoring from the right

Abstract. *In this paper we consider the problem of estimating a mixture of two-dimensional survival functions on the plane under random censoring from the right.*

Keywords. *Empirical functions, copula functions, Archimedean copulas, random censorship, a mixture of survival functions.*

★ Nartov Yakov, Semenova Daria and Marina Rybnikova (Krasnoyarsk) 253

Fuzzy measure and fuzzy integrals

Abstract. *This article are devoted a brief of fuzzy measure theory and fuzzy integration theory. The most popular kinds of fuzzy integrals are considered. One application using fuzzy integration tool from decision theory are given.*

Keywords. *Fuzzy measure, fuzzy integral, integral of Sugeno, integral of Choquet, subjective estimation problem.*

★ Naumov Anatoly A. (Novosibirsk, Russia) 257

To problem of strategy experimentation construction on the basis of limiting transition method

Abstract. *The method of construction of effective experimentation strategy which is based on artificial introduction in a spectrum of experimentation strategy enough wide range of spectrum plan points is offered and investigated. This transition (limiting transition) is auxiliary and allows to simplify a problem of search of points of effective strategy spectrum which represent points of some function maximum. Thus, the method of limiting transition (MLT) can serve as the basis algorithms of search of effective plans of experimental researches experiments for many special problems.*

Keywords. *Planning of experiments, method of limiting transition, strategy of experimentation, algorithms.*

★ Naumov Anatoly A. (Novosibirsk, Russia) 261

To estimation of socio-economic clusters efficiency

Abstract. *In the paper new methods of efficiency of social projects estimation which model is presented in the form of set interconnected business processes (a portfolio business processes, clusters) are offered. As process models providing the foundation concepts of social projects the flow models (works, resources, finance, etc.) are used. The set of projects (planned or sold) forms cluster of projects. Efficiency of clusters projects is offered to be estimated with use of operation for projects financial streams compounding.*

Keywords. *Social projects, economic projects, efficiency, clusters, business processes, flow models, modeling.*

★ Naumov Anatoly A. (Novosibirsk, Russia) 267

Management of economic systems with possible mismatches of streams

Abstract. *The approach to management of economic systems is investigated at availability of mismatches between streams adjacent business processes. Similar mismatches can appear as a result of influence of indignations both inside of economic system, and outside of it. Examples of such indignations can be a time-varying demand for made production, instability of processes of manufacture, an output for the market of manufacturers with similar production, etc. Algorithms of modeling of functioning of economic systems at presence of indignations and decision-making on efficient control are offered. Algorithms are approved on one of industrial-trade enterprises.*

Keywords. *Economic system, management, indignations, business processes.*

★ Naumov Anatoly A. (Novosibirsk, Russia) 273

Estimation of experimental data information

Abstract. *The approach to estimation of experimental data information is investigated. It supposed that these data are*

removed from object of research in active experimenting system and according to some strategy of effective experimenting. It is shown that an increment of the information at object investigation phases maybe both positive and negative. Asymptotical properties of data sets and their influence on experiments information are shown. Information criteria for problems of experiment control are offered.

Keywords. *Informative data, design of experiments, informative set of data, strategies of experimentation, algorithms.*

★ Naumov Anatoly A. (Novosibirsk, Russia) and Sergei V. Kryukov (Rostov-na-Donu, Russia) 279

Using of scenario approach and operations of financial flows compounding in problems of projects efficiency estimation

Abstract. *The estimation of efficiency of investment projects is by using the techniques of compounding and scenario approach. Proposed use of net future income (NFV) for carrying out of the comparative analysis of efficiency of projects.*

Keywords. *Investment projects, estimation of efficiency, the net future income, scenario method.*

★ Novachuk Angelika V. (Krasnoyarsk, Russia) 283

Some peculiarities of marketing of a higher school

Abstract. *Comprehensive definition of a set of marketing advantages of a higher school institution allows to expand the marketing tools from purely educational services to additional ones. Such expansion contributes a lot the successful marketing of the institution.*

Keywords. *Partnership, supply department, volume of purchase, final results, ABC-analysis, XYZ-analysis*

★ Arcady Arsenievich Novosyolov (Krasnoyarsk, Russia) 285

Fire Risk Control in Natural and Artificial Objects

Abstract. *The paper discusses some methods of fire risk calculation for different natural and artificial objects, and suggests mathematical models for fire risk control.*

