*Тебе одной,*
*единственно*
*возможной*

*To you the one*
*and the only*
*possible*

# EVENTOLOGY

AS A SCIENCE ABOUT EVENTS AND CO-BEING

by

Oleg Yu. VOROBYEV

*Siberian Federal University, Russia*

The second edition, re-formatted

*Eventology* is studies on events. It is generated by *unbearably easy* observations: *«matter and mind are only a convenient way of linking events together into a sequence» (Russell, 1946; Vorob'ov, 2001)*, and *«mind is appearing there and when, where and then an ability to make a probabilistic choice is arising» (Lefebvre, 2003)*; *mathematical eventology* is a Kolmogorov's axiomatics grounded new line of probability theory, which has already shown the efficiency in the mathematical description of uncertainty and the *eventological* background and improvement of the theory of fuzzy sets (Zadeh, 1965), the theory of possibilities (Zadeh, 1978), the theory of evidences (Dempster, Shafer, 1976), the prospect theory which united economics and psychology (Kahneman, Tversky, 1979, 1992), and also the theory of supply and demand («Marshall's cross»), the corner-stone of modern economics. Along with philosophical and mathematical issues on event and being *eventology* studies problems common to economics, sociology and psychology that have been thought over by everyone in the course of life. The book is intended for a wide circle of readers who are interested of *eventology* and its applications. The book is of peculiar interest for specialists who actively work in this new line and also for teachers, postgraduate students and students of universities who study mathematical modeling, probability theory, statistics and applications in humanities, sociological and natural sciences.

*Krasnoyarsk 2007*

О.Ю.Воробьев

# ЭВЕНТОЛОГИЯ

## как наука о событиях и со-бытии

Издание второе, переформатированное

*Красноярск 2007*

УДК 519.248: [33+301+159.9]
В 75

Р е ц е н з е н т ы:
главный научный сотрудник ИБФ СО РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Р.Г. Хлебопрос
декан факультета компьютерных наук,
заведующий кафедрой кибернетики Омского госуниверситета,
доктор физико-математических наук, профессор
А.К. Гуц

Р е к о м е н д о в а н о
Ученым советом Института математики СФУ

**Воробьев О.Ю.**
**В 75** Эвентология / О.Ю. Воробьев; Сиб. фед. ун-т. — Красноярск, 2007, 434 с.

ISBN 978–5–7638–0741–7

*Эвентология* — учение о событиях, возникшее из *невыносимо легких* наблюдений: *«материя и разум — это просто удобный способ связывания событий в череду» (Рассел, 1946; Воробьев, 2001)* и *«разум возникает там и тогда, где и когда возникает способность делать вероятностный выбор» (Лефевр, 2003)*; *математическая эвентология* — основанный на колмогоровской аксиоматике новый раздел теории вероятностей, уже показавший свою эффективность в математическом описании и *эвентологическом* обосновании и развитии существующих теорий неопределенности. Наряду с философскими и математическими вопросами «со-бытия» и бытия *эвентология* затрагивает экономические, социальные и психологические вопросы, над которыми каждый из нас задумывается и размышляет на протяжении жизни. В книгу включены материалы, рассчитанные на широкий круг читателей, интересующихся *эвентологией* и ее приложениями; особый интерес они представляют для специалистов, активно работающих в этой новой области, а также для преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов университетов, занимающихся математическим моделированием, теорией вероятностей, математической статистикой, а также их приложениями в гуманитарных, социальных и естественных науках.

УДК 519.248: [33+301+159.9]

© О.Ю.Воробьев, 2007
© Сибирский федеральный университет, 2007
© Красноярский государственный торгово-экономический институт, 2007
© Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2007
© Сибирский институт бизнеса, управления и психологии, 2007

ISBN 978–5–7638–0741–7

# Оглавление

★ **Пролог** **13**

★ **Часть первая**
ЭВЕНТОЛОГИЯ 21

**Глава 1**
ОБЩИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ 23
1.1 Пространство исходов бытия . . . . . 23
1.2 Событие . . . . . 23
1.3 Разрешающая событийная способность разума . . . . . 24
1.4 Перспективность «со-бытия» и перспективность событий . . . . . 26
1.5 Дуальность «со-бытия» и дуальное событие . . . . . 26
1.5.1 Событийное восприятие . . . . . 27
1.5.2 Событийная деятельность . . . . . 29
1.6 Вероятность события . . . . . 29
1.7 Ценность события . . . . . 30
1.8 Нечёткость «со-бытия» и нечёткое событие . . . . . 31
1.9 Разум как множество событий . . . . . 32
1.10 Человек событийный (Homo eventus) . . . . . 32

★ **Часть вторая**
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭВЕНТОЛОГИЯ 37

**Глава 2**
АКСИОМАТИКА КОЛМОГОРОВА 39
2.1 История аксиоматизации теории вероятностей . . . . . 39
2.2 Колмогоровские аксиомы элементарной теории вероятностей . . . . . 40
2.3 Колмогоровская эмпирическая дедукция аксиом . . . . . 41
2.4 Аксиома непрерывности и бесконечные вероятностные пространства . . 42
2.5 Бесконечные вероятностные пространства и «идеальные события» . . . 43

**Глава 3**
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ 45
3.1 Двойственность множества событий и случайного множества событий . 45
3.2 Эквивалентность множества событий и эвентологического распределения 46
3.3 Триада: событие, вероятность и ценность . . . . . 48

**Глава 4**
МНОЖЕСТВО СОБЫТИЙ 49
4.1 Введение . . . . . 49
4.2 Множество событий . . . . . 50
4.3 События-терраски . . . . . 50
4.4 События-слои и слои множества событий . . . . . 52
4.5 Два вероятностных пространства . . . . . 53
4.6 Множество случайных событий . . . . . 54
4.7 Случайное множество событий . . . . . 54
4.8 Запись событий на двух языках . . . . . 55
4.9 Эвентологическое распределение (Э-распределение) . . . . . 56
4.10 Аддитивные свойства Э-распределений . . . . . 57
4.11 Э-распределения и функции распределения . . . . . 60
4.12 Сет-средние случайного множества . . . . . 60
4.12.1 Определение сет-средних . . . . . 61
4.12.2 Экстремальные метрические свойства сет-средних . . . . . 63
4.13 Эвентологические сет-средние . . . . . 64
4.13.1 Эвентологическая сет-медиана . . . . . 64
4.13.2 Эвентологическая сет-мода . . . . . 66
4.13.3 Асимметричная $\alpha$-метрика в пространстве множеств событий . . 67
4.13.4 Эвентологический сет-квантиль . . . . . 72
4.14 Эвентологическая статистика . . . . . 74
4.15 Заключение . . . . . 74

**Глава 5**
ОБРАЩЕНИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ 77
5.1 Введение . . . . . 77
5.2 Формулы обращения Э-распределений . . . . . 78
5.2.1 Таблицы формул обращения Э-распределений . . . . . 80
5.3 Эвентологические формулы террасного обращения . . . . . 82
5.3.1 Таблицы формул обращения событий-террасок . . . . . 83
5.3.2 Эвентологические формулы обращения, связывающие события-терраски между собой . . . . . 84
5.3.3 Эвентологические формулы обращения, связывающие события с событиями-террасками . . . . . 87
5.4 Заключение . . . . . 87

**Глава 6**
ЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ 89
6.1 Введение . . . . . 89
6.2 Ковариации событий . . . . . 91
6.2.1 Мультиплет событий и связанные с ним вероятности . . . . . 91
6.2.2 Плетные ковариации событий . . . . . 94
6.2.3 Арные ковариации событий . . . . . 95
6.2.4 Кортежи подмножеств событий и их ковариации . . . . . 96
6.2.5 Слои подмножеств событий и их ковариации . . . . . 97

6.2.6 Свойства ковариаций событий . . . . . 98
6.3 Метрическая интерпретация ковариации событий . . . . . 100
6.3.1 Парная ковариации событий . . . . . 100
6.3.2 Ковариация множества событий . . . . . 101
6.4 Эвентологическая корреляция — мера вложенной зависимости событий 102
6.4.1 Особенности вложенной зависимости между двумя событиями . . 104
6.5 Мультковариации множеств событий . . . . . 107
6.5.1 Распределения мультковариаций и мультипликативные формулы обращения . . . . . 107
6.5.2 Простейшие свойства мультковариаций . . . . . 108
6.5.3 Выражение вероятностей через мультковариации . . . . . 109
6.6 Эвентологическая теория копулы . . . . . 110
6.7 Условные события . . . . . 114
6.8 Условные Э-распределения . . . . . 120
6.9 Эвентологическая теорема Байеса . . . . . 123
6.9.1 Эвентологические «террасные формулировки» теоремы Байеса . 123
6.10 Эвентологическая регрессия . . . . . 125
6.10.1 Некоторые вопросы по эвентологической регрессии . . . . . 128
6.10.2 Эвентологическое регрессионное отношение . . . . . 128
6.11 Заключение . . . . . 129

**Глава 7**
ПАРУС И ВЕТЕР ФРЕШЕ 131
7.1 Введение . . . . . 131
7.2 Неравенства Фреше для вероятности пересечения событий . . . . . 132
7.3 Неравенства Фреше для ковариации событий . . . . . 132
7.4 Неравенства Фреше для вероятности пересечения множества событий . 133
7.5 Неравенства Фреше для вероятности объединения событий . . . . . 135
7.6 Неравенства Фреше для арной ковариации . . . . . 135
7.7 Арная корреляция Фреше случайных событий . . . . . 136
7.8 Симплекс распределений двух событий и его проекция на плоскость . . 137
7.9 Распределения двух событий с заданной парной корреляцией Фреше . . 139
7.10 Парус и ветер Фреше . . . . . 140
7.11 Арная ковариация множества событий и абсолютные неравенства . . . . 141
7.12 Заключение . . . . . 142

**Глава 8**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ 143
8.1 Введение . . . . . 143
8.2 Равномерные . . . . . 144
8.3 Слойно равномерные . . . . . 145
8.4 Равномощные равномерные . . . . . 147
8.5 Независимые (независимо-точечные) случайные множества событий . . 148
8.6 Кусочно зависимые . . . . . 150
8.7 $n$-зависимые . . . . . 152
8.7.1 Максимизация энтропии при фиксированных вероятностях покрытия . . . . . 154
8.7.2 Максимизация энтропии при фиксации области определения случайного множества событий . . . . . 155
8.8 Метрические . . . . . 156
8.8.1 Метрика . . . . . 156
8.8.2 Сет-метрика по объединению . . . . . 157
8.8.3 Сет-метрика по пересечению . . . . . 162
8.8.4 Свойства сет-расстояния . . . . . 164

8.8.5 Неравенство треугольника для сет-расстояния . . . 165
8.8.6 Метрическое задание эвентологических распределений . . . 166
8.9 Дискретные многомерные распределения: эвентологический подход . . . 167
8.9.1 Биномиальное многомерное распределение . . . 167
8.9.2 Многомерное распределение Пуассона . . . 181
8.10 Заключение . . . 189

**Глава 9**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ 191
9.1 Введение . . . 191
9.2 Пуассоновский процесс . . . 192
9.3 Многомерный пуассоновский процесс . . . 193
9.4 Эвентологические процессы пуассоновских событий . . . 193
9.5 Заключение . . . 194

**Глава 10**
ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ СОБЫТИЙ 195
10.1 Введение . . . 195
10.2 Краткий обзор развития теории нечетких множеств Заде . . . 196
10.2.1 Основные определения теории Заде . . . 198
10.2.2 Эвентологическая модификация операций Заде . . . 201
10.2.3 Обобщенные операции Фреше в обозначениях теории Заде . . . 206
10.3 Нечеткие события в эвентологии . . . 207
10.3.1 Случайный и нечеткий эксперименты . . . 207
10.3.2 Определения и обозначения . . . 210
10.3.3 Разновидности событий-террасок . . . 215
10.3.4 Разновидности нечетких событий-террасок . . . 216
10.3.5 Классическая вероятность . . . 226
10.3.6 Эвентологическая функция степени принадлежности э-события нечеткому событию — это его индикатор . . . 228
10.3.7 Эвентологическое распределение множества нечетких событий . 232
10.3.8 Зависимость нечетких событий . . . 235
10.3.9 О сет-операциях над множеством событий . . . 241
10.3.10 Сет-операции по Минковскому над множеством нечетких событий . . . 243
10.3.11 Индикаторы сет-операций . . . 245
10.4 Основная эвентологическая теорема о нечетких событиях . . . 245
10.4.1 Следствие из основной эвентологической теоремы . . . 252
10.5 Случайные нечеткие события . . . 253
10.5.1 Мощность нечеткого события . . . 254
10.5.2 Эвентологические сет-средние нечетких событий . . . 256
10.6 Эвентологическое обоснование существующих теорий неопределенности 257
10.6.1 Эвентологическое обоснование теория нечеткости Заде . . . 257
10.6.2 Теория возможностей Заде — частный случай эвентологической теории нечеткости для вложенных событий . . . 258
10.6.3 Теория свидетельств Демпстера-Шафера обобщается эвентологией . . . 261
10.6.4 Пары Э-распределений, порождающие новые версии теории неопределенности . . . 262
10.7 Вместо заключения . . . 263
10.7.1 Виды нечеткости . . . 263
10.7.2 Разум и события . . . 265
10.7.3 Принадлежность и бытие . . . 266

★ **Часть третья**
ЭВЕНТОЛОГИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 269

**Глава 11**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЙ ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ 271
11.1 Введение . . . 271
11.2 Эвентологическая задача Марковица . . . 272
11.3 Постановка задачи поиска оптимального портфеля событий . . . 273
11.4 Обратная эвентологическая задача Марковица . . . 276
11.5 О методах решения обратной Э-задачи Марковица . . . 277
11.6 Об особенностях эффективной границы «зонтика» Марковица . . . 279
11.7 Одна интерпретация обратной Э-задачи Марковица: заполнение ресурсов услуги . . . 282
11.8 Заключение . . . 283

**Глава 12**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ ОБОСНОВАНИЯ ЭКОНОМИКС 285
12.1 Введение . . . 285
12.2 Двойственность потребителя и производителя . . . 286
12.3 Гиббсовские потребители и производители на однотоварных и одновалютных рынках . . . 287
12.4 Эвентологический гиббсовский потребитель . . . 290
12.4.1 Эвентологический гиббсовский потребитель множества товаров . 290
12.4.2 Эвентологический гиббсовский потребитель одного товара . . . 294
12.5 Эвентологический гиббсовский производитель . . . 295
12.5.1 Эвентологический гиббсовский производитель множества товаров 295
12.5.2 Эвентологический гиббсовский производитель одного товара . . . 296
12.6 Эвентологический гиббсовский рынок — эвентологическое обоснование рыночного «креста Маршалла» . . . 298
12.7 Заключение . . . 298

**Глава 13**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ 299
13.1 Введение . . . 299
13.2 Эвентологические сетки . . . 300
13.3 О видах Э-сеточной аппроксимации . . . 301
13.4 Заключение . . . 305

**Глава 14**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПСИХОЛОГИИ 307
14.1 Введение . . . 307
14.2 Эвентологический взгляд на теорию перспектив Канемана и Тверски . . . 308
14.2.1 Четыре психологических открытия Канемана . . . 311
14.2.2 Эвентология открытий Канемана . . . 311
14.2.3 От эвентологического комментария теории перспектив к эвентологической теории перспектив . . . 316
14.3 Эвентология выбора . . . 317
14.3.1 Дуально-триадное «со-бытие» разумного субъекта . . . 318
14.3.2 Выбор фигур восприятия и деятельности . . . 325
14.3.3 Выбор имен восприятия и деятельности . . . 326

14.3.4 По ту сторону добра и зла . . . 328
14.3.5 Эвентологическое распределение пси-множества «со-бытия» разумного субъекта . . . 331
14.4 Эвентология в психофизике . . . 332
14.4.1 Терминология и обозначения психофизики . . . 333
14.4.2 Закон Вебера-Фехнера . . . 333
14.4.3 Степенной закон Стивенса . . . 334
14.4.4 Обобщенный закон Ю. М. Забродина . . . 334
14.4.5 Гипотеза М. А. Кириллова . . . 334
14.4.6 Закон Вебера-Фехнера и его обобщения в сравнении с эвентологическими соотношениями «ценность–вероятность» . . . 335
14.4.7 Предложения к размышлению . . . 336
14.4.8 Трехликий Янус Лефевра и феномен Брока–Зульцера . . . 336
14.4.9 Феномен Брока-Зульцера и открытие Канемана . . . 337
14.5 Эвентологический крест восприятия и деятельности . . . 338
14.5.1 Эвентологическая цена и ценность события . . . 339
14.5.2 Эвентологическое тестирование и статистическое оценивание Э-креста деятельности и восприятия . . . 339
14.6 Эвентология ценностей . . . 342
14.6.1 Философия ценностей . . . 342
14.6.2 Эвентологическая теория ценностей событий . . . 343
14.6.3 Физические и психофизические аналоги . . . 344
14.6.4 Эвентологические соотношения между ценностями и вероятностью события . . . 346
14.7 Заключение . . . 347

**Глава 15**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЕТ-ПРЕДПОЧТЕНИЙ 349
15.1 Введение . . . 349
15.2 Эвентологическое объяснение парадокса Блайта «о трех пирогах» . . . 351
15.3 Определение Э-предпочтений . . . 354
15.4 Основное эвентологическое предположение теории Э-предпочтений . . . 357
15.5 Заключение . . . 359

**Глава 16**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ 361
16.1 Событийные обстоятельства . . . 361
16.2 Событийные решения . . . 362
16.3 Предположение стационарности множеств событий . . . 362
16.4 Задача принятия эвентологических решений (принятия Э-решений) . . . 363
16.4.1 Выбор событий-решений . . . 363
16.4.2 Эвентологический выбор . . . 365
16.5 Методы принятия Э-решений . . . 366
16.5.1 Ценность со-бытия . . . 366
16.5.2 Принцип наибольшей ценности . . . 366
16.5.3 Матрица совместного распределения $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{F}$ . . . 366
16.5.4 Наиболее ценные условные Э-распределения $\mathfrak{D}$ . . . 367
16.5.5 Первый метод . . . 367
16.5.6 Второй метод . . . 368
16.5.7 Метод, основанный на эвентологической H-теореме . . . 369
16.6 Пример принятия Э-решений . . . 370
16.6.1 Технические события-обстоятельства . . . 370
16.6.2 Фундаментальные события-обстоятельства . . . 371
16.6.3 Множество событий-обстоятельств . . . 371

16.6.4 Множество событий-решений . . . . . 372
16.6.5 Матрица ценностей . . . . . 373
16.6.6 Первый метод . . . . . 373
16.6.7 Второй метод . . . . . 374
16.6.8 Метод, основанный на эвентологической H-теореме . . . . . 375
16.7 Заключение . . . . . 375
16.8 Нечеткость, порождаемая временем . . . . . 377

**Глава 17**
ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР 379
17.1 Введение . . . . . 379
17.2 Некоторые определения . . . . . 381
17.3 Теоретико-игровые методы анализа случайных множеств событий . . . . 383
17.4 Применение эвентологической теории игр . . . . . 393
17.5 Заключение . . . . . 396

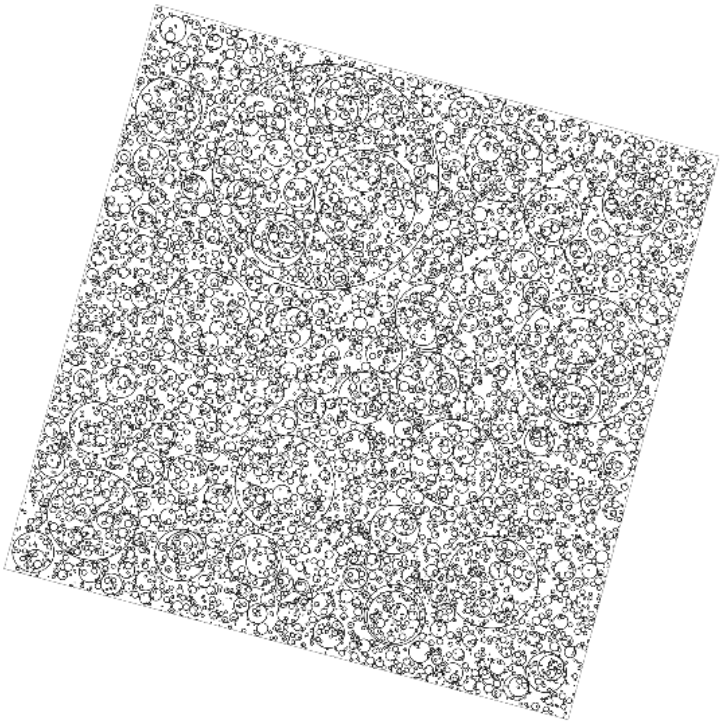
★ **Эпилог** **399**

★ **Эвентологические обозначения** **403**

★ **Литература** **410**

★ **Предметный указатель** **428**

# Пролог



*Рассудок оперирует готовым,*
*разум создает новое.*

В основе эвентологии[1] — нового направления теории вероятностей, изучающего движение случайных событий, лежат два чрезвычайно важных, на мой взгляд, наблюдения. Одно из них лаконично сформулировано [206] нобелевским лауреатом Бертраном Расселлом[2] в 1946:

*«Материя — это просто удобный способ*
*связывания событий воедино».*

А другое, спустя 55 лет намерено сформулированное по аналогии, выглядит почти идентично:

*«Разум — это просто удобный способ*
*связывания событий воедино».*

Второе наблюдение вряд ли может вызвать серьезные возражения, настолько оно, на мой взгляд, естественно. Однако, если Расселл пришел к своему фундаментальному наблюдению, которое можно найти на самых последних страницах его книги [206], опираясь на результаты величайших открытий в физике, то обоснованием второго наблюдения в 2001 году для эвентологов мог служить только опыт собственного разума.