Keywords. *Risk, danger, risk map, barrier, risk measuring, risk control.*

★ Nuritdinov Shamsutdin, Abushukurov Abdurakhim, Tursunov Nurmakhammad and Shaumarov Borikhan (Tashkent, Uzbekistan) 288

About one approach to solution of problems of parametric and structural identification of probability distribution taking into account aggregated errors in statistical data

Abstract. *In this paper earlier proposed by authors integral criteria of maximum likelihood for identification of models with errors in variables is applied for solution of problem of approximation of probability distribution on samples in comparison with traditional regression methods and methods of orthogonal regression and moments. Imitational data on improving estimation and samples of synthesis of distribution model within the class of piecewise-linear and spline functions are presented.*

Keywords. *Identification of the model, the probability distribution, simulation calculations, estimation of parameters, the integral criterion of plausibility, the synthesis of the structure of the model, spline, the variance.*

★ Ohromenko A. and A. Obuhov (Krasnoyarsk) 300

Application of highly effective technologies of calculation of fire risk

Abstract. *The purpose of researches is a obtaining of objective data on emergencies for development of offers on safety, and as reduction of fire's risk.*

Keywords. *Risk, fire, safety.*

★ Oleynikov Boris V. and Andrey I. Shalabay (Krasnoyarsk, Russia) 293

To the question of placement open Internet resources in the classic library systems

Abstract. *The article presents a new approach employed for building a distributed digital libraries network based on the concept of digital content aggregator using Grid-technologies, which allows distributed and automatic collection and description of digital information resources together with providing their issue-related and full text search.*

Keywords. *Internet, distributed library network, the aggregator of resources, a collection of full text resources, digital libraries, Grid.*

★ Oleynikov Boris V. and Andrey I. Shalabay (Krasnoyarsk, Russia) 297

About automatic formation of the bibliographic descriptions of Internet resources in the RusMarc format

Abstract. *The article proves the necessity of a system for automatically generated descriptions of Internet resources in the RusMarc format to guarantee the safety and implementation of technology literature search in a variety of sources from a single window as well as to create a unified directory of Internet resources and share bibliographic descriptions within existing library systems.*

Keywords. *RusMarc, bibliographic description, online resource, personal full-text collections.*

★ Ovchinnikov Aleksandr E. (Krasnoyarsk, Russia) . 292

Analysis of spatial structure: formulation of hypotheses

Abstract. *This paper considers one approach to the formulation of hypotheses about the patterns and characteristics of the spatial structure of the stand. The approach is based on the visual empirical selection of characteristic structural formations, which is made possible through the use of special software.*

Keywords. *Hypothesis, stand, spatial structure, visual analysis.*

★ Popel Egor V. and Ekaterina S. Kirik (Krasnoyarsk, Russia) 302

On pedestrian local density estimating

Abstract. *The paper deals with a problem of numerical pedestrian density estimating in a task of computer simulation of pedestrian movement. Some methods and comparative analysis are presented.*

Keywords. *Pedestrian density, numerical estimate, Monte-Carlo method, Rosenblat-Parsen estimate, pedestrian movement mathematical model.*

★ Popova Olga A. and Sergey A. Kovyazin (Krasnoyarsk, Russia) 305

Updating of the modeling process of interaction in information-learning environment

Abstract. *In this paper consider simulation of the interaction in information-learning environment*

Keywords. *information-learning environment, information and telecommunication technologies, the model of interaction*

★ Popkova Margarita I. (Krasnoyarsk, Russia) 307

Measurement of total set-distance and set-scattering of a set of events

Abstract. *New eventological notions of a set-distance, a total covariance, and a set-scattering of a set of events are considered.*

Keywords. *set-distance of a set of events, set-scattering a set of events, total covariance of a set of events.*

★ Rybnikova Marina, Semenova Daria and Yakov Nartov (Krasnoyarsk) 309

Extension of eventological membership function in fuzzy events theory.