В прологе собраны мои заметки об эвентологии, написанные в разное время и по разным поводам. В них я не прибегаю к эвентологическому математическому аппарату, с которым можно подробно познакомиться далее в этой книге.

---

[1] *Эвентология* — термин, предложенный автором: от лат. *eventum* — событие; *eventus* — исход, удача, случай, судьба + *logy* — теория случайных событий.

[2] *Рассел, Бертран Артур Уильям (Russell, Bertrand Arthur William, 1872–1970)* — выдающийся английский математик и философ; лауреат Нобелевской премии по литературе (1950) «за значительные произведения, в которых он отстаивает гуманистические идеалы и свободу мысли».

## Защита эвентологии

*«Вещь проста только тогда,*
*когда ее можно исчерпывающим образом*
*охарактеризовать несколькими*
*различными способами,*
*еще не подозревая, что на самом деле*
*ты говоришь об одном и том же».*
Фейнман[3] [97], с. 207.

Событие — это слово не сходит с наших уст. Оно постоянно мелькает на полосах газет, звучит на радио и телевидении. Без этого слова не обходятся философы, его постоянно используют физики и социологи. Это понятие, имеющее множество определений, настолько вездесуще и настолько заурядно, что словари избегают его толковать. Все понимают, что́ такое событие, но каждый вкладывает в это понятие свой собственный смысл. Вместе с тем, всем абсолютно ясно, что речь всегда идет об одном и том же — о событии.

Во все века люди пытались приоткрыть тайны настоящего и будущего, разгадать скрытые желания друзей и замыслы врагов, раскрыть тайны любви. Египетские жрецы, античные оракулы, средневековые астрологи, цыганские гадалки тысячелетиями по крупицам собирали секреты строения и движения разума. Многовековой опыт предсказаний основан на сокровенных знаниях типичных множеств случайных событий, определяющих строение и движение разума. Вероятностные распределения множеств случайных событий, до сих пор не подвергавшиеся систематическому научному анализу, составляют предмет эвентологии — направления, недавно возникшего в теории вероятностей на базе колмогоровской аксиоматики.

Эвентологию — теорию случайных событий, изучающую движение случайных событий и их взаимодействия — можно назвать вершиной теории вероятностей. Однако было бы заблуждением считать, что предмет эвентологии — вероятностные распределения случайных событий, не привлекал внимания в «доэвентологическую» эру.

[3] *Фейнман, Ричард Филлипс (Feynman, Richard Phillips, 1918 – 1988)* — выдающийся американский физик; один из основателей квантовой механики; лауреат Нобелевской премии по физике (1965).

Ситуация как раз обратная: привлекал, привлекает и будет привлекать: случайные события, их движение и взаимодействия всегда были основным предметом теории вероятностей. Но, как оказалось, современная теория вероятностей изучает случайные события не непосредственно и не систематически. Иначе говоря, она изучает не сами по себе случайные события, а только наряду с различного рода измеримыми отображениями, определенными на вероятностном пространстве: случайными величинами, процессами и прочими случайными элементами линейных пространств; и — не любые случайные события, а только те, которые порождаются изучаемыми случайными элементами. Эвентология тем и отличается от теории вероятностей, что ее внимание сконцентрировано, главным образом, на непосредственном и систематическом изучении случайных событий и их взаимодействий. Кому-то может показаться, что эвентологические интересы у́же вероятностных. Это не так. Во-первых, важно выделение теории случайных событий в самостоятельное направление теории вероятностей, поскольку оно позволяет размышлять о строении случайных событий без многих лишних предположений. Во-вторых, и это, пожалуй, самое интересное, язык случайных событий — это универсальный язык, с помощью которого есть надежда получить результаты на пути объединения описаний физики — науки о материи — и того, что ее дополняет: метафизики[4] — науки о разуме

## Невыносимая легкость эвентологии

*Математики напоминают французов:*
*услышав что-нибудь,*
*они сразу переводят это на свой язык,*
*и все сразу становится иным.*
Гёте[5], 1829.

Эвентологический «перевод» из Милана Кундеры[6] [80]: «Гораз-

[4] *Метафизика* понимается в первоначальном аристотелевском смысле: то, что *вне физики*; никаких других смыслов, привнесенных последующими эпохами, здесь в этот термин не вкладывается.

[5] *фон Гёте, Иоганн Вольфганг (von Goethe, Johann Wolfgang, 1749 – 1832)* — немецкий поэт, мыслитель и естествоиспытатель.

[6] *Кундера, Милан (Kundera, Milan, 1929)* — чешский писатель.

до больше, чем множество стереотипных и потому понятных, предсказуемых, с давно известными именами событий, которые сопровождают нас в нашей жизни, значит для нас знак случайностей, придающий нам мужества резко повернуть и изменить свою судьбу. Возможно, именно эти случайные события (кстати сказать, совсем скромные, серые, поистине достойные той повседневности, которая нас окружает) приводят в движение нашу любовь и становятся источником энергии, которую мы не исчерпаем до конца дней. Наша каждодневная жизнь подвергается обстрелу случайностями, точнее сказать, случайными встречами людей и случайными событиями, называемыми совпадениями. «Со-впадение» означает, что два неожиданных события происходят в одно и то же время, что они сталкиваются: вот он или она появляется и в то же время звучит музыка Бетховена. Огромное множество таких совпадений мы не замечаем вовсе. Если бы вместо него или нее появился другой или другая, мы не осознали бы, что звучит Бетховен.

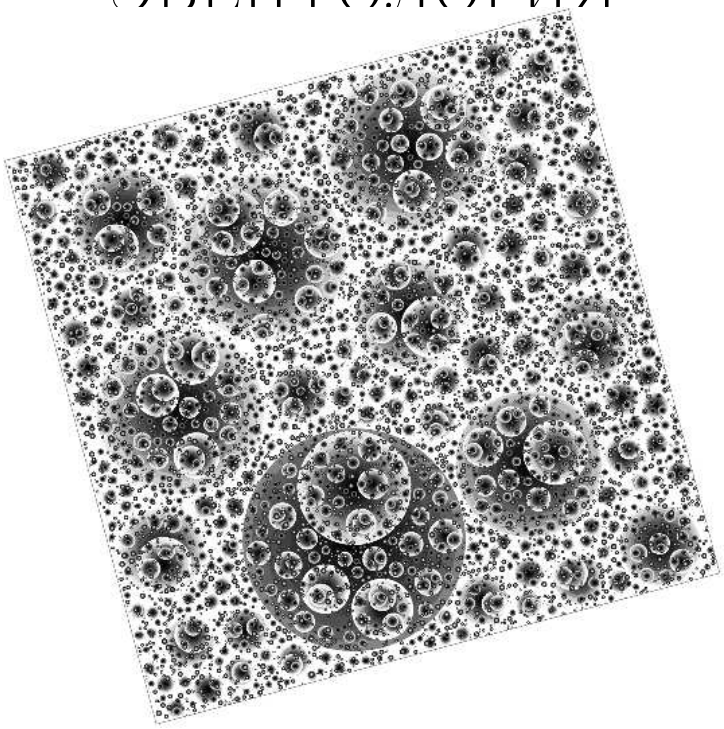
Зарождающаяся любовь, однако, обостряет в нас чувство красоты, и этой музыки мы уже никогда не забудем. Всякий раз, когда услышим ее, мы растрогаемся. Все, что будет происходить в эту минуту вокруг нас, озарится этой музыкой и станет прекрасным.

Симметрически замкнутые композиции случайных событий, в которых возникает одинаковый мотив событий в начале и в конце, могут показаться выдуманными и чересчур искусственными. Однако именно так и компонуются человеческие жизни. Они скомпонованы так же, как музыкальное сочинение. Человек, ведомый чувством красоты, превращает случайное событие (мимолетный взгляд, музыку Бетховена) в мотив, который навсегда останется в композиции событий его жизни. Он возвращается к нему, повторяет его, изменяет, развивает, как композитор — тему своей сонаты. Сам того не ведая, человек творит свою жизнь по законам красоты даже в пору самой глубокой безысходности. Нельзя, следовательно, упрекать жизнь в том, что она заворожена тайными встречами случайностей (подобными неожиданным встречам, обрывкам музыкальных фраз, порывам ветра), но можно справедливо упрекать большинство людей в том, что в своей повседневной жизни они слепы к таким случайностям. Их жизнь тем самым утрачивает свое измерение красоты».

Эвентология — новое направление теории вероятностей, изучающее законы движения множеств случайных событий, существование которых оправдывает невыносимо легкое наблюдение: материя и разум — это просто удобный способ связывания событий воедино. Наряду с математическими и эвентологическими вопросами эвентология затрагивает общечеловеческие и философские вопросы, над которыми каждый из нас задумывается и размышляет на протяжении всей своей жизни.

Часть первая

# ЭВЕНТОЛОГИЯ



# Глава 1
# ОБЩИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

Рассматриваются общие принципы, лежащие в основе эвентологии как науки о событиях. Эти общие принципы существенно расширяют теоретические и прикладные возможности эвентологии, предоставляют общую эвентологическую точку зрения как на постановку, так и на решение не только многих известных, но и целого ряда новых задач в теории вероятностей, математической статистике, а также в естественных, гуманитарных и социально-экономических науках.

## 1.1 Пространство исходов бытия

Пространство исходов бытия — пространство, элементами которого служат все возможные состояния бытия; считается заданным до начала любого эвентологического исследования; играет роль общего пространства $\Omega$ элементарных событий $\omega \in \Omega$, образующего вместе с алгеброй $\mathcal{F}$ и вероятностью $\mathbf{P}$ общее вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, которое называется *эвентологическим пространством*.

## 1.2 Событие

Событие, «со-бытие» — способ сосуществования бытия и разума; ключевое понятие эвентологии, определяемое как воспринимаемое и/или создаваемое разумом «со-бытие» $x \subseteq \Omega,\ x \in \mathcal{F}$ — подмножество пространства исходов бытия; то, что присуще вероятности

и ценности, составляет их конкретное существование — без вероятности $\mathbf{P}(x)$ и ценности $\mathbf{V}(x)$ событие $x$ существовать не может; а также: «со-бытие» $x$ — это то, что произошло, происходит или будет происходить ($\omega \in x$) в определённой точке пространства-времени, и следовательно могло, может или сможет быть воспринятым и/или созданным разумом в данной точке пространства-времени. *Колмогоровское событие*[1] — одно из основных понятий теории вероятностей. Понятие события используется во всех без исключения гуманитарных, социальных, естественных науках и математике. В обыденном смысле событие — это то или иное значительное явление, факт, состояние, ситуация или стечение обстоятельств общественной или личной жизни.

## 1.3 Разрешающая событийная способность разума

*Разрешающая событийная способность разума*, ограниченная различимость разумом элементарных событий $\omega \in \Omega$, означает, что различные исходы бытия $\omega \in \Omega$ отделяются *частным разумом*[2] один от другого только в том случае, если они принадлежат различным событиям-террраскам

$$\operatorname{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

которые порождены множеством событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, определяющим данный частный разум; «разрешающая событийная способность частного разума» ограничена фрагментами (событиями-террасками) разбиения пространства исходов бытия:

$$\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \operatorname{ter}(X),$$

которыми только и может оперировать частный разум, чтобы отличить один исход бытия $\omega \in \Omega$ от другого $\omega' \in \Omega$.

[1] *Колмогоровское событие* — подмножество пространства исходов бытия, удовлетворяющее колмогоровским аксиомам теории вероятностей.

[2] *Частный разум — разумный субъект.*

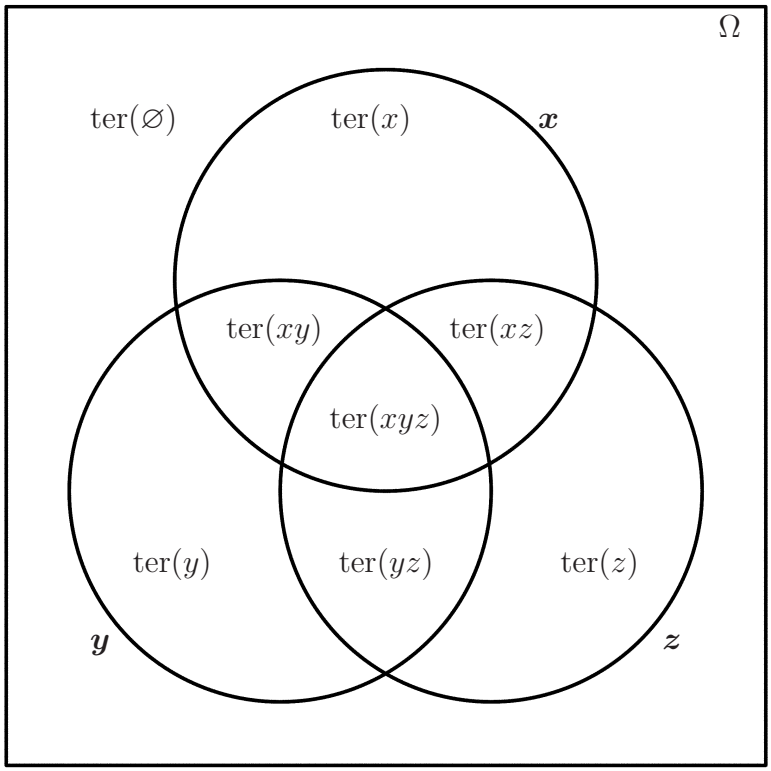



Рис. 1.1. Разрешающая способность разума ограничена событиями-террасками $\mathrm{ter}(X)$, порожденными его собственным множеством событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$: каждое из восьми событий-террасок $\mathrm{ter}(\varnothing), \mathrm{ter}(x), \mathrm{ter}(y), \mathrm{ter}(z), \mathrm{ter}(xy), \mathrm{ter}(xz), \mathrm{ter}(yz)$ и $\mathrm{ter}(xyz)$ воспринимается разумом как собственное элементарное со-бытие.

Исходы бытия $\omega \in \mathrm{ter}(X)$ и $\omega' \in \mathrm{ter}(X)$, попадающие в одно и то же событие-террасу $\mathrm{ter}(X)$, воспринимаются частным разумом как идентичные; «собственные» события-террасы $\mathrm{ter}(X)$, т.е. события-террасы, порожденные «собственным» множеством событий $\mathfrak{X}$, частный разум воспринимает как элементарные события, каковыми они не являются по своей природе; частный разум различает исходы бытия «с точностью до собственных событий-террасок».

## 1.4 Перспективность «со-бытия» и перспективность событий

Перспективность «со-бытия» — это способность разума воспринимать и осознавать собственное «со-бытие» перспективно и ретроспективно как во времени, так и в пространстве; способность разума перспективно отождествлять собственное «со-бытие» в прошлом, настоящем и будущем в различных точках пространства; способность разума объединять в собственном одноактном «со-бытии» стечения множеств событий, происходящих в различных точках времени и пространства.

## 1.5 Дуальность «со-бытия» и дуальное событие

*То, что сжимают, расширяется.*
*То, что ослабляют, укрепляется.*
*То, что уничтожают, расцветает.*
*Кто хочет отнять, теряет.*
*Мягкое преодолевает твёрдое.*
*Слабое побеждает сильное.*

Лао-Цзы[3] [82].

Дуальность «со-бытия» — основа полярности разума и бытия; устанавливает два взаимопроникающих начала события: «быть воспринятым» и «быть созданным» частным разумом; отражает два способа «со-быть» для частного разума: «со-быть приёмником» (восприятие) и «со-быть источником» (деятельность). Дуальность полярных начал разума и бытия воплощена в древнекитайском символе «Инь и Ян»[4]. Принцип «дуальности со-бытия» особо выделяет

[3] *Лао-Цзы (Старый Младенец, Мудрый Старец, VI-V века до н. э.)* — древнекитайский философ, один из основателей даосизма, автор трактата «Дао Дэ Цзин» («Канон Пути и Благодати», другое название «Три Телеги» — написанный на бамбуке занимал три телеги).

[4] *Инь и Ян* — одна из основ древнекитайской философии. В «Книге перемен» («И-цзин», англ. «I Ching», 1 тыс. до н. э.) пара противоположных начал, выражающая идею дуальности «со-бытия» — основу полярности бытия и разума в неограниченном ряду противоположностей: *тёмное и светлое, отрицательное и положительное, пассивное и активное, мягкое и твёрдое, холодное и горячее, восприятие (любить) и творчество (творить), логика (осознанное) и интуиция (неосознанное), ложь и истина, расчёт и риск, внутреннее и внешнее, нижнее и верхнее, обольщение и прозрение , тело и душа, женское и муж-*

одну пару противоположных начал: *восприятие и деятельность*, отводя ей роль основополагающей пары, событийно порождающей все остальные мыслимые пары противоположных начал разума и бытия; эвентологической моделью принципа дуальности «со-бытия» служит дуальное событие

$$\ddot{x}_\mu = \{x^\uparrow_\mu,\ x^\downarrow_\mu\}$$

— пара колмогоровских событий, где $x^\uparrow_\mu \subseteq \Omega$ — создание «со-бытия» $x$, а $x^\downarrow_\mu \subseteq \Omega$ — восприятие «со-бытия» $x$ частным разумом $\mu \in \mathfrak{M}$.

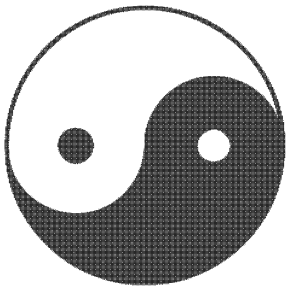


Рис. 1.2. Символ Инь и Ян — одна из основ древнекитайской философии. В «Книге перемен» («И-цзин», англ. «I Ching», 1 тыс. до н. э.) пара противоположных начал, выражающая идею дуальности «со-бытия» — полярности бытия и разума. Светлая точка на тёмном фоне и тёмная на светлом символизируют взаимопроникновение дуальных начал «со-бытия».

### 1.5.1 Событийное восприятие

*Событийное восприятие*[5] — ощущение и осознание «со-бытий» частным разумом; пассивное взаимодействие частного разума и бытия; включает вспомогательную деятельность, призванную обслуживать это взаимодействие; обычно происходит сверхбыстро, неосознанно, не выражается словесно, чаще всего не требует строгой мотивации;

---

*ское, земное и небесное, зло и добро (в западной культуре)* и т.д., существующих вместе в постоянном взаимодействии. Этимологически означает теневой и солнечный склоны холма или берега реки (см. рис. 1.2 и 14.7).

[5] На другое восприятие разум не способен.