Abstract. *In this article is offered of fuzzy events indicator extension. It's generally accepted in fuzzy events eventological theory. Here fuzzy events indicator is presented as weigh sum of usual Kolmogorov's events indicator. Such Kolmogorov's events give rise to given fuzzy event.*

Keywords. *Eventology, fuzzy event, weight function, indicator of fuzzy event, eventological membership function of fuzze event.*

★ Sadovsky Michael G. (Krasnoyarsk, Russia) 323

Comparative study of electoral behaviour of the voters of the city of Krasnoyarsk

Abstract. *We compared the electoral behaviour of the voters residing the city of Krasnoyarsk over the results of several cycles of political racing. Considerably stable structure of the electoral behaviour was found, at Krasnoyarsk. In particular, the city consists of three to five divisions with specific pattern of electoral behaviour.*

Keywords. *Elections, distribution, clusterization, constituency, social control*

★ Sadovsky Michael G. and Maria V. Elina (Krasnoyarsk, Russia) 328

Stratification of Krasnoyarsk kraj with respect to the electoral behaviour of the residents

Abstract. *Some preliminary results towards the stratification of the population of Krasnoyarsk kraj are presented, with respect to their electoral preferences and behaviour. The level of primary constituencies was used to figure out the behavioural pattern. Both unsupervised classification, and elastic map technique have been used to study the pattern. It was found the region to be quite homogeneous with a slight stratification. The observed stratification yields a reasonable correlation to social and economy environment persisting in various sites of that latter.*

Keywords. *Elections, distribution, clusterization, constituency, social control*

★ Sadovsky Michael G. and Xenia A. Klokova (Krasnoyarsk, Russia) 333

On the distribution of short strings in a symbol sequence

Abstract. *A problem of the determination of the distribution function of the words of the fixed length is studied. A (0, 1)-symbol sequence has been considered. The function is a probability to meet the nearest given neighbour (i. e., the given word ω , in dependence of the length l between the start point, and the word, so that no other word ω os met somewhere close to the start point. Some effects in such distribution are shown and discussed.*

Keywords. *String, combination, distance, pattern*

★ Sadovsky Michael G. and Ekaterina S. Loginova (Krasnoyarsk, Russia) 337

On the electoral behaviour of voters at Russia

Abstract. *Some preliminary results towards the stratification of the electoral behaviour of voters at Russia are shown. The State Duma elections of December, 4th are analyzed. Elastic map technique reveals twenty clusters with similar electoral behaviour; some possible errors and discrepancies of the pattern are discussed. Sociological studies necessary to verify the results are discussed.*

Keywords. *Elections, distribution, clusterization, entropy, control mechanisms*

- ★ Sarkisov Vigen G. (Samara, Russia) 343
 Modeling the evolution of risk perception during the portfolio management process

Abstract. *The issue of constructing a dynamic model describing the change in investor's perceptions of risk is considered. The resulting model can be a basis for the synthesis of portfolio management system, aimed to get a high profit and to support low subjective risk level to provide psychological comfort for investor.*
Keywords. *Risk, model, investor, investment portfolio, individual asset management, time series, transfer function.*

- ★ Semenova Daria, Lukyanova Natalia (Krasnoyarsk) ... 347

Distributions of the two-parameter discrete-continuous random variables

Abstract. *In work the definition of the two-parameter discrete-continuous random variable is offered. Authors are investigated a decomposition of the joint distribution of the two-parameter discrete-continuous random variables in the random basic set.*
Keywords. *Discrete-continuous random variables, random set of events.*

- ★ Semenov A.T. (Novosibirsk, Russia) 354
 Probabilities of large deviations and entropy

Abstract. *The limit theorems of probability theory (the law of large numbers, the central limit theorem, etc.) basically say that averages taken over large samples converge on expectation values. These results say little or nothing about the rate of convergence, however, which is often important for many applications of probability theory. One way to address this is the theory of large deviations. Let ξ_1, \dots, ξ_n be a sequence of i.i.d. random variables with expected value $E\xi_1$, and $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.*

The sample mean S_n/n "obeys a large deviations principle" if there is a non-negative function Λ , called the rate function, such that $P\{|S_n/n - E\xi_1| \geq \varepsilon\} \approx \exp\{-n\Lambda(\varepsilon)\}$. Large deviations principles have found fruitful applications not only in probability theory but also in various fields of science and engineering ([1] - [5]). There are also important connections to information theory, since in an awful lot of situations the rate function is the Kullback-Leibler distance, a.k.a. the relative entropy.

Keywords. *Probabilities of large deviations, rate function, Legendre and Cramer (Esscher) transforms, relative entropy, Kullback-Leibler distance, entropy.*

- ★ Semenov A.T. (Novosibirsk, Russia) 360
 On stability of statistical procedures connected with normal distribution

Abstract. *Stability of statistical procedures (in estimation problems or in testing hypotheses) is low sensitivity of these procedures to small deviations from the original assumptions. The article deals the problem of stability of statistical procedures connected with the deviation from the normality of samples.*

Keywords. *Stability of statistical procedures, asymmetry and excess coefficients, Student and "chi-square" statistics, asymptotic normality.*

- ★ Shiryayeva Ludmila C. (Samara, Russia) 382
 The exact distribution of studentized deviation of outlier from mean in a normal sample

Abstract. *A new conception for density of studentized deviation of outlier from mean in a normal sample was obtained. This result may be applied to the calculation of David's probability measures.*
Keywords. *Outlier, Grubbs criterion for testing on one outlier, Hermit's function, David's probability measures, normal distribution.*

- ★ Shiryayeva Ludmila C. and Konstantin I. Devyataikin (Samara, Russia) 388

The distribution of the studentized deviations in a normal sample with an outlier

Abstract. *The distribution of the studentized deviations of random variables in a normal sample was obtained. Model results of density of the studentized deviations were completed. The results obtained show that an outlier has effect on the characteristic of the studentized deviations.*

Keywords. *Outlier, studentized deviation, density of the studentized deviation, normal distribution.*

- ★ de Spinadel Vera W. (Buenos Aires, Argentina) ... 37
 Visualization and technology

Abstract. *The purpose of this presentation is to show how the visualization obtained with the actual mathematical/informatic tools, such as computerized graphics, constitute an essential element in the application of mathematical concepts in the research of many subjects, from fractal structures, knots, transition to chaos up to the most general topological transformations.*

Keywords. *Fractals, chaos, strange attractor, logistic equation.*

- ★ Tsitsiashvili Gurami Sh., Osipova Marina A. and Alexandr S. Losev (Vladivostok, Russia) 374

Duality in asymptotic analysis of connectivity probability of random graphs

Abstract. *In this paper asymptotic formulas for a connectivity probability are obtained in a wide class of random graphs with high reliable arcs. A calculation of coefficients in these formulas demands geometrically increasing number of arithmetical operations by a number of graph vertices in general case. But a consideration of planar graphs allows to simplify this calculation significantly.*

Keywords. *Planar graph, connectivity probability, dual graph, cross sections, cycles.*

- ★ Veretnova Kseniya and Liudmila Pokidysheva (Krasnoyarsk) 107

Principal component analysis and linear manifolds in practice: applied to the Russian banking system

Abstract. *In this paper the application of nonlinear modeling of data, using as the basis of linear manifolds, which are constructed using the method of elastic maps. This approach is a generalization of Kohonen self-organizing maps. The example shows the advantage of using non-linear approximation of the data objects to be compared with linear ones.*

Keywords. *Elastic maps, the principal manifolds, principal component analysis, data visualization.*

- ★ Oleg Yu. Vorobyev (Krasnoyarsk, Russia) 113
 Eventological system analysis of safety in pictures

Abstract. *Eventological modeling of safety systems are considered within the eventological system analysis point of view. Eventological hyperscenery-module model of a system of safety of subjects at the enterprise is offered.*

Keywords. *Eventology, probability theory, elementary outcome, state, event, probability, set of events, set of states, free set of events, free set of states, system of events, system basis, system hull, probability dependence, operation dependence, risk, safety, fire safety, eventological system analysis, eventological safety system, total subject, total barrier, total object, total figurant.*

- ★ Oleg Yu. Vorobyev (Krasnoyarsk, Russia) 126
 Eventological analysis of systems: an event system under the off-system circumstances

Abstract. *Within the limits of the eventological system analysis, a new definition of system of events is offered, the system of events under off-system circumstances and also eventological models of probability and operation event interaction between a system of events and event circumstances are considered.*

Keywords. *Eventology, probability theory, elementary outcome, state, event, probability, set of events, set of states, free set of events, free set of states, system of events, system basis, system hull, probability, probability dependence, operation dependence, eventological system analysis.*

★ Oleg Yu. Vorobyev (Krasnoyarsk, Russia) 131

A total system and a totality of systems: eventological similarity and distinction

Abstract. *The eventological model of a total system inheriting event structure of each system from generating totality is offered which based on the new eventological notion of a mean probability event for the set of events [Vorobyev, 2012].*