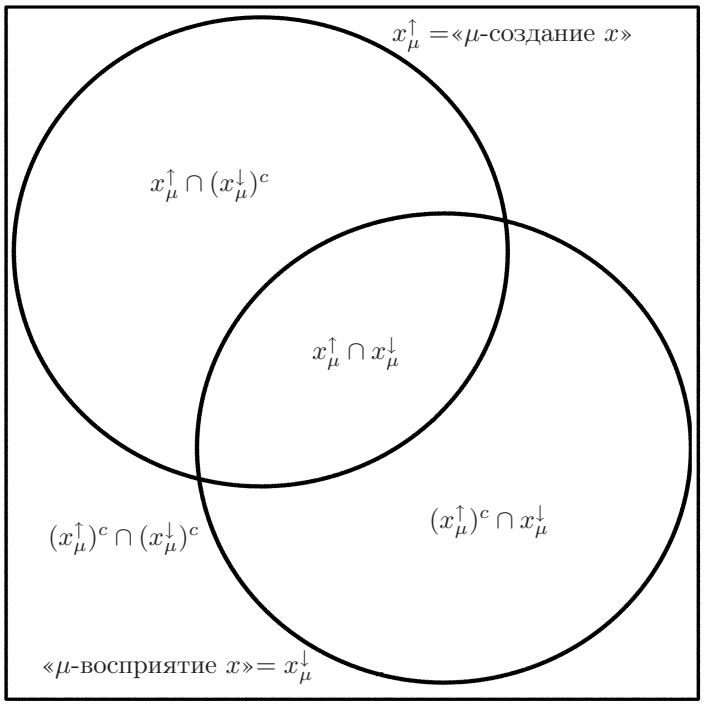



Рис. 1.3. Диаграмма Венна дуального события $\ddot{x}_\mu = \{x^{\uparrow}_{\mu},\ x^{\downarrow}_{\mu}\}$, состоящего из двух колмогоровских событий: $x^{\uparrow}_{\mu}$ = «$\mu$-создание $x$» и $x^{\downarrow}_{\mu}$ = «$\mu$-восприятие $x$», которое разбивает $\Omega$ на четыре события-терраски $x^{\uparrow}_{\mu} \cap x^{\downarrow}_{\mu}$, $x^{\uparrow}_{\mu} \cap (x^{\downarrow}_{\mu})^c$, $(x^{\uparrow}_{\mu})^c \cap x^{\downarrow}_{\mu}$ и $(x^{\uparrow}_{\mu})^c \cap (x^{\downarrow}_{\mu})^c$.

порождается способностью частного разума быть приёмником событий, связывая, сравнивая и анализируя ощущения различных событий, реализуя своё *событийное восприятие*; «узнавание» частным разумом «со-бытия», основанное на принципе перспективности событий, — сложный быстрый процесс, состоящий из трёх уровней, обычно не осознаваемых раздельно:

- «простое восприятие» (воспоминание и сравнение событий),
- «сложное восприятие» (воспоминание о взаимосвязях между событиями),

- «полное восприятие» (воспоминание о событии в общем ряду прошлых событий);

на всех трёх уровнях основано главным образом на способности частного разума помнить прошлые события и связывать их с настоящими и будущими событиями.

### 1.5.2 Событийная деятельность

*Событийная деятельность*[6] — создание событий частным разумом; активное взаимодействие частного разума и бытия; включает восприятие событий, призванное обслуживать это взаимодействие; связана с мотивами, побуждающими к *деятельности*, и целями — ожидаемыми результатами *деятельности*: безмотивной *деятельности* не бывает; порождается способностью частного разума быть источником событий (событий-действий и событий-операций), создавая которые он реализует свою *событийную деятельность*. Деятельность частного разума по созданию «со-бытия», основанная на принципе перспективности событий, — сложный и постепенный процесс, состоящий из обыкновенно не осознаваемых раздельно трёх уровней:

- «простая деятельность» (предвидение и сравнение событий),
- «сложная деятельность» (предвидение взаимосвязей между будущими событиями),
- «полная деятельность» (предвидение события в ряду будущих событий).

Деятельность на всех трёх уровнях основана главным образом на способности частного разума представить будущий ход событий и связать его с настоящими и прошлыми событиями. Не всякая активность частного разума есть деятельность. Деятельность — всегда осознанные действия, акт поведения. Неосознанные действия (автоматизм) не являются актами поведения, а следовательно — и деятельностью.

## 1.6 Вероятность события

Вероятность события $\mathbf{P}(x)$ — одно из существенных свойств события $x \subseteq \Omega$, воспринимаемое и осознаваемое разумом; то, что ему присуще, составляет его конкретное существование — без вероятности

[6] На другую деятельность разум не способен.

$\mathbf{P}(x)$ событие $x$ существовать не может, как и вероятность $\mathbf{P}(x)$ не может существовать без события $x$; характеризует вероятность разума «со-быть», степень возможности разума «со-быть» — воспринять и осознать наступление ($\omega \in x$) данного события $x$ в результате исхода бытия $\omega \in \Omega$; отражает основополагающее отношение разума, события и бытия; лежит в основе вероятностных закономерностей, описывающих природу объективной и субъективной неопределённости.

## 1.7 Ценность события

Ценность события — одно из существенных свойств события, осознаваемое разумом; то, что ему присуще, составляет его конкретное существование — без ценности событие существовать не может, как и ценность не существует без события; характеризует степень ценности для разума «со-быть» — воспринять и создать наступление данного события в результате исхода бытия; отражает основополагающее отношение разума, события и бытия; лежит в основе вероятностных закономерностей, описывающих природу объективной и субъективной неопределённости; подразделяется на два вида:

- *ценность восприятия* — ценность $\mathbf{V}(x_\mu^\downarrow)$ события $x_\mu^\downarrow$, ценность восприятия разумом $\mu$ «со-бытия» $x$;
- *ценность деятельности* — ценность $\mathbf{W}(x_\mu^\uparrow)$ события $x_\mu^\uparrow$, ценность создания разумом $\mu$ «со-бытия» $x$;

математически определяется соотношениями «ценность — вероятность», одно из которых «ценность восприятия — вероятность»

$$\frac{\mathbf{P}(x_\mu^\downarrow)}{p_0} = \exp\Big\{ -\beta_\mu(\mathbf{V}(x_\mu^\downarrow) - v_0)\Big\}$$

основано на аналогичном соотношении Больцмана «энтропия — вероятность» из статистической механики, а второе «ценность деятельности — вероятность»

$$\frac{\mathbf{P}(x_\mu^\uparrow)}{p_0} = \exp\Big\{\gamma_\mu(\mathbf{W}(x_\mu^\uparrow) - w_0)\Big\}$$

не имеет аналогов в естественных науках[7].

## 1.8 Нечёткость «со-бытия» и нечёткое событие

Нечёткость «со-бытия» порождается совокупностью частных разумов, которые не способны одинаковым образом «со-быть» — одинаково воспринимать «одно и то же» бытие; в результате такой неспособности разумов любое совокупное «со-бытие» состоит из множества различных частных «со-бытий»-образов, каждое из которых есть «со-бытие» частных разумов из совокупности, воспринимаемое ими как одно и то же совокупное «со-бытие»; множество частных событий-образов определяется в эвентологической теории как *нечёткое событие*

$$\tilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\};$$

эвентологическая функция принадлежности нечёткого события $\tilde{x}$ определяется как среднее индикаторных функций событий-образов $x_\mu$:

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega).$$

Эвентологическое понятие нечёткого события существенно обобщает аналогичное из классической теории нечётких множеств Заде, где нечёткое событие фактически отождествляется с функцией принадлежности, определенной на пространстве элементарных событий. Более того, эвентологическая теория рассматривает еще один вид нечёткости — нечёткость частного разума $\mu \in \mathfrak{M}$, которая порождается множеством событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, и математической моделью которой служит нечёткое событие

$$\tilde{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$$

с соответствующей эвентологической функцией принадлежности

$$\mathbf{1}_{\tilde{\mu}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|} \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega).$$

[7]Параметры соотношений «ценность — вероятность» $\beta_\mu > 0$ и $\gamma_\mu > 0$ характеризуют частный разум $\mu \in \mathfrak{M}$: $\beta_\mu$ — интенсивность восприятия, $\gamma_\mu$ — интенсивность деятельности частного разума $\mu$; параметры $p_0, v_0$ и $w_0$ обеспечивают для $\mathbf{P}$ выполнение аксиом теории вероятностей.

С эвентологической точки зрения невозможно определить нечёткое событие *вообще*. Любое нечёткое событие — это относительное понятие, которое определяется множеством частных разумов $\mathfrak{M}$ или множеством событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$.

## 1.9 Разум как множество событий

Любое изложение эвентологической теории не может обойтись без разъяснения ключевого положения эвентологии: *разум* $\mu \in \mathfrak{M}$ — *это множество событий*

$$\tilde{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\};$$

*точнее: разумный субъект* $\mu \in \mathfrak{M}$ *— это эвентологическое распределение (Э-распределение) множества событий* $\tilde{\mu}$.

Эвентология выдвигает и более парадоксальное обратное положение: *любое Э-распределение множества событий — это разум.* Множество событий, о котором идет речь, — это так называемое «собственное» множество событий, «принадлежащее» разуму и его эвентологически определяющее. Таким образом *разум — это Э-распределение его собственного множества событий; а то, что владеет Э-распределением множества событий, есть разум.*

Если второе положение выглядит спорным, то с первым частный разум обычно соглашается без особых усилий. Однако после такого общего соглашения почти всегда наступает «момент истины»: разумному субъекту оказывается легче представить себя *«вырожденным Э-распределением»*, чем *«общим»*, о котором идет речь в эвентологической теории. Чтобы развеять данное сомнение, каждому из нас ничего не остается, как мысленно представить свое повседневное поведение, в котором собственное Э-распределение наиболее очевидным образом проявляется на том или на другом множестве событий: *эвентологическая покупка:* частный разум в супермаркете; *эвентологическое мнение:* частный разум и его собственное мнение; *эвентологический выбор:* частный разум принимает решение.

## 1.10 Человек событийный (Homo eventus)

*Разум возникает*
*там и тогда, где и когда*

*рождается способность*
*преодолевать страх.*

Человек — общественное существо, обладающее сознанием, разумом; субъект исторической деятельности и культуры. Сущность человека, его происхождение и назначение, место человека в мире неизменно остаются центральными проблемами религии, философии, общественных и естественных наук, а также — математики.

Биологический вид *Homo biologicus* включается в отряд приматов. *Человека умелого* (*Homo habilis*, 8–5 млн. лет назад) считают первым представителем вида *Homo*. 1.6 – 1.5 млн. лет назад появился *человек прямоходящий* (*Homo erectus*). Позднее возник *человек разумный* (*Homo sapiens*). Около 40 тыс. лет назад (ранний палеолит) человек разумный становится единственным представителем семейства *гоминид* и к концу палеолита заселяет практически всю Землю. Культурологический вид *Homo culturologicus* разделяется на различные типы. Если основной фигурой Возрождения был *человек-строитель (Homo faber)*, фигурой информационного общества — *человек-познаватель (Homo sapiens)*, то основной фигурой нового общества становится *бизнес-человек, человек-изобретатель, человек выдумывающий*. Ни в одну из прошедших эпох такой человек не был наиболее распространенным типом. *Хейзинга*[8] ввел в культурологию еще один термин — *Homo ludens (человек играющий)*[9], имея в виду, что человек, как и животное до человека, оформляет свою жизнь в виде игры и таким образом строит свою культуру во всем ее разнообразии. Экономический вид *Homo economicus* имеет свои разновидности. Современная экономическая теория предполагает существование *Homo economicus (человека экономического)*[10], который

[8] *Хейзинга, Иоганн (Huizinga, Iohann, 1872–1945)* — нидерландский философ и историк, занимался морфологическим анализом процесса культурного развития, термин *Homo ludens* введен им в книге: (1939) *Homo ludens. Versuch einer Bestimmung des Spielelementes der Kultur* (Человек играющий. Попытка определения игрового элемента культуры).

[9] *Homo ludens, лат. — человек играющий*

[10] *Homo economicus (лат.), economic man (англ.) — человек экономический* (человек рационального поведения — термин, который многие экономисты используют, когда выводят, объясняют и проверяют свои модели и теории; человек с высокоразвитой экономической интуицией и обширными познаниями, принимающий рациональные варианты экономических решений; идеальная модель экономического субъекта, поведение которого рационально и характеризуется стремлением получить максимальную выгоду).

способен в своем поведении принимать рациональные решения. В последние годы наряду с человеком экономическим предполагается также существование *Homo reciprocans*[11] — *человека обменивающегося*, который склонен к кооперативному поведению и ждет такого же поведения от окружающих. В других областях, желая выделить ту или иную строну человеческого поведения, иногда говорят о *Homo sociologicus*, *Homo politicus*, *Homo religiosus*[12] и т.п.

Однако все перечисленные выше виды *Homo* выглядят заметно более частными по сравнению с эвентологическим представлением о человеке и могут рассматриваться как различные стороны своеобразного эвентологического вида *Homo — человека событийного (Homo eventus)*[13], олицетворяющего собой ту индивидуальную последовательность событий, которая полностью определяет личность и существование человека. С точки зрения эвентологии последовательность событий, как и любое множество событий, однозначно характеризуется своим *эвентологическим распределением (Э-распределением)*. Следовательно, как эвентологический вид *человек событийный* обладает и определяется собственным индивидуальным Э-распределением. *Homo eventus* стремится к Э-гармоничным отношениям с окружающим миром. Э-гармоничное поведение *Homo eventus* противопоставляется рыночному поведению (крест Маршалла: спрос–предложение), к которому стремится *классический Homo economicus*, а также — Э-рыночному поведению (Э-крест Маршалла: Э-спрос–Э-предложение), к которому стремится *эвентологический Homo economics. Э-гармоничное поведение* — оригинальная эвентологическая формулировка стремлений *Homo eventus*, опирающаяся на теорию перспектив (Канеман и Тверски [166, 225]) и теорию рефлексии (Лефевр [178]). Теория перспектив предлагает отказаться от модели *Homo economicus* в пользу *человека иррационального*, поведение которого иррационально и формируется на основе собственных вкусов и предпочтений, эмоций и заблуждений. Теория рефлек-

[11] *Homo reciprocans (лат.) — человек обменивающийся*, модель человеческого поведения, отличающаяся от поведения Homo economicus повышенным уровнем кооперативности, с одной стороны, и склонностью наказывать партнеров за некооперативное поведение, даже в ущерб своим частным интересам, — с другой.

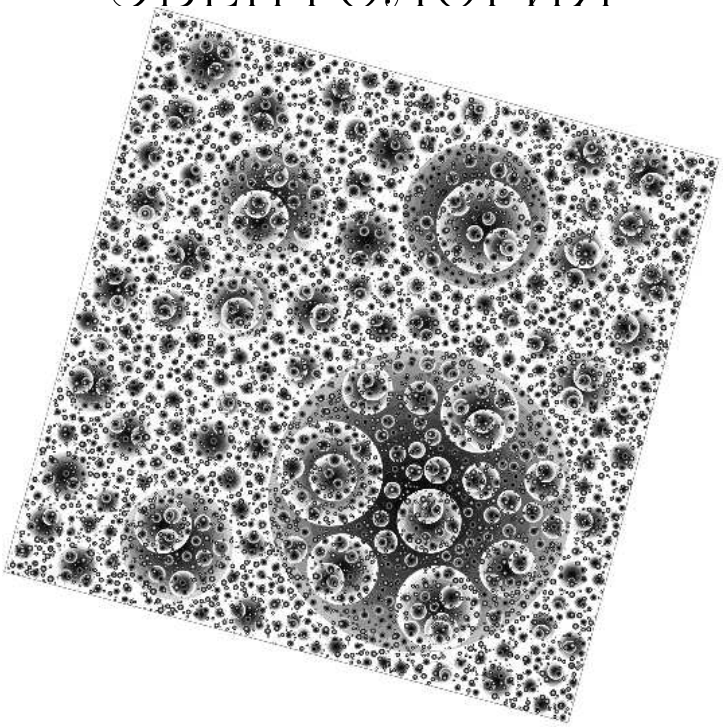
[12] *Homo sociologicus, Homo politicus, Homo religiosus (лат.) — человек социологический, человек политический, человек религиозный.*

[13] *Homo eventus (лат.) — человек событийный*

сии считает, что «разум появляется там и тогда, где и когда появляется способность делать вероятностный выбор», которая нужна разуму для поддержания вероятностной гармонии между собственным иррациональным эвентологическим поведением и эвентологическим состоянием окружающего мира.

Часть вторая

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭВЕНТОЛОГИЯ



# Глава 2
# АКСИОМАТИКА КОЛМОГОРОВА

Аксиоматика Колмогорова — общепринятый аксиоматический подход к математическому описанию события и вероятности; предложен Андреем Николаевичем Колмогоровым в 1929; придал теории вероятностей современный стиль.

## 2.1 История аксиоматизации теории вероятностей

Проблема аксиоматизации теории вероятностей включена Гильбертом[1] в формулировку его 6-й проблемы «Математическое изложение основ физики»:

«С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика. Что касается аксиом теории вероятностей, то мне казалось бы желательным, чтобы параллельно с логическим обоснованием этой теории шло рука об руку строгое и удовлетворительное развитие метода средних значений в математической физике, в частности, в кинетической теории газов».

[1] *Гильберт, Давид (*нем. *Hilbert, David, 1862–1943)* — выдающийся немецкий математик. Его работы оказали большое влияние на развитие многих разделов математики: теории инвариантов (1885-93), теории алгебраических чисел (1893-98), оснований геометрии (1898-1902), теории интегральных уравнений (1900-10), основ математической физики (1910-22), логических основ математики (1922-39) и др.

До Колмогорова[2] попытки аксиоматизировать теорию вероятностей предпринимали Больман[3] (1908) [110], Бернштейн[4] (1917) [5], Мизес[5] (1919 и 1928) [190], а также Ломницкий[6] (1923) [182] на базе идей Бореля[7] [113] о связи понятий вероятности и меры.

Колмогоров под влиянием идей теорий множеств, меры, интегрирования, функций сформулировал простую систему аксиом (вообще говоря, не являющуюся единственной) [78, 79], которая позволила описать уже существовавшие к тому времени классические разделы теории вероятностей, дать толчок развитию её новых разделов, например, теории случайных процессов, и стала общепринятой в современной теории вероятностей.

## 2.2 Колмогоровские аксиомы элементарной теории вероятностей

Элементарная теория вероятностей — та часть теории вероятностей, в которой приходится иметь дело с вероятностями лишь конечного числа событий. Теория вероятностей, как математическая дисциплина, может и должна быть аксиоматизирована совершенно в том же смысле, как геометрия или алгебра. Это означает, что, после того как

[2] *Колмогоров, Андрей Николаевич (1903–1987)* — выдающийся русский математик. Основоположник современной теории вероятностей. Работал в области топологии, логики, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов.

[3] *Больман Г. (Bohlmann G.)* — немецкий математик.

[4] *Бернштейн, Сергей Натанович (1880–1968)* — российский математик. Основные труды по теориям функций, приближений, дифференциальных уравнениях, а также по теории вероятностей, в которой им предложена одна из первых (1917) *аксиоматик*. В теории приближений его имя носят «полиномы Бернштейна».

[5] *фон Мизес, Рихард Эдлер (*нем. *von Mises, Richard Edler, 1883–1953)* — немецкий математик и механик. Основные работы в механике жидкостей, аэродинамике, аэронавтике, статистике и теории вероятностей. В теории вероятностей предложил и отстаивал частотную концепцию понятия вероятности, ввел в общее употребление интегралы Стильтеса и первым разъяснил роль теории марковских цепей в физике. Признанный эксперт в поэзии Райнера Марии Рильке.

[6] *Ломницкий А. (Lomnicki A.)* — французский математик.

[7] *Борель, Феликс Эдуард Жустин Эмиль (*фр. *Borel, Félix Édouard Justin Émile, 1871–1956)* — французский математик и политический деятель. Один из основоположников теории меры (вместе с Рене Бэром и Анри Лебегом) и её приложений в теории вероятности. Многие математические объекты названы его именем.

даны названия изучаемым объектам и их основным отношениям, а также аксиомы, которым эти отношения должны подчиняться, всё дальнейшее изложение должно основываться исключительно лишь на этих аксиомах, не опираясь на обычное конкретное значение этих объектов и их отношений. Аксиоматизация теории вероятностей может быть проведена различными способами в отношении как выбора аксиом, так и выбора основных понятий и основных соотношений. Если преследовать цель возможной простоты как самой системы аксиом, так и построения на ней дальнейшей теории, то представляется наиболее целесообразным аксиоматизирование понятия случайного события и его вероятности.

Пусть $\Omega$ — множество элементов $\omega$, которые называются элементарными событиями, а $\mathcal{F}$ — множество подмножеств $\Omega$, называемых случайными событиями (или просто — событиями), а $\Omega$ — пространством элементарных событии.

*Аксиома I (алгебра событий).* $\mathcal{F}$ является алгеброй событий.

*Аксиома II (существование вероятности событий).* Каждому событию $x$ из $\mathcal{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\mathbf{P}(x)$, которое называется вероятностью события $x$.

*Аксиома III (нормировка вероятности).* $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

*Аксиома IV (аддитивность вероятности).* Если события $x$ и $y$ не пересекаются, то $\mathbf{P}(x + y) = \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y)$.

Совокупность объектов $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, удовлетворяющая аксиомам I-IV, называется вероятностным пространством (у Колмогорова: поле вероятностей). Система аксиом I-IV непротиворечива. Это показывает следующий пример: $\Omega$ состоит из единственного элемента $\omega$, $\mathcal{F}$ — из $\Omega$ и невозможного событий (пустого множества) $\emptyset$, при этом положено $\mathbf{P}(\Omega) = 1, \mathbf{P}(\emptyset) = 0$. Однако эта система аксиом не является полной: в разных вопросах теории вероятностей рассматриваются различные вероятностные пространства.

## 2.3 Колмогоровская эмпирическая дедукция аксиом

Обычно можно предполагать, что система $\mathcal{F}$ рассматриваемых событий $x, y, z, \ldots$, которым приписаны определённые вероятности, образует алгебру событий, содержащую в качестве элемента множе-

ство $\Omega$ (*аксиома I*, а также *первая часть аксиомы II* — существование вероятности). Можно практически быть уверенным, что если эксперимент повторен большое число $n$ раз и если при этом через $m$ обозначено число наступления события $x$, то отношение $m/n$ будет мало отличаться от $\mathbf{P}(x)$. Далее ясно, что $0 \leq m/n \leq 1$, так что *вторая часть аксиомы II* оказывается вполне естественной. Для события $\Omega$ всегда $m = n$, благодаря чему естественно положить $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ (*аксиома III*). Если, наконец, $x$ и $y$ несовместны между собой (то есть события $x$ и $y$ не пересекаются как подмножества $\Omega$), то $m = m_1 + m_2$, где $m, m_1, m_2$ обозначают соответственно число экспериментов, исходами которых служат события $x + y, x, y$. Отсюда следует: $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$. Поэтому уместно положить: $\mathbf{P}(x + y) = \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y)$ (*аксиома IV*).

## 2.4 Аксиома непрерывности и бесконечные вероятностные пространства

В отличие от элементарной теории вероятностей, теоремы, которые выводятся в общей математической теории вероятностей, естественно применяются также и к вопросам, связанным с бесконечным числом случайных событий, однако при изучении этих последних применяются существенно новые принципы. В большей части современной теории вероятностей предполагается, что кроме аксиом элементарной теории вероятностей (I-IV) выполняется ещё следующая

*Аксиома V (аксиома непрерывности).* Для убывающей последовательности $x_1 \supseteq x_2 \ldots \supseteq x_n \supseteq \ldots$ событий из $\mathcal{F}$ такой, что : $\bigcap_n x_n = \emptyset$, имеет место равенство : $\lim_n \mathbf{P}(x_n) = 0$.

*Аксиома непрерывности* — это единственная аксиома современной теории вероятностей, относящаяся именно к ситуации бесконечного числа случайных событий. Обычно в современной теории вероятностей вероятностным пространством называется только такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, которое, кроме того, удовлетворяет *аксиоме V*. Вероятностные пространства в смысле *аксиом I-IV* Колмогоров предлагал называть *вероятностными пространствами в расширенном смысле* (у Колмогорова: *поле вероятностей в расширенном смысле*), в настоящее время этот термин употребляется крайне редко. Заметим, что если система событий $\mathcal{F}$ конечна,

*аксиома V* следует из *аксиом I-IV*. Все модели с вероятностными пространствами в расширенном смысле удовлетворяют, следовательно, *аксиоме V*. Система *аксиом I-V* является непротиворечивой и неполной. Напротив, для бесконечных вероятностных пространств *аксиома V* является независимой от *аксиом I-IV*.

Так как новая аксиома существенна лишь для бесконечных вероятностных пространств, то почти невозможно разъяснить её эмпирическое значение, например, так, как это было проделано с *аксиомами I-IV* элементарной теории вероятности. При описании какого-либо действительно наблюдаемого случайного процесса можно получать только конечные поля — вероятностные пространства в расширенном смысле. Бесконечные вероятностные пространства появляются как идеализированные схемы действительных случайных явлений. Общепринято молчаливо ограничиваться такими схемами, которые удовлетворяют *аксиоме V*, что оказывается целесообразным и эффективным в различных исследованиях.

## 2.5 Бесконечные вероятностные пространства и «идеальные события»

Алгебра $\mathcal{F}$ событий пространства элементарных событий $\Omega$ называется борелевской алгеброй, если все счётные суммы $\sum_n x_n$ событий $x_n$ из $\mathcal{F}$ принадлежат $\mathcal{F}$. В современной теории вероятностей борелевские алгебры событий обычно называют $\sigma$-алгебрами событий (сигма-алгебрами). Пусть дано вероятностное пространство в расширенном смысле $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$. Известно, что существует наименьшая сигма-алгебра $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$, содержащая $\mathcal{F}_0$. Более того, справедлива

Теорема (о продолжении). *Определённую на* $(\Omega, \mathcal{F}_0)$ *неотрицательную счётно-аддитивную функцию множеств* $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\cdot)$ *всегда можно продолжить с сохранением обоих свойств (неотрицательности и счётной аддитивности) на все множества из* $\mathcal{F}$ *и при этом единственным образом.*

Таким образом, каждое вероятностное пространство в расширенном смысле $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ может быть математически корректно продолжено до бесконечного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, которое в современной теории вероятностей принято называть просто вероятностным пространством.

Вместе с тем множества из сигма-алгебры $\mathcal{F}$ бесконечного вероятностного пространства можно рассматривать только как *«идеальные события»*[8], которым ничего не соответствует в реальном мире. Если, однако, рассуждение, которое использует вероятности таких *«идеальных событий»* приводит к определению вероятностей *«реального события»* из $\mathcal{F}$, то это определение, очевидно, автоматически будет непротиворечивым и с эмпирической точки зрения.

[8] Термин А. Н. Колмогорова [78, 79].

# Глава 3
# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

Предлагаются математические эвентологические принципы, которые вместе с общими эвентологическими принципами составляют основу эвентологии и математической эвентологии: «Двойственность множества событий и случайного множества событий», «Эквивалентность множества событий и эвентологического распределения», «Эвентологическая триада: событие, вероятность и ценность».

## 3.1 Двойственность множества событий и случайного множества событий

Эвентологическая двойственность понятий множества случайных событий и случайного множества событий заключается в том, что одно и то же эвентологическое распределение служит вероятностным распределением двух разных математических объектов: множества случайных событий и случайного множества событий; при этом события-терраски, порожденные множеством событий, также интерпретируются двойственным образом.

*Множество событий, множество случайных событий* — множество избранных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ некоторого эвентологического

пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$; а также *случайное множество событий*

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right),$$

определенное под множеством избранных событий $\mathfrak{X}$, позволяют записывать одни и те же события-террасы $\mathrm{ter}(X) \in \mathcal{F}$, порождаемые множеством событий $\mathfrak{X}$ и измеримые относительно алгебры $\mathcal{F}$, двумя способами: на языке

- событий — подмножеств $x \subseteq \Omega$:

$$\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c \subseteq \Omega;$$

- множеств событий — подмножеств $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$\mathrm{ter}(X) = \Big\{\omega : K(\omega) = X\Big\} \subseteq \Omega.$$

## 3.2 Эквивалентность множества событий и эвентологического распределения

Эвентологическая эквивалентность понятий *множества событий*, *случайного множества событий* и *эвентологического распределения* заключается в том, что задание *множества событий*, как и задание соответствующего *случайного множества событий* эквивалентно заданию *эвентологического распределения* — набора вероятностей событий-террасок, порожденных данным множеством событий.

*Эвентологическое распределение (Э-распределение)* множества событий $\mathfrak{X}$, состоящего из $N = |\mathfrak{X}|$ событий, — это набор из $2^N$ вероятностей событий-террасок $\mathrm{ter}(X) \subseteq \Omega$, порожденных этим множеством событий. Множество всех таких событий-террасок образует разбиение пространства элементарных событий

$$\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathrm{ter}(X),$$

а набор вероятностей фрагментов разбиения[1]

$$\Big\{p(X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X)),\ X \subseteq \mathfrak{X}\Big\}$$

[1] Фрагменты разбиения $\Omega$ — это события-террасы $\mathrm{ter}(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$.

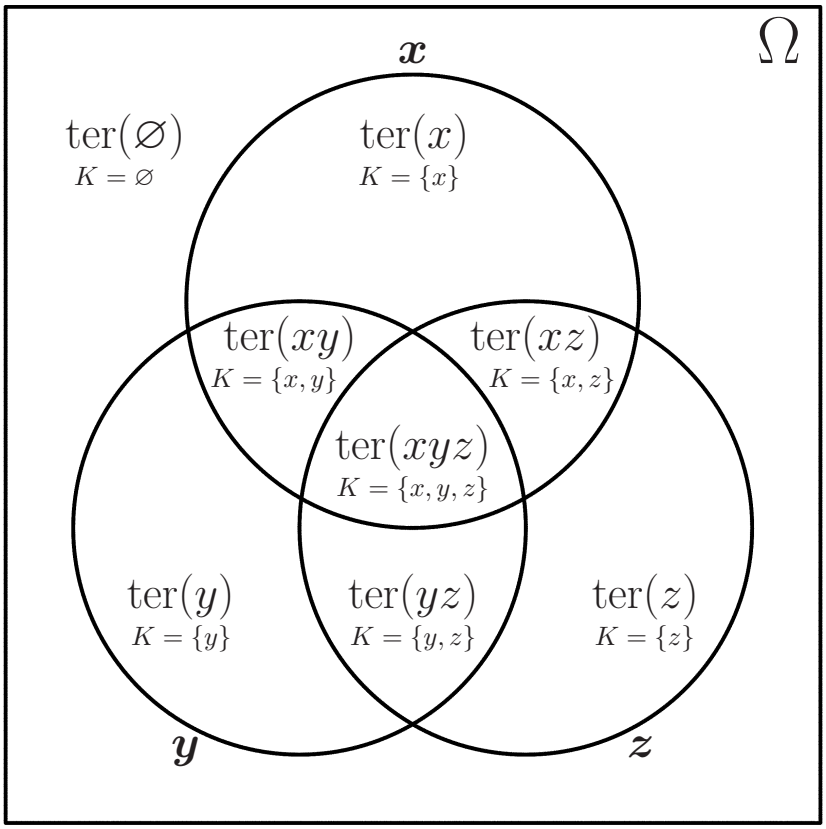



Рис. 3.1. Диаграмма Венна, иллюстрирующая двойственность *триплета событий* $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$ и *случайного триплета событий* $K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$ — случайного элемента со значениями из множества всех подмножеств событий $2^{\mathfrak{X}}$. События-террасы $\operatorname{ter}(X)$, порожденные *триплетом событий* $\mathfrak{X}$, взаимно-однозначно «занумерованы» подмножествами $X \subseteq \mathfrak{X}$, которые одновременно служат возможными значениями *случайного триплета событий* $K$. При этом $\operatorname{ter}(X) = \{\omega : \ K(\omega) = X\}$.

— это и есть Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$.

Из принципа эквивалентности множества событий и Э-распределения следует, что множество событий $\mathfrak{X}$ — это сложная система

событий, которая определяет не только вероятности всех $N$ событий из $\mathfrak{X}$, но и полную структуру зависимостей этих событий между собой, включающую зависимости любых подмножеств событий: от дуплетов событий до всего множества $\mathfrak{X}$.

## 3.3 Триада: событие, вероятность и ценность

Эвентологическая триада понятий — основополагающий принцип в эвентологии, в соответствии с которым любое событие обладает двумя неотъемлемыми существенными свойствами: вероятностью и ценностью, образующими вместе с самим событием так называемую эвентологическую триаду:

*(событие, вероятность события, ценность события).*

В эвентологической триаде вероятность и ценность события связаны либо эвентологическим больцмановским соотношением, либо эвентологическим гиббсовским соотношением; таким образом, это — либо эвентологическая триада Больцмана, либо эвентологическая триада Гиббса; кроме того, принцип дуальности «со-бытия» предполагает рассматривать ценность дуального события как неразделимую пару взаимопроникающих понятий: *ценность восприятия события* и *ценность создания события*.

# Глава 4
# МНОЖЕСТВО СОБЫТИЙ

Обсуждается и определяется ключевое понятие эвентологии — множество событий, а также некоторые связанные с ним понятия: события-терраски, события-слои, случайное множество событий, эвентологическое распределение, сет-средние характеристики множества событий, эвентологическая статистика.

## 4.1 Введение

*Индивидуальный разум*[1] способен осознавать лишь некоторое конечное и не очень большое[2] множество событий из наступающих одновременно. Бессознательное индивидуального разума хранит гораздо более мощную *череду событий*. Эти события, к которым разум волей или неволей, осознанно или нет «прикасался» на протяжении всего своего существования, порождают его самого, как разум, и определяют его индивидуальность. *Череда событий*, хотя и конечна, но так велика, что разум, не способный осознать целиком такое чересчур мощное для него множество событий, вынужден отдавать их все, одно за другим во власть собственного бессознательного, «мгновенно осознавая»[3] лишь ничтожное по мощности подмножество этих собы-

[1] *Индивидуальный разум* — частный разум, разумный субъект.

[2] Известно, что так называемое «окно сознания» *среднего* индивидуального разума «вмещает» пять плюс минус два события.

[3] Картина может быть представлена еще детальнее. Событие, «мгновенно осознаваемое» разумом, «приготавливается» его бессознательным из наплывающего на него потока событий в виде особого рода «спектакля», поставленного и переработанного бессознательным из событий, наступающих не одновременно, а в

тий, которое и есть его «окно сознания». Итак, при стечении любых обстоятельств — при наступлении любой совокупности событий и сознание, и бессознательное индивидуального разума оперируют тем или иным, бóльшим или мéньшим, но всегда *конечным множеством событий*, избранных из этой совокупности.

## 4.2 Множество событий

Не выходя за рамки колмогоровской аксиоматики, считаем, что в нашем распоряжении всегда имеется *измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{F})$ и *множество избранных событий* $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, измеримых относительно алгебры $\mathcal{F}$ этого пространства. Пока нас не интересует, как индивидуальный разум выбирает $\mathfrak{X}$ из всей совокупности событий $\mathcal{F}$, нам интересно лишь *эвентологическое*[4] описание избранного разумом множества событий — *эвентологическое распределение (Э-распределение)* множества событий $\mathfrak{X}$.

## 4.3 События-терраски

Каждое избранное событие $x \in \mathfrak{X}$, разбивает пространство элементарных событий на два непересекающихся события: $\Omega = x + x^c$ — событие $x$ и его дополнение — событие $x^c = \Omega - x$. Всё множество событий $\mathfrak{X}$ разбивает пространство элементарных событий на непересекающиеся *события-терраски* следующего вида:

$$\operatorname{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где $X^c = \mathfrak{X} - X$ — дополнение подмножества событий $X$ до $\mathfrak{X}$. Так что $\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \operatorname{ter}(X)$, где

$$\operatorname{ter}(X) \cap \operatorname{ter}(Y) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad X \neq Y.$$

Таким образом определенные события-терраски можно рассматривать как *сет-значную сет-функцию* $\operatorname{ter} : 2^{\mathfrak{X}} \to \mathcal{F}$, которая на каж-

пределах того, что называется «мигом» — весьма краткого интервала времени (150–200 мск.)

[4]Здесь *«эвентологическое»* использовано как синоним *«вероятностного»*.

дом подмножестве $X \subseteq \mathfrak{X}$ принимает единственное значение в форме события-террасы $\mathrm{ter}(X) \subseteq \Omega$, измеримого относительно алгебры: $\mathrm{ter}(X) \in \mathcal{F}$. Вообще говоря, некоторые из событий-террасок могут оказаться пустыми, т.е. равными невозможному событию $\emptyset \in \mathcal{F}$. Невозможное событие — это единственное значение сет-функции ter, которому она может быть равна много раз на разных подмножествах $X \subseteq \mathfrak{X}$. Все свои непустые значения сет-функция ter принимает только один раз.

Кроме событий-террасок уже рассмотренной формы, нас будут интересовать еще пять форм событий-террасок, каждая из которых определяется собственной сет-значной сет-функцией. Запишем формулы для всех шести форм событий-террасок, $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c, \quad \mathrm{ter}_X = \bigcap_{x\in X} x, \quad \mathrm{ter}^X = \bigcap_{x\in X^c} x^c$$

— *события-терраски по пересечению*,

$$\mathrm{Ter}(X) = \bigcup_{x\in X} x \bigcup_{x\in X^c} x^c, \quad \mathrm{Ter}_X = \bigcup_{x\in X} x, \quad \mathrm{Ter}^X = \bigcup_{x\in X^c} x^c$$

— *события-терраски по объединению*,

Замечание (о сокращенных обозначениях событий-террасок). Для событий-террасок $\mathrm{ter}(X)$ и $\mathrm{Ter}(X)$ используются сокращенные обозначения, полная запись которых имеет вид:

$$\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c = \left(\bigcap_{x\in X} x\right) \cap \left(\bigcap_{x\in X^c} x^c\right),$$

$$\mathrm{Ter}(X) = \bigcup_{x\in X} x \bigcup_{x\in X^c} x^c = \left(\bigcup_{x\in X} x\right) \cup \left(\bigcup_{x\in X^c} x^c\right).$$

Определение (событие-терраска). *Событием-террасой*, порожденной множеством избранных событий $\mathfrak{X}$, называется событие-терраска каждой из шести форм. События-терраски трех форм: $\mathrm{ter}(X)$, $\mathrm{ter}_X$, $\mathrm{ter}^X$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ называются *событиями-террасками по пересечению*, а события-терраски трех форм: $\mathrm{Ter}(X)$, $\mathrm{Ter}_X$, $\mathrm{Ter}^X$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ — *событиями-террасками по объединению*.

## 4.4 События-слои и слои множества событий

Обозначим $2^{\mathfrak{X}}$ — *множество всех подмножеств* множества избранных событий $\mathfrak{X}$, $N = |\mathfrak{X}|$ — мощность $\mathfrak{X}$, а $\left|2^{\mathfrak{X}}\right| = 2^{|\mathfrak{X}|} = 2^N$ — мощность $2^{\mathfrak{X}}$, число подмножеств множества $\mathfrak{X}$. Между множеством всех подмножеств множества $\mathfrak{X}$ и множеством событий-террасок, порожденных множеством $\mathfrak{X}$, существует взаимно-однозначное соответствие

$$2^{\mathfrak{X}} \quad \Longleftrightarrow \quad \Big\{ \operatorname{ter}(X),\ X \in 2^{\mathfrak{X}} \Big\},$$

которое устанавливается взаимно-обратными отображениями

$$\operatorname{ter} : 2^{\mathfrak{X}} \Longrightarrow \Big\{ \operatorname{ter}(X),\ X \in 2^{\mathfrak{X}} \Big\},$$

$$\operatorname{ter}^{-1} : \Big\{ \operatorname{ter}(X),\ X \in 2^{\mathfrak{X}} \Big\} \Longrightarrow 2^{\mathfrak{X}},$$

которые определяются как

$$\operatorname{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

$$\operatorname{ter}^{-1}(t) = \{x \in \mathfrak{X} :\ t \subseteq x\}, \quad t \in \Big\{ \operatorname{ter}(X),\ X \in 2^{\mathfrak{X}} \Big\}.$$

Действительно, для $X \in 2^{\mathfrak{X}}$

$$\operatorname{ter}^{-1}(\operatorname{ter}(X)) = \{x \in \mathfrak{X} : \operatorname{ter}(X) \subseteq x\} = X,$$

а для $t \in \{\operatorname{ter}(X),\ X \in 2^{\mathfrak{X}}\}$ $\operatorname{ter}(\operatorname{ter}^{-1}(t)) = \operatorname{ter}(\operatorname{ter}^{-1}(\operatorname{ter}(X))) = \operatorname{ter}(X) = t$.