Keywords. *Eventology, probability theory, event, probability, set of events, free set of events, system of events, system basis, system hull, probability, mean probability event, mean probability partition.*

★ Oleg Yu. Vorobyev (Krasnoyarsk, Russia) 139

A mean probability event for the set of events

Abstract. *The eventological model of a mean probability event for the set of events is offered. This model has an analogy with the notion of mean measure set [Vorobyev, 1975].*

Keywords. *Eventology, probability theory, elementary outcome, event, probability, set of events, mean measure set, mean probability event, mean probability terrace partition.*

★ Vydrych Natalya V. (Krasnoyarsk) 148

Household goods: consumer research to open a new shopping center in the city of Krasnoyarsk

Abstract. *This article studies issues related to opening a new plaza in Krasnoyarsk. This article actualizes issues of research methods rational choice in order to reinforce competitive advantage of "Atmosfera doma" on the market. Research findings are presented.*

Keywords. *plaza, research, research methods, questionnaire poll, good purchase factors, type of service.*

★ Yankovskaya Anna E. and Sergey V. Kitler (Tomsk, Russia) 393

Intelligent system DIOS based on threshold and fuzzy logic and its applications

Abstract. *The intelligent system description for diagnostics and intervention of organizational stress (IS DIOS) on the basis of the threshold and fuzzy logic and to its applications are given. Mathematical apparatus of the IS DIOS construction are presented. The area of the applications of the IS DIOS for an evaluation of level of psychological disease of the population on various administrative and territorial units of investigated region is considered. Intelligent extension of geoinformation system ArcView by converting a data and knowledge base of the IS DIOS in database ArcView is proposed. Creation of intelligent system is offered according to genetic disorders of inspected person with application of the same mathematical apparatus, as well as in the IS DIOS and joining of the created system with geoinformation system ArcView. Results of investigation of the IS DIOS on selected territorial units of Tomsk region are given.*

Keywords. *Intelligent system, diagnostics and intervention of organizational stress, fuzzy logic, threshold logic, intelligent extension for geo-information system.*

★ Yankovskaya Anna E. and Mikhail E. Semenov (Tomsk, Russia) 399

Competence-based approach to decision-making in learning-testing systems based on fuzzy logic and threshold function

Abstract. *The problem of decision-making in learning-testing systems in competence-based approach in means of mixed diagnostic tests (MDT), fuzzy logic and threshold function is considered. The background of this research is presented, and problem of construction of MDT is formulated. The technique of passing the training, testing and verification is given. An informal description of the algorithm for mixed diagnostic tests construction with simultaneously decision-making in learning-testing systems is given. The competence-based approach to evaluation of students and graduates knowledge and skills allows to concentrate of our attention on the individual results of learning each student. Use of intelligent learning-testing system based on software tool IMSLOG is applied. The further research is discussed.*

Keywords. *Fuzzy logic, threshold function, decision-making, mixed diagnostic tests, intelligent learning-testing system, didactic units, competence-based approach.*

★ Yankovskaja Tatyana A. (Krasnoyarsk, Russia) .. 404

Mathematical model of diagnosing the technical condition of the mining equipment

Abstract. *The paper is considered the general approach to constructing a mathematical model of diagnosing the technical condition of the mining equipment. Gives a general description of the model, its input and output parameters are set forth the criteria for their selection. Principles of building an expert diagnostics system.*

Keywords. *Mathematical model, vibration-based diagnostics, state analysis, expert system.*

★ Zakhorochnaja Irina A. and Anatoliy A. Nazarov (Tomsk, Russia) 183

Mathematical model of financial streams of a life annuity procedure

Abstract. *In work the mathematical model of financial streams in procedure of a life annuity in the form of streams in queuing system with unlimited number of phases and service lines is constructed. Characteristic function of the rent payer profit size is received and the numerical analysis of influence of the amount of rent payment on profit size is received.*

Keywords. *stream, life annuity, unlimited number of phases and lines, queuing system.*

★ Zamahaev E.V., Kalistratov S.A. and D.S Ivahov (Krasnoyarsk) 182

Use of water for flooding of layers with a view of a firefighting

Abstract. *In our work the modern technology of oil production in fields which are developed by means of artificial flooding is considered.*