Определение (слои множества событий). *Слоями (n-слоями)* множества событий $\mathfrak{X}$ называются следующие множества подмножеств событий:

$$C^n_{\mathfrak{X}} = \{X \subseteq \mathfrak{X} : |X| = n\}, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Лемма (слойное разбиение множества всех подмножеств событий).

$$2^{\mathfrak{X}} = C^0_{\mathfrak{X}} + \ldots + C^N_{\mathfrak{X}} = \sum_{n=0}^{N} C^n_{\mathfrak{X}}.$$

*Мощность $n$-слоя* множества событий $\mathfrak{X}$ равна $|C^n_{\mathfrak{X}}| = C^n_N$ — числу подмножеств $\mathfrak{X}$ мощности $n$. Слойное разбиение $2^{\mathfrak{X}}$, переписанное для мощностей множеств

$$\left|2^{\mathfrak{X}}\right| = \left|C^0_{\mathfrak{X}}\right| + \ldots + \left|C^N_{\mathfrak{X}}\right|,$$

влечет известное комбинаторное тождество:

$$2^N = C^0_N + \ldots + C^N_N.$$

Определение (события-слои). *Событиями-слоями ($n$-событиями-слоями)*, порожденными множеством событий $\mathfrak{X}$, называются события

$$\mathbb{C}^n_{\mathfrak{X}} = \sum_{X \in C^n_{\mathfrak{X}}} \operatorname{ter}(X).$$

Лемма (индикаторное представление событий-слоев). *Порожденные множеством событий $\mathfrak{X}$ события-слои — это подмножества $\Omega$, определяемые индикаторами событий из $\mathfrak{X}$ следующим образом:*

$$\mathbb{C}^n_{\mathfrak{X}} = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{1}_x(\omega) = n \right\} \subseteq \Omega, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Лемма (слойное разбиение пространства элементарных событий). *Множество событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ порождает слойное разбиение пространства элементарных событий*

$$\Omega = \mathbb{C}^0_{\mathfrak{X}} + \ldots + \mathbb{C}^N_{\mathfrak{X}} = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{C}^n_{\mathfrak{X}}.$$

## 4.5 Два вероятностных пространства

Стоит задать измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$, сразу же на его алгебре «сама по себе возникает» классическая вероятность $\mathbf{P}^{:}$, поскольку классическая вероятность произвольного измеримого события $x \in \mathcal{F}$ определяется только его мощностью: $\mathbf{P}^{:}(x) = |x|/|\Omega|$. «Возникающую» при этом тройку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^{:})$ естественно именовать *классическим вероятностным пространством*. Пусть, кроме того, имеется

определенная на алгебре $\mathcal{F}$ того же измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ произвольная вероятностная мера $\mathbf{P}$, порождающая *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Итак, в нашем распоряжении всегда имеются два вероятностных пространства: классическое $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^{:})$ и произвольное $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

## 4.6 Множество случайных событий

Как только задано то или иное вероятностное пространство: классическое $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^{:})$ или произвольное $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, множество избранных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ становится тем или иным *множеством случайных событий (множеством событий)*, которое определяется классической $\mathbf{P}^{:}$ или произвольной $\mathbf{P}$ вероятностью.

Определение (множество событий, множество случайных событий). Множество случайных событий, определяемое классической вероятностью $\mathbf{P}^{:}$, называется *классическим* и обозначается $\mathfrak{X}^{:}$, а определяемое произвольной вероятностью $\mathbf{P}$ — *произвольным множеством случайных событий (произвольным множеством событий)* или просто *множеством случайных событий (множеством событий)* и обозначается $\mathfrak{X}$.

## 4.7 Случайное множество событий

Определение (измеримая функция). Функция $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{A})$, определенная на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{A})$ называется *измеримой относительно алгебр* $\mathcal{F}$ и $\mathcal{A}$, или $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$-*измеримой*, если для любого $A \subseteq \mathcal{A}$ $f^{-1}(A) \subseteq \mathcal{F}$, где $f^{-1}(A) = \{f^{-1}(a),\ a \in A\}$ — полный прообраз $A \subseteq \mathcal{A}$ в $\mathcal{F}$ при отображении, задаваемом функцией $f$.

Определение (случайный элемент). *Случайным элементом* на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ со значениями из измеримого пространства $(\mathcal{Y}, \mathcal{A})$ называется произвольная $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$-измеримая функция

$$\varphi : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{A}).$$

Под *вероятностным распределением случайного элемента* $\varphi$ понимается набор вероятностей $\mathbf{P}(\varphi^{-1}(A)), \quad A \subseteq \mathcal{A}$. Поскольку по определению прообраза функции $\varphi^{-1}(A) = \{\omega : \varphi(\omega) \in A\}$, то на языке

значений случайного элемента $\varphi$ эти вероятности интерпретируются как $\mathbf{P}(\{\omega : \varphi(\omega) \in A\}) = \mathbf{P}(\varphi^{-1}(A)), \quad A \subseteq \mathcal{A}$ — вероятности попадания значений случайного элемента $\varphi$ в некоторое произвольное множество его значений $A \subseteq \mathcal{A}$, измеримых относительно алгебры $\mathcal{A}$. Для этих вероятностей обычно используется сокращенная запись $\mathbf{P}(\varphi \in A) = \mathbf{P}(\{\omega : \varphi(\omega) \in A\}), \quad A \subseteq \mathcal{A}$.

Замечание (об измеримости случайного элемента). Почему случайный элемент $\varphi$ определяется как *измеримая* функция? Измеримость функции $\varphi$ позволяет исчислять вероятность событий, связанных с ее значениями, используя для этого вероятность, определенную на алгебре $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и формулу $\mathbf{P}(\varphi \in A) = \mathbf{P}(\varphi^{-1}(A))$, так как $\varphi^{-1}(A) \subseteq \mathcal{F}$ в силу измеримости $\varphi$ и вероятность $\mathbf{P}(\varphi^{-1}(A))$ определена.

Определение (случайное множество событий). *Случайное множество событий под множеством избранных событий* $\mathfrak{X}$ определяется на вероятностном пространстве как случайный элемент

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

со значениями из измеримого пространства $\left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$, где $2^{\mathfrak{X}}$ — множества всех подмножеств множества избранных событий $\mathfrak{X}$, а $2^{2^{\mathfrak{X}}}$ — алгебра всех его подмножеств. *Случайное множество событий под множеством избранных событий* $\mathfrak{X}$, определенное на классическом вероятностном пространстве, обозначается

$$K^{:} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^{:}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

и называется *классическим случайным множеством событий*. Вместе со случайным множеством событий $K$ под $\mathfrak{X}$ определено и его теоретико-множественное дополнение — случайное множество событий, обозначаемое $K^c = \mathfrak{X} - K$. Дополнение к определенному под $\mathfrak{X}$ классическому случайному множеству событий $K^{:}$ обозначается $K^{:c} = \mathfrak{X} - K^{:}$.

## 4.8 Запись событий на двух языках

*Множество случайных событий* $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и *случайное множество собы-*

*тий*

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right),$$

определенное под множеством избранных событий $\mathfrak{X}$, позволяют записывать одни и те же события, измеримые относительно алгебры $\mathcal{F}$, двумя способами: на языке событий — подмножеств $\Omega$, и на языке множеств событий — подмножеств $\mathfrak{X}$.

## 4.9 Эвентологическое распределение (Э-распределение)

Определение (Э-распределение). *Эвентологическим распределением (Э-распределением)* множества случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, или (что эквивалентно), *случайного множества событий* $K$, определенного под множеством избранных событий $\mathfrak{X}$, называется каждая из следующих сет-функций на $2^{\mathfrak{X}}$:

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

— *вероятности пересечений*,

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \mathbf{P}\left(\mathrm{ter}_X\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$$

— *вероятности прямых пересечений (надвероятности)*,

$$p^X = \mathbf{P}(K \subseteq X) = \mathbf{P}\left(\mathrm{ter}^X\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

— *вероятности дополнительных пересечений (подвероятности)*,

$$u(X) = 1 - \mathbf{P}(K = X^c) = \mathbf{P}(\mathrm{Ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x \bigcup_{x \in X^c} x^c\right)$$

— *вероятности объединений*,

$$u_X = 1 - \mathbf{P}(K \subseteq X^c) = \mathbf{P}\left(\mathrm{Ter}_X\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right)$$

— *вероятности прямых объединений (надвероятности)*,

$$u^X = 1 - \mathbf{P}(X^c \subseteq K) = \mathbf{P}\left(\mathrm{Ter}^X\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X^c} x^c\right)$$

— *вероятности дополнительных объединений (подвероятности)*, где $X \subseteq \mathfrak{X}$ — подмножество $\mathfrak{X}$, т.е. $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ — элемент $2^{\mathfrak{X}}$.

*Э-распределение* классического множества случайных событий $\mathfrak{X}^{\cdot}$, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^{\cdot})$, или (что эквивалентно) *классического случайного множества событий* $K^{\cdot}$, определенного под конечным множеством избранных событий $\mathfrak{X}$, называется *классическим Э-распределением*, а соответствующие ему сет-функции вероятностей, определенные на $2^{\mathfrak{X}}$, обозначаются: $p^{\cdot}(X)$, $p^{\cdot}{}_X$, $p^{\cdot X}$, $u^{\cdot}(X)$, $u^{\cdot}{}_X$, $u^{\cdot X}$. Сет-функции вероятностей, определенные на $2^{\mathfrak{X}}$, соответствующие Э-распределениям $K^c$ и $K^{\cdot c}$ обозначаются соответственно: $p^c(X)$, $p^c_X$, $p^{cX}$, $u^c(X)$, $u^c_X$, $u^{cX}$ и $p^{\cdot c}(X)$, $p^{\cdot c}_X$, $p^{\cdot cX}$, $u^{\cdot c}(X)$, $u^{\cdot c}_X$, $u^{\cdot cX}$.

## 4.10 Аддитивные свойства Э-распределений

Рассмотрим подробнее аддитивные[5] свойства эвентологических распределений. Наша цель — ответить на вопрос: «Какие из этих распределений являются суб-, а какие супераддитивными функциями на $2^{\mathfrak{X}}$ ?». Ответ дает следующая

Лемма 1 (аддитивные свойства эвентологических распределений). *Эвентологические распределения* вероятностей пересечения $p_X$, $p^X$, $(p^c)_X$ *и* $(p^c)^X$ *— это* супераддитивные функции, *а эвентологические распределения* вероятностей объединения $u_X, u^X, (u^c)_X$ *и* $(u^c)^X$ — субаддитивные функции *на* $2^{\mathfrak{X}}$. Прежде, чем доказывать лемму 1 докажем, что справедлива

Лемма 2 (о суб- и супераддитивности на дополнениях множеств). *Функция* $f(X)$ *субаддитивна (супераддитивна), если и только если функция* $g(X) = f(X^c)$ *субаддитивна (супераддитивна).*

Доказательство. Пусть $f$ — субаддитивна: $f(X^c \cup Y^c) + f(X^c \cap Y^c) \leqslant f(X^c) + f(Y^c)$. Тогда $f((X \cap Y)^c) + f((X \cup Y)^c) \leqslant g(X) + g(Y)$.

[5] В ряде источников *аддитивные* сет-функции называются *модулярными*.

Отсюда $g(X \cap Y) + g(X \cup Y) \leqslant g(X) + g(Y)$, т.е. функция $g$ также субаддитивна. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Сначала докажем супераддитивность функции подвероятности пересечений $p^X$. Для этого надо показать, что $p^{X\cup Y} + p^{X\cap Y} \geqslant p^X + p^Y$ для произвольных подмножеств событий $X, Y \subseteq \mathfrak{X}$. Выразим функцию подвероятностей пересечений через функцию вероятностей $p(X) = \mathbf{P}(K = X), \quad X \subseteq \mathfrak{X}$, по формуле обращения Мёбиуса: $p^X = \sum_{Y\subseteq X} p(Y)$. После этого остается показать, что

$$\sum_{Z\subseteq X\cup Y} p(Z) + \sum_{Z\subseteq X\cap Y} p(Z) \geqslant \sum_{Z\subseteq X} p(Z) + \sum_{Z\subseteq Y} p(Z). \qquad (1)$$

Заметим, что

$$\sum_{Z\subseteq X\cup Y} p(Z) = \sum_{Z\subseteq X} p(Z) + \sum_{Z\subseteq Y} p(Z) - \sum_{Z\subseteq X\cap Y} p(Z) + \sum_{\substack{Z\not\subseteq X, Z\not\subseteq Y \\ Z\subseteq X\cup Y}} p(Z), \quad (2)$$

где суммирование в последней сумме распространяется на все такие $Z \subseteq X \cup Y$, что $Z \not\subseteq X$ и $Z \not\subseteq Y$. Поскольку эта сумма неотрицательна, то требуемое неравенство (1) доказано и функция $p^X$ — супераддитивна. Совершенно аналогично показывается, что функция $(p^c)^X$ супераддитивна. В силу леммы 2 функция $(p^c)^{X^c}$ также супераддитивна. А поскольку $(p^c)^{X^c} = p_X$, то супераддитивна и функция $p_X$, а следовательно, и $(p^c)_X$. Теперь заметим, что $u_X = \mathbf{P}(K \not\subseteq X^c) = 1 - p^{X^c}, \quad u^X = \mathbf{P}(X^c \not\subseteq K) = 1 - p_{X^c}$. Отсюда ясно, что функции $u_X$ и $u^X$ субаддитивны, а в силу леммы 4 функции $u_{X^c}$ и $u^{X^c}$ также субаддитивны. Остается еще заметить, что $(u^c)_X = \mathbf{P}(K^c \not\subseteq X^c) = u^{X^c}, \quad (u^c)^X = \mathbf{P}(X^c \not\subseteq K^c) = u_{X^c}$, чтобы доказать лемму 1.

Лемма 3 (о супераддитивности сет-функций $|X|p^X$, $|X^c|p^{X^c}$, $|X|p_{X^c}$ и $|X^c|p_X$). *Сет-функции $|X|p^X$, $|X^c|p^{X^c}$, $|X|p_{X^c}$ и $|X^c|p_X$ супераддитивны.*

Доказательство. Сначала докажем супераддитивность сет-функции $|X|p^X$. Для этого надо доказать неравенство $|X \cup Y|p^{X\cup Y} + |X \cap Y|p^{X\cap Y} - |X|p^X - |Y|p^Y \geqslant 0$. Еще раз воспользовавшись представлением (2) для

$$p^{X\cup Y} = \sum_{Z\subseteq X\cup Y} p(Z) = \sum_{Z\subseteq X} p(Z) + \sum_{Z\subseteq Y} p(Z) - \sum_{Z\subseteq X\cap Y} p(Z) + \sum_{\substack{Z\not\subseteq X, Z\not\subseteq Y \\ Z\subseteq X\cup Y}} p(Z),$$

получаем, что левая часть неравенства равна

$$(|X \cup Y| - |X|) \sum_{Z \subseteq X} p(Z) + (|X \cup Y| - |Y|) \sum_{Z \subseteq Y} p(Z) -$$

$$-(|X \cup Y| - |X \cap Y|) \sum_{Z \subseteq X \cap Y} p(Z) + |X \cup Y| \sum_{\substack{Z \not\subseteq X, Z \not\subseteq Y \\ Z \subseteq X \cup Y}} p(Z).$$

Теперь заметим, что предпоследнее слагаемое равно

$$(|X \cup Y| - |X \cap Y|) \sum_{Z \subseteq X \cap Y} p(Z) =$$

$$= (|X \cup Y| - |X|) \sum_{Z \subseteq X \cap Y} p(Z) + (|X \cup Y| - |Y|) \sum_{Z \subseteq X \cap Y} p(Z).$$

А поскольку

$$(|X \cup Y| - |X|) \sum_{Z \subseteq X} p(Z) - (|X \cup Y| - |X|) \sum_{Z \subseteq X \cap Y} p(Z) =$$

$$= (|X \cup Y| - |X|) \sum_{Z \subseteq X \setminus X \cap Y} p(Z),$$

$$(|X \cup Y| - |Y|) \sum_{Z \subseteq Y} p(Z) - (|X \cup Y| - |Y|) \sum_{Z \subseteq X \cap Y} p(Z) =$$

$$= (|X \cup Y| - |Y|) \sum_{Z \subseteq Y \setminus X \cap Y} p(Z),$$

то левая часть принимает вид суммы трех неотрицательных слагаемых:

$$(|X \cup Y| - |X|) \sum_{Z \subseteq X \setminus X \cap Y} p(Z) + (|X \cup Y| - |Y|) \sum_{Z \subseteq Y \setminus X \cap Y} p(Z) +$$

$$+|X \cup Y| \sum_{\substack{Z \not\subseteq X \\ Z \not\subseteq Y}} p(Z) \geqslant 0.$$

Супераддитивность сет-функции $|X|p_X$ доказана.

Вместе с сет-функцией $|X|p^X$ супераддитивными являются сет-функции $|X^c|p^{X^c}$, $|X|p_{X^c}$ и $|X^c|p_X$. Сет-функция $|X^c|p^{X^c}$ супераддитива по лемме 2. А поскольку сет-функция $|X|(p^c)^X$ также супераддитивна (как аналогичное распределение подвероятностей $K^c$ — дополнения случайного множества $K$) и $(p^c)^X = p_{X^c}$, то супераддитивной будет и сет-функция $|X|p_{X^c}$, а по лемме 2 — и сет-функция $|X^c|p_X$. Лемма доказана.

Следствие (о субаддитивности сет-функций $|X|u_{X^c}$, $|X^c|u_X$, $|X|u^X$ и $|X^c|u^{X^c}$). *Сет-функции $|X|u_{X^c}$, $|X^c|u_X$, $|X|u^X$ и $|X^c|u^{X^c}$ субаддитивны.* Доказательство следует из соотношений $u_X = 1 - p^{X^c}$ и $u^X = 1 - p_{X^c}$ и того факта, что $|X|$ и $|X^c|$ — аддитивные сет-функции множества $X$.

## 4.11 Э-распределения и функции распределения

Пусть $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — множество избранных событий из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с Э-распределением $\boldsymbol{p}^* = \{p^X,\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$, где $p^X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$. Множеству событий $\mathfrak{X}$ соответствует множество индикаторов событий $\{\mathbf{1}_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$ с $|\mathfrak{X}|$-мерной функцией распределения $F(\boldsymbol{r}) = F(r_x,\ x \in \mathfrak{X})$, где $\boldsymbol{r} = \{r_x,\ x \in \mathfrak{X}\} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}|}$ — $|\mathfrak{X}|$-мерный вектор.

Лемма. *Многомерная функция распределения $F$ множества индикаторов событий $\{\mathbf{1}_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$ и Э-распределение $\boldsymbol{p}^*$ множества событий $\mathfrak{X}$ связаны соотношениями:*

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} p^{\{x:\ r_x \geqslant 1\}}, & r_x \geqslant 0,\ x \in \mathfrak{X}; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} & \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{X}|}, \\ p^X = F\Big(\boldsymbol{r}^X\Big) = F\Big(\mathbf{1}_X(x),\ x \in \mathfrak{X}\Big), & X \subseteq \mathfrak{X}. \end{cases}$$

## 4.12 Сет-средние случайного множества

Появлению эвентологии предшествовало и немало способствовало развитие в 70-х и 80-х годах прошлого века *теории случайных конечных абстрактных множеств (СКАМ)* [10, 11, 12, 13, 16], которая

подготовила математический аппарат для исследования *случайных множеств событий* — основного объекта эвентологии.

Одно из главных достижений теории СКАМ — удачное определение сет-средних характеристик случайных множеств: *сет-ожидания, сет-моды, сет-медианы и сет-квантилей*, аналогичных по своим *экстремальным метрическим свойствам*[6] средним числовым характеристикам случайных величин: математическому ожиданию, моде, медиане и квантилю. *Теория сет-средних* встретила признание математического сообщества [218, 191] и нашла немалое применение в приложениях, а ключевое понятие этой теории (*среднемерное множество*) включено в энциклопедию по теории вероятностей [100, стр. 644].

### 4.12.1 Определение сет-средних

Кратко перечислим основные определения теории СКАМ и сет-средних и рассмотрим их экстремальные свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{X}$ — конечное абстрактное множество, а $2^{\mathfrak{X}}$ — совокупность всех его подмножеств.

Определение (случайное конечное абстрактное множество (СКАМ)). *Случайным конченым абстрактным множеством (СКАМ)* со значениями из $2^{\mathfrak{X}}$ называется измеримое отображение

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right).$$

*Вероятностным распределением СКАМ* $K$ называется набор вероятностей $\left\{p(X) = \mathbf{P}(K = X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\right\}$. *Вероятность принадлежности (вероятность покрытия)* СКАМ $K$ элемента $x \in \mathfrak{X}$ обозначается $p_x = \mathbf{P}(x \in K) = \sum_{x \in X} p(X)$.

Определение (среднемерное множество). *Среднемерное множество* СКАМ $K$ — аналог среднего значения $K$ — определяется следующим образом [13], [100, стр. 644]. Пусть $\mu$ — мера на алгебре $2^{\mathfrak{X}}$, принимающая положительные значения на одноточечных множествах.

[6] Сет-средние обеспечивают минимум некоторого среднего расстояния до СКАМ в пространстве его сет-значений аналогично тому, как средние числовые характеристики минимизируют соответствующее среднее расстояние до случайной величины на числовой оси.

Множество $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ называется экстремальным по отношению к $K$, если для всех $Y \in 2^{\mathfrak{X}}$ с мерой, равной $\mu(X)$, выполнено неравенство

$$\mathbf{E}\mu(X \Delta K) \leq \mathbf{E}\mu(Y \Delta K),$$

где $\Delta$ — знак симметрической разности множеств. Пусть $h \in [0,1]$ и

$$V(h) = \left\{ X : \ \inf_{x \in X} p_x \geq h \geq \sup_{x \in X^c} p_x \right\}$$

— класс экстремальных множеств из $2^{\mathfrak{X}}$. *Классом сет-средних* $\mathcal{S}(K)$, состоящим из множеств $\mathcal{S}K \in \mathcal{S}(K)$, называется тот из классов экстремальных множеств $V(h)$, для которого меры входящих в него множеств наиболее близки к числу $\lambda = \mathbf{E}\mu(K)$. Иными словами, $\mathcal{S}(K) = V(h^*)$, где $h^* = (H + h)/2$, $v(t) = \mu(\{x : \ x \in \mathfrak{X}, p_x \geq t\})$, $H = \sup\{t : \ t \in [0,1], v(t) \geq \lambda\}$, $h = \inf\{t : \ t \in [0,1], v(t) \leq \lambda\}$.

Понятие *класса сет-средних* может быть корректно определено и для случайного измеримого подмножества произвольного сепарабельного пространства с конечной мерой [77]. Для СКАМ чаще используется не данное определение *класса сет-средних*, а следующее более простое

Определение (сет-среднее, сет-ожидание). *Сет-средним, сет-ожиданием* СКАМ $K$ называется множество

$$\mathcal{E}K = \Big\{ x : \ p_x \geq h \Big\},$$

для которого его мера $\mu(\mathcal{E}K)$ наиболее близка к числу $\lambda = \mathbf{E}\mu(K)$ — *средней мере СКАМ*[7] $K$.

Определение (сет-мода). *Сет-модой* СКАМ $K$ называется его наивероятное значение $\operatorname{Mod} K$:

$$\mathbf{P}(K = \operatorname{Mod} K) = \max_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathbf{P}(K = X).$$

Определение (сет-медиана). *Сет-медианой* СКАМ $K$ называется множество

$$\operatorname{Med} K = \Big\{ x : \ p_x \geq 1/2 \Big\}.$$

[7] *Средняя мера СКАМ* $K$ — математическое ожидание случайной величины $\mu(K)$ — вычисляется по теореме Роббинса [204]: $\mathbf{E}\mu(K) = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mu(X) p(X) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) p_x$.

Определение (сет-квантиль). *Сет-квантилем порядка* $\alpha \in [0,1]$ СКАМ $K$ называется множество

$$\mathbf{Q}_\alpha K = \Big\{ x : \; p_x \geq \alpha \Big\}.$$

*Строгий сет-квантиль*[8] порядка 0 и сет-квантиль порядка 1 имеют специальные названия: *сет-база* и *сет-ядро СКАМ* $K$.

Замечание. Каждое сет-среднее определяется как «множество среза», состоящее из элементов $x \in \mathbf{P}$, которые принадлежат СКАМ $K$ с вероятностью $\mathbf{P}(x \in K)$ не меньшей некоторого уровня из отрезка $[0,1]$. Для сет-ожидания — это $h$, для сет-медианы — это $1/2$, для сет-квантиля порядка $\alpha$ — это $\alpha$. Наиболее любопытный результат теории сет-средних заключается в том, что подобные «множества среза» обладают экстремальными метрическими свойствами. Иначе говоря, являются решением экстремальной метрической задачи, в которой ищется множество, находящееся на минимальном среднем расстоянии от СКАМ. Открытая и доказанная в теории сет-средних связь между «множествами среза» и экстремальными метрическими задачами теперь позволяет выбирать, что принимать в качестве определения сет-средних, а что доказывать как теорему о их свойствах. На наш взгляд, проще и изящнее определять сет-средние как «множества срезов», а их экстремальные метрические свойства доказывать как теорему.

### 4.12.2 Экстремальные метрические свойства сет-средних

Так же кратко, как и определения, рассмотрим экстремальные метрические свойства сет-средних.

Лемма (экстремальность сет-моды). *Сет-мода СКАМ* $K$ *доставляет минимум среднему дискретному расстоянию до* $K$:

$$\mathbf{E}d(K, \operatorname{Mod} K) = \min_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathbf{E}d(K, X),$$

*где* $d$ *— дискретная метрика в пространстве значений СКАМ* $K$*, определяющая расстояние между любыми* $X, Y \in 2^{\mathfrak{X}}$ *формулой:*

$$d(X,Y) = \begin{cases} 0, & X = Y, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

[8] *Строгий сет-квантиль СКАМ* определяется как «множество строгого среза» $\mathbf{Q}_{>\alpha} K = \{x : \; p_x > \alpha\}$.

Лемма (экстремальность среднемерного). *Среднемерное СКАМ $K$ — класс сет-средних $\mathcal{S}(K)$ — доставляет минимум среднему расстоянию до $K$ в следующем смысле:*

$$\mathbf{E}\rho(K, \mathcal{S}K) = \min_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathbf{E}\rho(K, X)$$

*для любого множества $\mathcal{S}K \in \mathcal{S}(K)$, где $\rho$ — метрика в пространстве значений СКАМ $K$, определяющая расстояние между любыми $X, Y \in 2^{\mathfrak{X}}$ формулой:*

$$\rho(X, Y) = \mu(X \Delta Y).$$

Лемма (экстремальность сет-квантиля). *Сет-квантиль порядка $\alpha$ СКАМ $K$ доставляет минимум среднему расстоянию до $K$:*

$$\mathbf{E}\rho_\alpha(K, \mathbf{Q}_\alpha K) = \min_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathbf{E}\rho_\alpha(K, X),$$

*где $\rho_\alpha$ — асимметричная $\alpha$-метрика*[9] *в пространстве значений СКАМ $K$, определяющая расстояние между любыми $X, Y \in 2^{\mathfrak{X}}$ формулой:*

$$\rho_\alpha(X, Y) = \alpha\mu(X \setminus Y) + (1 - \alpha)\mu(Y \setminus X).$$

Замечание. Из экстремального метрического свойства сет-квантиля порядка $\alpha$ следуют аналогичные свойства сет-медианы $\operatorname{Med} K = \mathbf{Q}_{1/2}K$ и сет-ожидания $\mathcal{E}K = \mathbf{Q}_h K$, в которых играют роли асимметричные $(1/2)$- и $h$-метрики.

## 4.13 Эвентологические сет-средние

### 4.13.1 Эвентологическая сет-медиана

*Эвентологическая сет-медиана* множества титульных событий $\mathfrak{X}$ определяется как подмножество событий[10] $\operatorname{Med}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, минимизирующее среднее расстояние

$$\mathbf{E}\rho(K, \operatorname{Med}\mathfrak{X}) = \min_{Y} \mathbf{E}\rho(K, Y)$$

[9] *Асимметричные метрики* в пространстве множеств определяются и детально рассматриваются ниже на стр. 67.

[10] За Э-сет-медианой «скрывается» безымянное событие-терраска $\operatorname{ter}(\operatorname{Med}\mathfrak{X})$, называемое в связи с этим *медианным событием-террaской*.

до случайного множества наступающих событий

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right).$$

Под случайным расстоянием между подмножеством титульных событий $Y$ и случайным множеством титульных событий $K$ понимается случайная величина

$$\rho(K, Y) = |K \Delta Y|,$$

которая принимает свои значения, равные модулю симметрической разности двух подмножеств событий $Y$ и $X$:

$$|X \Delta Y| = |X \setminus Y| + |Y \setminus X|,$$

в соответствии с вероятностями $p(X)$, определяемыми Э-распределением случайного множества $K$. Формула для среднего расстояния имеет вид:

$$\mathbf{E}\rho(K, Y) = \mathbf{E}|K \Delta Y| = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} |X \Delta Y| p(X).$$

По теореме Роббинса[11]

$$\mathbf{E}|K \Delta Y| = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(x \in K \Delta Y) =$$

$$= \sum_{x \in Y} \mathbf{P}(x \in K \Delta Y) + \sum_{x \in Y^c} \mathbf{P}(x \in K \Delta Y) =$$

$$= \sum_{x \in Y} (1 - \mathbf{P}(x \in K)) + \sum_{x \in Y^c} \mathbf{P}(x \in K).$$

[11] В интересующем нас варианте конечного множества титульных событий $\mathfrak{X}$ доказательство теоремы Роббинса, в соответствии с которой «средняя мощность $\mathbf{E}|K|$ случайного множества $K$ равна сумме вероятностей $\mathbf{P}(x \in K)$ принадлежности ему всех элементов $x \in \mathfrak{X}$: $\mathbf{E}|K| = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(x \in K)$», элементарно: $\mathbf{E}|K| = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} |X| p(X) = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{1}_X(x) p(X) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathbf{1}_X(x) p(X) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{x \in X} p(X) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(x \in K)$.

Не трудно показать[12], что подмножество событий, минимизирующее среднее расстояние (модуль симметрической разности) до случайного множества, состоит из событий, вероятность которых не меньше $1/2$:

$$\mathrm{Med}\mathfrak{X} = \mathrm{Med}K = \{x : \mathbf{P}(x) \geq 1/2\}.$$

Это равенство можно принять за определение подмножества событий $\mathrm{Med}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, которое называется *эвентологической сет-медианой*[13] множества событий $\mathfrak{X}$, а его экстремальное свойство:

$$\mathbf{E}\rho(K, \mathrm{Med}K) = \min_Y \mathbf{E}\rho(K, Y)$$

доказывать как теорему.

### 4.13.2 Эвентологическая сет-мода

*Эвентологическая сет-мода* множества титульных событий $\mathfrak{X}$ определяется как подмножество событий $\mathrm{Mod}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, на котором достигает минимума среднее расстояние до $K$:

$$\mathbf{E}\rho(K, Y) \to \min_Y,$$

где под расстоянием $\rho$ понимается дискретное расстояние между подмножествами событий

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} 0, & X = Y; \\ 1, & X \neq Y. \end{cases}$$

Легко показать, что

$$p(\mathrm{Mod}\mathfrak{X}) = \max_{Y \subseteq \mathfrak{X}} p(Y)$$

— эвентологической сет-моде $\mathrm{Mod}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$ соответствует *модальное событие-терраска*

$$\mathrm{ter}(\mathrm{Mod}\mathfrak{X}) \subseteq \Omega,$$

вероятность которого максимальна среди вероятностей всех безымянных событий-террасок $\mathrm{ter}(Y), Y \subseteq \mathfrak{X}$.

[12] Ниже (стр. 72) будет доказана более общая теорема для Э-сет-квантиля порядка $\alpha$, совпадающего при $\alpha = 1/2$ с Э-сет-медианой.

[13] Далее Э-сет-средние будут обозначаться двумя способами: $\mathrm{Med}\mathfrak{X} = \mathrm{Med}K$, равноправное использование которых объясняется дуальностью множества событий $\mathfrak{X}$ и случайного множества событий $K$.

### 4.13.3 Асимметричная $\alpha$-метрика в пространстве множеств событий

Изменим формулу расстояния

$$\rho(X,Y) = |X\Delta Y| = |X \setminus Y| + |Y \setminus X|,$$

симметричную относительно эвентологических сет-аргументов $X$ и $Y$, дополнив ее параметром $\alpha \in (0,1)$ так, что она приобретет асимметричный вид

$$\rho_\alpha(X,Y) = |X\Delta Y|_\alpha = \alpha|X \setminus Y| + (1-\alpha)|Y \setminus X|,$$

где существенную роль начинает играть порядок аргументов $X$ и $Y$, так как первому соответствует параметр $\alpha$, а второму — параметр $1-\alpha$. Полученная формула определяет *асимметричное расстояние*, или *$\alpha$-расстояние*[14] *от $X$ до $Y$*.

При $\alpha = 1-\alpha$, т.е. при $\alpha = 1/2$, аргументы $X$ и $Y$ становятся равноправными и $\alpha$-расстояние превращается в расстояние, так как становится пропорциональным расстоянию $\rho(X,Y)$:

$$\rho_{1/2}(X,Y) = |X\Delta Y|_{1/2} = \frac{1}{2}|X\Delta Y| = \frac{1}{2}\rho(X,Y).$$

*Эвентологическая интерпретация* объясняет введение параметра $\alpha$ несимметричностью распределения внимания разумного субъекта между «фигурой» из титульных событий $x \in \mathfrak{X}$ и «фоном» из их дополнений $x^c = \Omega - x$.

В предлагаемой формуле $\alpha$-расстояния подмножество $X$ — множество наступивших событий (возможное значение случайного множества $K$) — играет роль «фигуры», в то время как подмножество $X^c = \mathfrak{X} - X$ — множество ненаступивших событий (дополнение к возможному значению случайного множества $K$), иначе говоря, множество наступивших дополнений титульных событий — играет роль «фона». Данная асимметрия восприятия событий выражается в распределении внимания разумного субъекта между наступающими событиями из «фигуры» $X \setminus Y \subseteq X$ и ненаступающими событиями из «фона» $Y \setminus X \subseteq X^c$ в неравных долях $\alpha$ и $1-\alpha$ соответственно, где

[14] $\alpha$-расстояние, или $\alpha$-метрика — это *асимметричная метрика*, среди аксиом которой нет аксиомы симметричности, а место аксиомы треугольника занимает так называемая *аксиома асимметричного треугольника*.

- $\alpha$ — *доля внимания к «фигуре» из титульных событий.*
- $1-\alpha$ — *доля внимания к «фону» из дополнений к титульным событиям.*

Лишь при $\alpha = 1-\alpha$ (т.е. при $\alpha = 1/2$) распределение внимания разумного субъекта симметрично и соответствует формуле симметричного расстояния.

*Определение (асимметричное расстояние на пространстве множеств событий).* Функция

$$\rho_\alpha : 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}} \to \mathbf{R},$$

вычисляемая по формуле

$$\rho_\alpha(X,Y) = |X \Delta Y|_\alpha = \alpha|X \setminus Y| + (1-\alpha)|Y \setminus X|, \quad \alpha \in (0,1),$$

называется *$\alpha$-симметричным расстоянием*, или *$\alpha$-расстоянием* на пространстве множеств событий $2^{\mathfrak{X}}$ (а также — *$\alpha$-симметричной метрикой*, или *$\alpha$-метрикой* на $2^{\mathfrak{X}}$).

Имеются достаточные основания говорить о функции $\rho_\alpha$ как об «асимметричном расстоянии» и «асимметричной метрике», поскольку она обладает хотя и асимметричными, но вполне узнаваемыми метрическими свойствами:

1) аксиома нуля:

$$\rho_\alpha(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow X = Y;$$

2) аксиома $\alpha$-симметричного треугольника:

$$\rho_\alpha(X,Z) + \rho_{1-\alpha}(Y,Z) \geq \rho_\alpha(X,Y).$$

3) аксиома неотрицательности:

$$\rho_\alpha(X,Y) \geq 0,$$

4) $\alpha$-симметричность:

$$\rho_\alpha(X,Y) = \rho_{1-\alpha}(Y,X),$$

вытекающая из аксиомы $\alpha$-симметричного треугольника. Действительно, при $Z = X$ имеем: $\rho_{1-\alpha}(Y,X) \geq \rho_\alpha(X,Y)$. Отсюда сначала $\rho_\alpha(X,Y) \geq \rho_{1-\alpha}(Y,X)$ и, наконец, $\rho_\alpha(X,Y) = \rho_{1-\alpha}(Y,X)$.

*Замечание 1.* $\alpha$-расстояния «от события $x$ до множества событий $X$» и «от множества событий $X$ до события $x$» различны:

$$\rho_\alpha(x,X) = \alpha|\{x\} \setminus X| + (1-\alpha)|X \setminus \{x\}| =$$

$$= \begin{cases} (1-\alpha)(|X|-1), & x \in X; \\ (1-\alpha)(|X|-1)+1, & x \notin X. \end{cases}$$

$$\rho_\alpha(X,x) = \alpha|X \setminus \{x\}| + (1-\alpha)|\{x\} \setminus X| =$$

$$= \begin{cases} \alpha(|X|-1), & x \in X; \\ \alpha(|X|-1)+1, & x \notin X. \end{cases}$$

При этом наиболее любопытно, что

1) $\alpha$-расстояния «от события до пустого множества событий» и «от пустого множества событий до события» имеют вид:

$$\rho_\alpha(x,\emptyset) = \alpha; \quad \rho_\alpha(\emptyset,x) = 1-\alpha.$$

2) $\alpha$-расстояние от моноплета событий $\{x\}$ до моноплета событий $\{y\}$ для любого $\alpha \in (0,1)$ — это симметричная метрика, совпадающая с дискретной метрикой:

$$\rho_\alpha(x,y) = d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

*Замечание 2.* Аксиома $\alpha$-симметричного треугольника может быть записана в четырёх видах:

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho_\alpha(X,Z) + \rho_{1-\alpha}(Y,Z) & \geq & \rho_\alpha(X,Y), \\ \rho_{1-\alpha}(X,Z) + \rho_\alpha(Y,Z) & \geq & \rho_{1-\alpha}(X,Y), \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho_\alpha(Z,X) + \rho_{1-\alpha}(Z,Y) & \geq & \rho_{1-\alpha}(X,Y), \\ \rho_{1-\alpha}(Z,X) + \rho_\alpha(Z,Y) & \geq & \rho_\alpha(X,Y), \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho_\alpha(X,Z) + \rho_\alpha(Z,Y) & \geq & \rho_\alpha(X,Y), \\ \rho_{1-\alpha}(X,Z) + \rho_{1-\alpha}(Z,Y) & \geq & \rho_{1-\alpha}(X,Y), \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho_{1-\alpha}(Z,X) + \rho_{1-\alpha}(Y,Z) & \geq & \rho_\alpha(X,Y), \\ \rho_\alpha(Z,X) + \rho_\alpha(Y,Z) & \geq & \rho_{1-\alpha}(X,Y). \end{array}\right\} \tag{4}$$

*Замечание 3.* Существует ли пример ассиметричной $\alpha$-метрики, т.е. асимметричной метрики, удовлетворяющей трем аксиомам: «нуля», «$\alpha$-симметричного треугольника» и «неотрицательности», отличной от $\alpha$-метрики в пространстве множеств? Такая асимметричная метрика может иметь смысл там, где обычную метрику можно представить в виде суммы двух несимметричных слагаемых.