Keywords. *oil production.*

★ Zyryanov Anton A. and Michael G. Dorrer (Krasnoyarsk) 186 Translation of business process models in ARIS eEPC notation into GERT-network

Abstract. *A translation algorithm of business process models in ARIS eEPC notation into the model of GERT-network. A model of GERT-node network, which simulates the branching process for the logic rule OR.*

Keywords. *Business process, model translation, ARIS EPC, GERT, probability, network analysis.*

★ Zyryanov Anton A. and Michael G. Dorrer (Krasnoyarsk) 192

Calculation of probability characteristics of business processes based on the GERT-networks

Abstract. *An approach to the assessment of the probability characteristics of business processes based on GERT-networks. The obtained characteristics are compared with the results of a simulation experiment.*

Keywords. *Business process, simulation model, ARIS EPC, GERT, probability, network analysis.*

П р и г л а ш е н и е

*Российская академия наук
Министерство образования и науки РФ
Научно-исследовательский институт проблем пожарной безопасности
Институт математики
Институт нефти и газа
Сибирский федеральный университет
Красноярский государственный торгово-экономический институт
Институт вычислительного моделирования СО РАН*

XII

международная конференция ФИНАНСОВО~АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА и ЭВЕНТОЛОГИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ФАМЭБ'2013

18 ~ 21 апреля 2013 года, Красноярск

Т е м ы

- Финансово-актуарная математика
- Конвергенция нано-био-инфо-когно наук и технологий для совершенствования человеческой деятельности
- Эвентологическая математика в гуманитарных, социо-экономических и естественнонаучных областях
- Эвентология безопасности и риска
- Теория вероятностей и математическая статистика
- Эвентология и математическая эвентология
- Философская эвентология и философия вероятности
- Практическая эвентология
- Эвентологическая экономика
- Эвентологическая психология
- Эвентологические проблемы искусственного интеллекта
- Принятие решений в условиях риска и неопределённости
- Измерение и модели риска
- Теория нечётких событий, обобщенная теория неопределённости
- Математические начала хаоса в экономике
- Системный анализ и управление случайными событиями
- Теория механизмов создания распределений событий

Важнейшие даты:

- 1 февраля 2013 — завершение приема заявок, докладов, секций
- 9 февраля 2013 — подтверждение и рассылка приглашений

Инструкции:

- <http://fam.conf.sfu-kras.ru/submission.php>

I n v i t a t i o n

*Russian Academy of Sciences
Ministry of Education and Science of RF
Research Institute for Fire Safety
Institute of Mathematics
Institute of Petroleum and Natural Gas Engineering
Siberian Federal University
Krasnoyarsk State Trade Economy Institute
Institute of Computational Modeling of SB RAS*

XII

**International Conference
FINANCIAL and ACTUARIAL MATHEMATICS
and EVENTOLOGY of SAFETY
FAMES'2013**

18 ~ 20 April 2013, Krasnoyarsk

Themes

- Financial and actuarial mathematics
- Converging nano-bio-info-cogno sciences and technologies for improving human performance
- Eventological mathematics in the humanities, socioeconomic and natural sciences
- Eventology of safety and risk
- Probability theory and statistics
- Eventology and mathematical eventology
- Philosophical eventology and philosophy of probability
- Practical eventology
- Eventological economics
- Eventological psychology
- Eventological problems of artificial intelligence
- Decision-making under risk and uncertainty
- Risk measurement and risk models
- Theory of fuzzy events and generalized theory of uncertainty
- Mathematical onset to chaos in economy
- System analysis and events management
- Events distributions mechanism design theory

Important dates:

- 1 February 2013 — deadline for papers, and sessions
- 9 February 2013 — notification about acceptance/rejection; distribution of invitations

Instructions:

- <http://fam.conf.sfu-kras.ru/submission-e.php>

Научное издание

Т р у д ы

XI международной ФАМЭБ'2012 конференции

по финансово-актуарной математике

и эвентологии безопасности

Под редакцией Олега Воробьева

Отпечатано с готовых оригинал-макетов



ЭМ и ФАМ семинары

Поручено исследовать лекции и семинары по проблемам помарной безопасности

Институт микробиологии, Институт нефти и газа

Сибирский федеральный университет

Красноярский государственный торгово-экономический институт

Институт международного сотрудничества СО РАН

<http://fam.conf.sfu-kras.ru>

<http://em.conf.sfu.kras.ru>

famemconf@gmail.com