1) Например, можно пытаться сконструировать $\alpha$-симметричную метрику из $L_\infty$: максимум модуля разности двух вещественных функций можно представить как максимум из двух максимумов модулей разности, один из которых — максимум модулей положительных, а второй — отрицательных разностей:

$$\rho(f,g) = \max_x |f(x) - g(x)| =$$

$$= \max\left\{\max_x |f(x) - g(x)|_+,\ \max_x |f(x) - g(x)|_-\right\}.$$

Тогда формально можно предположить, что кандидат на роль $\alpha$-симметричной метрикой будет иметь вид:

$$\rho_\alpha(f,g) =$$

$$= \max\left\{\alpha \max_x |f(x) - g(x)|_+,\ (1-\alpha)\max_x |f(x) - g(x)|_-\right\}.$$

2) Еще пример: конструирование $\alpha$-симметричной метрики из $L_1$. Интеграл от модуля разности двух вещественных функций можно представить как сумму двух интегралов от модулей разности, один из которых — интеграл от положительных модулей разностей, а второй — от отрицательных:

$$\rho(f,g) = \int_x |f(x) - g(x)|dx =$$

$$= \int_x |f(x) - g(x)|_+ dx + \int_x |f(x) - g(x)|_- dx.$$

Тогда формально можно предположить, что кандидат на роль $\alpha$-симметричной метрикой будет иметь вид:

$$\rho_\alpha(f,g) =$$

$$= \alpha \int_x |f(x) - g(x)|_+ dx + (1-\alpha) \int_x |f(x) - g(x)|_- dx.$$

3) Можно ли сконструировать $\alpha$-симметричный аналог дискретной метрики? Например, если на множестве определен линейный порядок, то дискретную метрику можно (довольно искусственно, конечно) представить в виде

$$d(x,y) = \frac{1}{a+b}\Big(d(x,y)_+ + d(x,y)_-\Big),$$

где $0 < a < b$, а

$$d(x,y)_+ = \begin{cases} a, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ b, & x > y. \end{cases}$$

$$d(x,y)_- = \begin{cases} b, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ a, & x > y, \end{cases}$$

Тогда $\alpha$-симметричная метрика могла бы иметь вид

$$d(x,y) = \frac{1}{a+b}\Big(\alpha d(x,y)_+ + (1-\alpha) d(x,y)_-\Big).$$

*Замечание 4.* Параметр $\alpha \in (0,1)$ в определении $\alpha$-симметричной метрики:

$$\rho_\alpha(X,Y) = \alpha|X \setminus Y| + (1-\alpha)|Y \setminus X|,$$

имеет естественную вероятностную интерпретацию:

- $\alpha$ — вероятность внимания разумного субъекта к «фигурам» из событий $x \in \mathfrak{X}$,
- $1-\alpha$ — вероятность внимания разумного субъекта к «фону» из дополнений к событиям $x \in \mathfrak{X}$.

*Замечание 5.* Вывод из приведенных примеров: асимметричная $\alpha$-метрика оказывается востребованной на множестве элементов, обладающих собственными структурами, которые и порождают асимметрию в отношениях элементов. Классическими примерами таких элементов служат множества, в частности множества событий. Асим-

метричные $\alpha$-метрики естественны для пространств множеств событий, где асимметрия порождается психологическими особенностями «со-бытия» разумных субъектов[15].

### 4.13.4 Эвентологический сет-квантиль

Полезность введения асимметричного $\alpha$-расстояния оправдывается замечательной теоремой, утверждающей, что среднее *$\alpha$-расстояние от случайного множества $K$ до $Y$* достигает минимума на

$$Y_\alpha = \mathrm{Q}_\alpha K = \{x : \mathbf{P}(x) \geq \alpha\},$$

— эвентологическом сет-квантиле порядка $\alpha$.

*Теорема. Минимум среднего $\alpha$-расстояния*

$$\mathbf{E}\rho_\alpha(K, Y) \to \min_Y$$

*от случайного множества событий $K$ до множества событий $Y$ достигается на множестве событий*

$$Y_\alpha = \mathrm{Q}_\alpha K = \{x : \mathbf{P}(x) \geq \alpha\}$$

— *Э-сет-квантиле порядка $\alpha$.*

Доказательство. Известно, что

$$\mathbf{E}\rho_\alpha(K, Y) = \alpha \sum_{x \in Y} (1 - \mathbf{P}(x)) + (1 - \alpha) \sum_{x \in Y^c} \mathbf{P}(x).$$

Обозначим

$$\rho^0_\alpha = \mathbf{E}\rho_\alpha(K, Y_\alpha) = \alpha \sum_{x \in Y_\alpha} (1 - \mathbf{P}(x)) + (1 - \alpha) \sum_{x \in Y^c_\alpha} \mathbf{P}(x)$$

— среднее $\alpha$-расстояние от $K$ до своего Э-сет-квантиля порядка $\alpha$. Имеем

$$\mathbf{E}\rho_\alpha(K, Y) - \rho^0_\alpha = \alpha \sum_{x \in Y \setminus Y_\alpha} (1 - \mathbf{P}(x)) + (1 - \alpha) \sum_{x \in Y^c \setminus Y^c_\alpha} \mathbf{P}(x) -$$

[15] Формально весьма похожие *асимметричные меры сходства* для анализа восприятия были предложены А. Тверским [226, 227] на основании наблюдений за психологическими особенностями поведения разумных субъектов.

$$-\alpha \sum_{x \in Y_\alpha \setminus Y} (1 - \mathbf{P}(x)) - (1-\alpha) \sum_{x \in Y_\alpha^c \setminus Y^c} \mathbf{P}(x).$$

Заметим, что

$$Y \setminus Y_\alpha = Y_\alpha^c \setminus Y^c = Y \cap Y_\alpha^c,$$
$$Y_\alpha \setminus Y = Y^c \setminus Y_\alpha^c = Y_\alpha \cap Y^c.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\rho_\alpha(K,Y) - \rho_\alpha^0 =$$
$$= \sum_{x \in Y \cap Y_\alpha^c} \Big[\alpha(1 - \mathbf{P}(x)) - (1-\alpha)\mathbf{P}(x)\Big] +$$
$$+ \sum_{x \in Y_\alpha \cap Y^c} \Big[(1-\alpha)\mathbf{P}(x) - \alpha(1 - \mathbf{P}(x))\Big] =$$
$$= \sum_{x \in Y \cap Y_\alpha^c} \Big[\alpha - \mathbf{P}(x)\Big] + \sum_{x \in Y_\alpha \cap Y^c} \Big[\mathbf{P}(x) - \alpha\Big] \geq 0,$$

так как

$$\begin{cases} \mathbf{P}(x) < \alpha, & x \in Y_\alpha^c, \\ \mathbf{P}(x) \geq \alpha, & x \in Y_\alpha. \end{cases}$$

по определению Э-сет-квантиля порядка $\alpha$. Теорема доказана.

*Замечание.* Если среди титульных событий $x \in \mathfrak{X}$ есть события, вероятность которых равна $1/2$, то минимум среднего асимметричного $\alpha$-расстояния от $K$ до $Y$ достигается не только на Э-сет-квантиле порядка $\alpha$, но также на всех множествах $Y'_\alpha$ из *сет-отрезка по включению* между *строгим Э-сет-квантилем* и Э-сет-квантилем порядка $\alpha$:

$$Q_\alpha^0 K \subseteq Y'_\alpha \subseteq Q_\alpha K,$$

где

$$Q_\alpha^0 K = \{x : \mathbf{P}(x) > 1/2\}$$

— *строгий Э-сет-квантиль порядка* $\alpha$.

*Замечание.* Ясно, что Э-сет-медиана случайного множества событий $K$ (или, что то же, Э-сет-медиана множества событий $\mathfrak{X}$), представляет собой его же Э-сет-квантиль порядка $1/2$:

$$\mathrm{Med} K = Q_{1/2} K.$$

## 4.14 Эвентологическая статистика

На *любую* статистику, в том числе и на так называемую историческую[16], эвентологически можно взглянуть *через «призму» множества событий* $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}$, избранных из алгебры $\mathcal{F}$. Иначе говоря, если, например, $T$ — конечное множество наблюдений данной статистики, то для каждого наблюдения $t \in T$ определено подмножество $F_t \subseteq \mathfrak{F}$ избранных событий, которые в данной статистике наступили при этом наблюдении, и подмножество $F_t^c = \mathfrak{F} - F_t$ избранных событий, которые не наступили при наблюдении $t \in T$. В итоге любая статистика, эвентологически рассматриваемая через «призму» множества событий $\mathfrak{F}$, — это последовательность событий-террасок $\left\{\mathrm{ter}(F_t) = \bigcap_{f \in F_t} f \bigcap_{f \in F_t^c} f^c, \quad t \in T\right\}$, порожденных множеством $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}$. Между событиями-террасками $\mathrm{ter}(F)$ и подмножествами $F \subseteq \mathfrak{F}$ существует взаимно-однозначное соответствие, которое взаимно-однозначно сопоставляет последовательности событий-террасок $\mathrm{ter}(F_t) \subseteq \Omega$ последовательность подмножеств $F_t \subseteq \mathfrak{F}$ избранных событий $\{F_t,\ t \in T\}$, наступающих в момент $t \in T$. Конечное множество наблюдений за *любым объектом материального или идеального мира* через призму множества событий $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}$ порождает эвентологическую статистику в виде последовательности событий-террасок $\{\mathrm{ter}(F_t),\ t \in T\}$, где $F_t \subseteq \mathfrak{F}$.

В свете сказанного разум, определенный нами ранее как *череда событий*, более строго определяется как *череда событий-террасок*, порожденных его *собственным множеством событий*, т.е. тех событий, через которые разум «прошел» (которые сознательно или бессознательно воспринял/создал) за всю историю своего существования. Иначе говоря, любой разумный субъект определяется своей *собственной «исторической» эвентологической статистикой.*

## 4.15 Заключение

*Множество событий* — ключевое понятие эвентологии — служит эвентологической моделью разумного субъекта и обречено быть экс-

[16]Под *исторической статистикой* обычно понимается последовательность результатов наблюдений за некоторый предшествующий период времени. Когда мы говорим *любая* статистика, мы имеем в виду статистику, в которой накоплены любого рода наблюдения из какой угодно области.

поненциально сложной системой. Эвентологическое распределение произвольного $N$-множества событий содержит $2^N$ вероятностей событий-террасок, порождённых этим множеством, и *полностью* характеризует структуру зависимостей $N$-множества событий. Экспоненциальная сложность множества событий объясняется экспоненциальной сложностью его эвентологического распределения, которое управляет не только вероятностями самих событий, но и структурой зависимостей событий между собой.

В главе определены *множество событий* и *случайное множество событий*, *событие-терраска*, *эвентологическое распределение* множества событий, *асимметричная метрика* в пространстве множества событий, *эвентологические сет-средние* и некоторые другие понятия, возникающие рядом с множеством событий.

Одной из целей книги является развитие понятия множества событий, а также других идущих вслед за ним событийных понятий и идей. Любая теоретическая или практическая задача из произвольной области всегда может быть сформулирована как задача об эвентологическом распределении некоторого множества событий. И как только задача записывается на языке множеств событий, ее решение становится доступным для эвентологических методов. В последующих главах ключевое понятие множества событий и связанные с ним идеи работают и при построении самой эвентологической теории, и в ее разнообразных приложениях.

# Глава 5
# ОБРАЩЕНИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассматривается один из основных инструментов математической эвентологии — *формулы обращения Э-распределений*, событий и событий-террасок. В основе обращения Э-распределений лежат классические формулы обращения Мёбиуса функций, определенных на решетках. Обращение Мёбиуса дополнено техникой сет-суммирования [16] — исчисления сумм сет-функций, определенных на решетке подмножеств конечного множества, по множественному индексу. Рассматриваются также формулы обращения не сет-функций, а их сет-аргументов — множеств событий и событий-террасок. Подобные *формулы сет-обращения* в предлагаемом варианте не имеют классических аналогов.

## 5.1 Введение

Формулы обращения Э-распределений следуют из классических формул обращения Мёбиуса[1] функций, определенных на решетках. Немалая особенность обращения Э-распределений заключается в суммировании по «непривычному» множественному индексу — сет-индексу

[1] *Мёбиус, Август Фердинанд (*нем. *Möbius, August Ferdinand, 1790–1868)* — немецкий математик и астроном-теоретик. Наиболее известен как изобретатель ленты Мёбиуса. Основные труды по геометрии. В теории чисел именем Мёбиуса названы ряд, функция и формула обращения.

— и в суммировании кратных сет-сумм, что еще более усугубляет «непривычность» сет-индекса. Однако приемы сет-суммирования — исчисления сумм сет-функций, определенных на решетке подмножеств конечного множества, по сет-индексу — разнообразны [16] и позволяют суммировать аддитивные и мультипликативные сет-функции, комбинации этих функций, а также справляться с кратными сет-суммами.

Приведем два простых примера исчисления сет-сумм мультипликативной сет-функции, аддитивной сет-функции и произведения аддитивной и мультипликативной сет-функций, которые наиболее часто используются при обращении Э-распределений. Пусть $\mathfrak{X}$ — конечное множество, $\mu(X)$ — аддитивная, а $\nu(X)$ — мультипликативная сет-функция на $2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $\mu(X) = \sum_{x\in X} \nu(x)$, а $\nu(X) = \prod_{x\in X} \nu(x)$ для любого $X \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда для любого $X \subseteq \mathfrak{X}$ справедливы следующие формулы сет-суммирования:

$$\sum_{Y\subseteq X} \mu(Y) = 2^{|X|-1}\mu(X), \quad \sum_{Y\subseteq X} \nu(Y) = \prod_{x\in X} (1+\nu(x)),$$

$$\sum_{Y\subseteq X} \mu(Y)\nu(Y) = \prod_{x\in X} (1+\nu(x)) \sum_{x\in X} \frac{\mu(x)\nu(x)}{1+\nu(x)}.$$

К основным приёмам суммирования кратных сет-сумм относится перемена порядка сет-суммирования, которая обычно приводит к успеху и которая будет продемонстрирована ниже при доказательстве формул обращения Э-распределений.

## 5.2 Формулы обращения Э-распределений

Сет-функции Э-распределений связаны соотношениями, имеющими очевидный вероятностный смысл:

$$p_X = \sum_{X\subseteq Y} p(Y), \quad p^X = \sum_{Y\subseteq X} p(Y), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Применение к этим очевидным соотношениям формул обращения Мёбиуса дает обратные формулы:

$$p(X) = \sum_{X\subseteq Y} (-1)^{|Y\setminus X|} p_Y, \quad p(X) = \sum_{Y\subseteq X} (-1)^{|X\setminus Y|} p^Y, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

которые выражают вероятности через надвероятности и подвероятности Справедлива также пара обратных формул:

$$p_X = \sum_{X^C \subseteq Y} (-1)^{|Y^C|} p^Y, \quad p^X = \sum_{Y \subseteq X^C} (-1)^{|Y|} p_Y, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

которая следует из предыдущих и связывает надвероятности и подвероятности.

12 пар форм Э-распределений $p(X), p_X, p^X, u(X), u_X$ и $u^X$, определяющие *множество случайных событий* $\mathfrak{X}$ и *случайное множество событий* $K$, попарно связаны взаимно-обратными формулами обращения Мёбиуса, где $X \in 2^{\mathfrak{X}}$:

$$\begin{cases} [1] \;\; p_X = \sum\limits_{X \subseteq Y} p(Y), \\ (1) \;\; p(X) = \sum\limits_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y. \end{cases} \qquad \begin{cases} [2] \;\; p^X = \sum\limits_{Y \subseteq X} p(Y), \\ (2) \;\; p(X) = \sum\limits_{Y \subseteq X} (-1)^{|X|-|Y|} p^Y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \;\; p_X = \sum\limits_{Y \subseteq X} (-1)^{|Y|} p^{Y^c}, \\ (3) \;\; p^X = \sum\limits_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y^c|} p_{Y^c}. \end{cases} \qquad \begin{cases} [4] \;\; 1 - u_X = \sum\limits_{X \subseteq Y} (1 - u(Y)), \\ (4) \;\; 1 - u(X) = \sum\limits_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} (1 - u_Y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} [5] \;\; 1 - u^X = \sum\limits_{Y \subseteq X} (1 - u(Y)), \\ (5) \;\; 1 - u(X) = \sum\limits_{Y \subseteq X} (-1)^{|X|-|Y|} (1 - u^Y). \end{cases} \qquad \begin{cases} (6) \;\; 1 - u^X = \sum\limits_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y^c|} (1 - u_{Y^c}), \\ (6) \;\; 1 - u_X = \sum\limits_{Y \subseteq X} (-1)^{|Y|} (1 - u^{Y^c}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} [7] \;\; 1 - u_X = \sum\limits_{X \subseteq Y} p(Y^c), \\ (7) \;\; p(X) = \sum\limits_{Y \subseteq X} (-1)^{|X|-|Y|} (1 - u_{Y^c}). \end{cases} \qquad \begin{cases} [8] \;\; 1 - u^X = \sum\limits_{Y \subseteq X} p(Y^c), \\ (8) \;\; p(X) = \sum\limits_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} (1 - u^{Y^c}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} [9]\ \ p_X = \sum\limits_{X\subseteq Y}(1-u(Y^c)), \\ (9)\ \ 1-u(X) = \sum\limits_{X\subseteq Y}(-1)^{|Y|-|X|}p_Y. \end{cases} \qquad \begin{cases} [10]\ \ p^X = \sum\limits_{Y\subseteq X}(1-u(Y^c)), \\ (10)\ \ 1-u(X) = \sum\limits_{Y\subseteq X}(-1)^{|X|-|Y|}p^Y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (11)\ \ 1-u_X = \sum\limits_{Y\subseteq X}(-1)^{|Y|}p_Y, \\ (11)\ \ p_X = \sum\limits_{Y\subseteq X}(-1)^{|Y|}(1-u_Y). \end{cases} \qquad \begin{cases} (12)\ \ 1-u^X = \sum\limits_{X\subseteq Y}(-1)^{|Y^c|}p^Y, \\ (12)\ \ p^X = \sum\limits_{X\subseteq Y}(-1)^{|Y^c|}(1-u^Y). \end{cases}$$

### 5.2.1 Таблицы формул обращения Э-распределений

В таблицах 5.1, 5.2, 5.3 и 5.4 собраны формулы обращения и ссылки а формулы обращения, которые связывают различные формы Э-распределений, а также различные формы событий-террасок.

| | $p(X)$<br>$\mathrm{ter}(X)$ | $p_X$<br>$\mathrm{ter}_X$ | $p^X$<br>$\mathrm{ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $p(X)$<br>$\mathrm{ter}(X)$ | $p(X)=p(X)$<br>$\mathrm{ter}(X)=\mathrm{ter}(X)$ | (1)<br>– | (2)<br>– |
| $p_X$<br>$\mathrm{ter}_X$ | [1]<br>[1] | $p_X=p_X$<br>$\mathrm{ter}_X=\mathrm{ter}_X$ | (3)<br>– |
| $p^X$<br>$\mathrm{ter}^X$ | [2]<br>[2] | (3)<br>– | $p^X=p^X$<br>$\mathrm{ter}^X=\mathrm{ter}^X$ |

Таблица 5.1. ($p\sim p, \mathrm{ter}\sim\mathrm{ter}$)

Оставшиеся три пары форм Э-распределений связаны обычными очевидными соотношениями дополнительности

$$p(X)=1-u(X^c),\quad u(X)=1-p(X^c), \qquad (\alpha);\ (\alpha)$$

| | $u(X)$<br>$\mathrm{Ter}(X)$ | $u_X$<br>$\mathrm{Ter}_X$ | $u^X$<br>$\mathrm{Ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $u(X)$<br>$\mathrm{Ter}(X)$ | $u(X) = u(X)$<br>$\mathrm{Ter}(X) = \mathrm{Ter}(X)$ | (4)<br>– | (5)<br>– |
| $u_X$<br>$\mathrm{Ter}_X$ | [4]<br>[4] | $u_X = u_X$<br>$\mathrm{Ter}_X = \mathrm{Ter}_X$ | (6)<br>– |
| $u^X$<br>$\mathrm{Ter}^X$ | [5]<br>[5] | (6)<br>– | $u^X = u^X$<br>$\mathrm{Ter}^X = \mathrm{Ter}^X$ |

Таблица 5.2. ($u \sim u, \mathrm{Ter} \sim \mathrm{Ter}$)

| | $p(X)$<br>$\mathrm{ter}(X)$ | $p_X$<br>$\mathrm{ter}_X$ | $p^X$<br>$\mathrm{ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $u(X)$<br>$\mathrm{Ter}(X)$ | $u(X) = 1 - p(X^c)$<br>$\mathrm{Ter}(X) = (\mathrm{ter}(X^c))^c$ | (9)<br>– | (10)<br>– |
| $u_X$<br>$\mathrm{Ter}_X$ | [7]<br>[7] | (11)<br>– | $u_X = 1 - p^{X^c}$<br>$\mathrm{Ter}_X = (\mathrm{ter}^{X^c})^c$ |
| $u^X$<br>$\mathrm{Ter}^X$ | [8]<br>[8] | $u^X = 1 - p_{X^c}$<br>$\mathrm{Ter}^X = (\mathrm{ter}_{X^c})^c$ | (12)<br>– |

Таблица 5.3. ($u \sim p, \mathrm{Ter} \sim \mathrm{ter}$)

$$p_X = 1 - u^{X^c}, \quad u^X = 1 - p_{X^c}, \qquad (\beta);\ (\beta)$$

$$p^X = 1 - u_{X^c}, \quad u_X = 1 - p^{X^c}, \qquad (\gamma);\ (\gamma)$$

которые следуют из соответствующих теоретико-множественных соотношений дополнительности для событий-террасок (см. раздел 5.3.2 на стр. 84):

$$\mathrm{ter}(X) = (\mathrm{Ter}(X^c))^c; \quad \mathrm{Ter}(X) = (\mathrm{ter}(X^c))^c, \qquad (\alpha);\ (\alpha)$$

$$\mathrm{ter}_X = (\mathrm{Ter}^{X^c})^c; \quad \mathrm{Ter}^X = (\mathrm{ter}_{X^c})^c, \qquad (\beta);\ (\beta)$$

| | $u(X)$<br>$\mathrm{Ter}(X)$ | $u_X$<br>$\mathrm{Ter}_X$ | $u^X$<br>$\mathrm{Ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $p(X)$<br>$\mathrm{ter}(X)$ | $p(X) = 1 - u(X^c)$<br>$\mathrm{ter}(X) = (\mathrm{Ter}(X^c))^c$ | (7)<br>– | (8)<br>– |
| $p_X$<br>$\mathrm{ter}_X$ | [9]<br>[9] | (11)<br>– | $p_X = 1 - u^{X^c}$<br>$\mathrm{ter}_X = (\mathrm{Ter}^{X^c})^c$ |
| $p^X$<br>$\mathrm{ter}^X$ | [10]<br>[10] | $p^X = 1 - u_{X^c}$<br>$\mathrm{ter}^X = (\mathrm{Ter}_{X^c})^c$ | (12)<br>– |

Таблица 5.4. ($p \sim u, \mathrm{ter} \sim \mathrm{Ter}$)

$$\mathrm{ter}^X = (\mathrm{Ter}_{X^c})^c; \quad \mathrm{Ter}_X = (\mathrm{ter}^{X^c})^c. \qquad (\gamma);\ (\gamma)$$

$$\mathrm{ter}_X = \sum_{X \subseteq Y} \mathrm{ter}(Y); \quad \mathrm{ter}^X = \sum_{Y \subseteq X} \mathrm{ter}(Y), \qquad [1];\ [2]$$

$$(\mathrm{Ter}_X)^c = \sum_{X \subseteq Y} (\mathrm{Ter}(Y))^c; \quad (\mathrm{Ter}^X)^c = \sum_{Y \subseteq X} (\mathrm{Ter}(Y))^c, \qquad [4];\ [5]$$

$$(\mathrm{Ter}_X)^c = \sum_{X \subseteq Y} \mathrm{ter}(Y^c); \quad (\mathrm{Ter}^X)^c = \sum_{Y \subseteq X} \mathrm{ter}(Y^c), \qquad [7];\ [8]$$

$$\mathrm{ter}_X = \sum_{X \subseteq Y} (\mathrm{Ter}(Y^c))^c; \quad \mathrm{ter}^X = \sum_{Y \subseteq X} (\mathrm{Ter}(Y^c))^c. \qquad [9];\ [10]$$

## 5.3 Эвентологические формулы террасного обращения

Формулы обращения Мёбиуса Э-распределений основаны на аналогичных им теоретико-множественных соотношениях, которые связывают соответствующие формы событий-террасок. Например, формуле, связывающей вероятности пересечения $p(X)$ и надвероятности (т.е. вероятности прямого пересечения) $p_X$:

$$p_X = \mathbf{P}(\mathrm{ter}_X) = \sum_{X \subseteq Y} \mathbf{P}(\mathrm{ter}(Y)) = \sum_{X \subseteq Y} p(Y)$$

соответствует очевидная теоретико-множественная формула, выражающая события-террасы прямого пересечения $\mathrm{ter}_X$ через события-террасы пересечения $\mathrm{ter}(X)$:

$$\mathrm{ter}_X = \sum_{X \subseteq Y} \mathrm{ter}(Y).$$

### 5.3.1 Таблицы формул обращения событий-террасок

В таблицах 5.5, 5.6, 5.7 и 5.8 собраны формулы обращения и ссылки на формулы обращения, связывающие различные формы событий-террасок.

| | $\mathrm{ter}(X)$ | $\mathrm{ter}_X$ | $\mathrm{ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{ter}(X)$ | $\mathrm{ter}(X) = \mathrm{ter}(X)$ | – | – |
| $\mathrm{ter}_X$ | [1] | $\mathrm{ter}_X = \mathrm{ter}_X$ | – |
| $\mathrm{ter}^X$ | [2] | – | $\mathrm{ter}^X = \mathrm{ter}^X$ |

Таблица 5.5. ($\mathrm{ter} \sim \mathrm{ter}$).

| | $\mathrm{Ter}(X)$ | $\mathrm{Ter}_X$ | $\mathrm{Ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Ter}(X)$ | $\mathrm{Ter}(X) = \mathrm{Ter}(X)$ | – | – |
| $\mathrm{Ter}_X$ | [4] | $\mathrm{Ter}_X = \mathrm{Ter}_X$ | – |
| $\mathrm{Ter}^X$ | [5] | – | $\mathrm{Ter}^X = \mathrm{Ter}^X$ |

Таблица 5.6. ($\mathrm{Ter} \sim \mathrm{Ter}$).

Есть еще несколько таких пар соответствующих формул:

$$\mathrm{ter}^X = \sum_{Y \subseteq X} \mathrm{ter}(Y) \quad \Longleftrightarrow \quad p^X = \sum_{Y \subseteq X} p(Y),$$

$$\left(\mathrm{Ter}^X\right)^c = \sum_{Y \subseteq X} \left(\mathrm{Ter}(Y)\right)^c \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - u^X = \sum_{Y \subseteq X} (1 - u(Y)),$$

| | $\mathrm{ter}(X)$ | $\mathrm{ter}_X$ | $\mathrm{ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Ter}(X)$ | $\mathrm{Ter}(X) = 1 - \mathrm{ter}(X^c)$ | – | – |
| $\mathrm{Ter}_X$ | [7] | – | $\mathrm{Ter}_X = 1 - \mathrm{ter}^{X^c}$ |
| $\mathrm{Ter}^X$ | [8] | $\mathrm{Ter}^X = 1 - \mathrm{ter}_{X^c}$ | – |

Таблица 5.7. ($\mathrm{Ter} \sim \mathrm{ter}$).

| | $\mathrm{Ter}(X)$ | $\mathrm{Ter}_X$ | $\mathrm{Ter}^X$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{ter}(X)$ | $\mathrm{ter}(X) = 1 - \mathrm{Ter}(X^c)$ | – | – |
| $\mathrm{ter}_X$ | [9] | – | $\mathrm{ter}_X = 1 - \mathrm{Ter}^{X^c}$ |
| $\mathrm{ter}^X$ | [10] | $\mathrm{ter}^X = 1 - \mathrm{Ter}_{X^c}$ | – |

Таблица 5.8. ($\mathrm{ter} \sim \mathrm{Ter}$).

$$(\mathrm{Ter}_X)^c = \sum_{X \subseteq Y} (\mathrm{Ter}(Y))^c \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - u_X = \sum_{X \subseteq Y} (1 - u(Y)),$$

$$(\mathrm{Ter}_X)^c = \sum_{X \subseteq Y} \mathrm{ter}(Y^c) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - u_X = \sum_{X \subseteq Y} (1 - u(Y)),$$

$$\mathrm{Ter}_X = \left(\mathrm{ter}^{X^c}\right)^c \quad \Longleftrightarrow \quad u_X = 1 - p^{X^c},$$

$$\mathrm{ter}^X = (\mathrm{Ter}_{X^c})^c \quad \Longleftrightarrow \quad p^X = 1 - u_{X^c},$$

где $X \subseteq \mathfrak{X}$.

### 5.3.2 Эвентологические формулы обращения, связывающие события-террасы между собой

Непосредственное применение законов де Моргана[2] к различным формам событий-террасок дает следующие соотношения дополни-

[2] *де Морган, Огастес (De Morgan, Augustus, 1806–1871)* — шотландский математик и логик. Основные труды по теории рядов и математической логике. С его именем связаны известные теоретико-множественные соотношения: *законы де Моргана*.

тельности, их связывающие:

$$\mathrm{ter}(X) = (\mathrm{Ter}(X^c))^c; \quad \mathrm{Ter}(X) = (\mathrm{ter}(X^c))^c, \qquad (\alpha);\ (\alpha)$$

$$\mathrm{ter}_X = (\mathrm{Ter}^{X^c})^c; \quad \mathrm{Ter}^X = (\mathrm{ter}_{X^c})^c, \qquad (\beta);\ (\beta)$$

$$\mathrm{ter}^X = (\mathrm{Ter}_{X^c})^c; \quad \mathrm{Ter}_X = (\mathrm{ter}^{X^c})^c. \qquad (\gamma);\ (\gamma)$$

(сравни с формулами на стр. 80 из раздела 5.2)

События-террасы в форме

$$\mathrm{ter}(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$$

образуют разбиение $\Omega$, представляют собой «наименьшие» из всех шести форм событий-террасы и могут служить «строительным материалом» из которого посредством теоретико-множественной операции непересекающегося объединения «складываются» все остальные формы событий-террасок:

$$\mathrm{ter}_X = \sum_{X \subseteq Y} \mathrm{ter}(Y); \quad \mathrm{ter}^X = \sum_{Y \subseteq X} \mathrm{ter}(Y), \qquad [1];\ [2]$$

$$(\mathrm{Ter}_X)^c = \sum_{X \subseteq Y} (\mathrm{Ter}(Y))^c; \quad (\mathrm{Ter}^X)^c = \sum_{Y \subseteq X} (\mathrm{Ter}(Y))^c, \qquad [4];\ [5]$$

$$(\mathrm{Ter}_X)^c = \sum_{X \subseteq Y} \mathrm{ter}(Y^c); \quad (\mathrm{Ter}^X)^c = \sum_{Y \subseteq X} \mathrm{ter}(Y^c), \qquad [7];\ [8]$$

$$\mathrm{ter}_X = \sum_{X \subseteq Y} (\mathrm{Ter}(Y^c))^c; \quad \mathrm{ter}^X = \sum_{Y \subseteq X} (\mathrm{Ter}(Y^c))^c. \qquad [9];\ [10]$$

Соотношения [1], [2], [4], [5], [7], [8], [9] и [10], которые связывают соответствующие формы событий-террасок, служат теоретико-множественной основой для так называемых прямых формул обращения Мёбиуса Э-распределений (раздел 5.2 на стр. 78). В доказательстве нуждаются только два первых соотношения [1] и [2], так как остальные формулы получаются из них путем применением правил де Моргана.

Доказательство [1]. В силу определения событий-террасок надо доказать, что

$$\bigcap_{x \in X} x = \sum_{X \subseteq Y} \left( \bigcap_{x \in Y} x \bigcap_{x \in Y^c} x^c \right).$$

Обозначив временно $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} - X,\ Y' = Y - X$, получим

$$\bigcap_{x\in Y} x \bigcap_{x\in Y^c} x^c = \left(\bigcap_{x\in X} x\right) \cap \left(\bigcap_{x\in Y'} x \bigcap_{x\in \mathfrak{X}'-Y'} x^c\right) = \left(\bigcap_{x\in X} x\right) \cap \operatorname{ter}'(Y'),$$

где

$$\operatorname{ter}'(Y') = \bigcap_{x\in Y'} x \bigcap_{x\in \mathfrak{X}'-Y'} x^c, \quad Y' \subseteq \mathfrak{X}'$$

— события-террасы, порожденные множеством событий $\mathfrak{X}'$ и образующие разбиение

$$\Omega = \sum_{Y'\subseteq \mathfrak{X}'} \operatorname{ter}'(Y').$$

А поскольку

$$\sum_{X\subseteq Y} \left(\bigcap_{x\in Y} x \bigcap_{x\in Y^c} x^c\right) = \bigcap_{x\in X} x \cap \left(\sum_{Y'\subseteq \mathfrak{X}'} \operatorname{ter}'(Y')\right) = \bigcap_{x\in Y} x \cap \Omega = \bigcap_{x\in Y} x,$$

то [1] доказано. Доказательство [2] полностью аналогично.

Каждому соотношению в виде непересекающегося объединения [1], [2], [4], [5], [7], [8], [9] и [10] соответствует соотношение в виде пересечения:

$$(\operatorname{ter}_X)^c = \bigcap_{X\subseteq Y} (\operatorname{ter}(Y))^c; \quad (\operatorname{ter}^X)^c = \bigcap_{Y\subseteq X} (\operatorname{ter}(Y))^c, \qquad [1']; \ [2']$$

$$\operatorname{Ter}_X = \bigcap_{X\subseteq Y} \operatorname{Ter}(Y); \quad \operatorname{Ter}^X = \bigcap_{Y\subseteq X} \operatorname{Ter}(Y), \qquad [4']; \ [5']$$

$$\operatorname{Ter}_X = \bigcap_{X\subseteq Y} (\operatorname{ter}(Y^c))^c; \quad \operatorname{Ter}^X = \bigcap_{Y\subseteq X} (\operatorname{ter}(Y^c))^c, \qquad [7']; \ [8']$$

$$(\operatorname{ter}_X)^c = \bigcap_{X\subseteq Y} \operatorname{Ter}(Y^c); \quad (\operatorname{ter}^X)^c = \bigcap_{Y\subseteq X} \operatorname{Ter}(Y^c), \qquad [9']. \ [10']$$

Среди них наиболее простой вид имеют соотношения [4'] и [5'], которые для событий-террасок в форме «Ter» играют такую же роль, какую соотношения [1] и [2] играют для событий-террасок в форме «ter».

### 5.3.3 Эвентологические формулы обращения, связывающие события с событиями-террасками

Как между различными формами событий-террасок, так и между событиями $x \in \mathfrak{X}$ и различными формами событий-террасок, порожденных множеством событий $\mathfrak{X}$, существуют очевидные теоретико-множественные соотношения следующего вида.

$$(1)\begin{cases}\mathrm{ter}(X) = \bigcap\limits_{x\in X} x \bigcap\limits_{x\in X^c} x^c,\ X \subseteq \mathfrak{X},\\ x = \sum\limits_{x\in X} \mathrm{ter}(X), \quad x \in \mathfrak{X}.\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}\mathrm{ter}_X = \bigcap\limits_{x\in X} x,\ X \subseteq \mathfrak{X},\\ x = \mathrm{ter}_{\{x\}}, \quad x \in \mathfrak{X}.\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\mathrm{ter}^X = \bigcap\limits_{x\in X^c} x^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X},\\ x^c = \mathrm{ter}^{\{x\}^c}, \quad x \in \mathfrak{X}.\end{cases} \qquad (4)\begin{cases}\mathrm{Ter}^X = \bigcup\limits_{x\in X^c} x^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X},\\ x^c = \mathrm{Ter}^{\{x\}^c}, \quad x \in \mathfrak{X}.\end{cases}$$

$$(5)\begin{cases}\mathrm{Ter}_X = \bigcup\limits_{x\in X} x,\ X \subseteq \mathfrak{X},\\ x = \mathrm{Ter}_{\{x\}}, \quad x \in \mathfrak{X}.\end{cases} \qquad (6)\begin{cases}\mathrm{Ter}(X) = \bigcup\limits_{x\in X} x \bigcup\limits_{x\in X^c} x^c,\ X \subseteq \mathfrak{X},\\ x = \sum\limits_{x\in X} \left(\mathrm{Ter}(X^c)\right)^c, \quad x \in \mathfrak{X}.\end{cases}$$

## 5.4 Заключение

Рассмотрены *формулы обращения Э-распределений*, и *формулы сет-обращения множеств событий и событий-террасок*. В основе обращения Э-распределений лежат классические формулы обращения Мёбиуса, а формулы сет-обращения множеств событий и событий-террасок классических аналогов не имеют. Предложенные формулы обращения составляют один из основных инструментов доказательства эвентологических утверждений.

# Глава 6
# ЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Предлагается эвентологическая теория зависимости событий, определяемой вероятностью, которая включает: меры зависимости событий, метрическую интерпретацию ковариации событий, ковариационный и корреляционный анализ множеств событий, теорию эвентологической копулы, условные события, условные эвентологические распределения и эвентологическую теорему Байеса.

*«Элементы — ничто, связи — всё.*
*... восприятия, как и представления,*
*воля, чувствования, одним словом —*
*весь внутренний и внешний мир,*
*составляются из небольшого числа*
*однородных элементов, образующих*
*то более слабую, то более крепкую связь.»*
Эрнст Мах[1] [85].

## 6.1 Введение

**Зависимость против независимости**. Мы живем, невыносимо легко складывая мозаику множеств событий, которые ежедневно происходят с нами и вокруг нас. Стремительная или тягучая череда меняющихся множеств событий, взаимодействующих друг с другом, зависящих друг от друга, порождает причудливую мозаику *вероятностных взаимозависимостей* — нашу жизнь. Некоторые события

[1] *Мах, Эрнст (Mach, Ernst, 1838–1916)* — австрийский физик и философ-идеалист.

можно считать *вероятностно независимыми*, и если бы все события всегда были независимы друг от друга, то было бы достаточно измерить вероятность каждого из них, чтобы делать прогнозы о наступлении этих событий в будущем. Однако реальные события *вероятностно зависят* друг от друга — либо *вероятностно притягиваются*, либо *вероятностно отталкиваются*. Иными словами, либо происходят одновременно чаще, чем при независимом наступлении, либо реже. Некоторые события зависят от нескольких событий сразу, более того, можно себе представить зависимости между множествами событий. Чтобы разобраться в причудливой мозаике *вероятностно зависимых* множеств событий, предсказывать события и управлять ими, надо прежде всего научиться *выражать и измерять* структуры *вероятностных взаимозависимостей* событий. Измерение вероятностной зависимости между событиями — фундаментальная проблема теории вероятностей и математической статистики, которая решается современной классической теорией преимущественно косвенными методами через изучение зависимостей случайных величин или зависимостей более общих случайных элементов линейных пространств. Традиционными мерами зависимости случайных линейных элементов считается ковариация и корреляция. Эвентологическая теория вводит новые меры зависимости — *ковариацию и корреляцию событий*. Ковариациям и корреляциям событий, измерению и классификации *вероятностных зависимостей* событий методами ковариационного и корреляционного анализа посвящена данная глава.

**Зависимость важнее независимости.** *Независимость событий* определяется вероятностью — вероятность же *навязывает* событиям ту или иную *вероятностную зависимость*. Именно вероятность определяет совместное вероятностное поведение событий, именно вероятность определяет, какие события и насколько будут зависимы, а какие — нет. Вероятность, заданная на алгебре событий, — это исчерпывающее описание и единственный источник всех мыслимых вероятностных зависимостей между любыми множествами измеримых событий.

Понятие *независимости событий*, центральное в теории вероятностей, отличает ее от общей теории меры. Теория вероятностей — это наука, которая изучает вероятностные зависимости и взаимодействия. Но так уж сложилось — и не только в теории вероятностей,

— что чаще говорят о *независимости*, оставляя для *различного рода зависимостей* ту область, где независимости нет. Это легко понять — независимость гораздо прозрачнее и проще для анализа. Однако, каждый из нас сразу согласится с тем, что океан зависимостей несравненно богаче своими различными представителями, чем крохотный островок независимости. Пожалуй, только с появлением и развитием *эвентологии* внимание исследователей, до этого истоптавших вдоль и поперек островок независимых или «почти» независимых событий и сгрудившихся на его надоевшем берегу, стало постепенно, но всё более настойчиво обращаться в сторону неизведанного и неисчерпаемого океана вероятностных зависимостей, которые навязываются подмножествам случайного множества событий вероятностной мерой, — в сторону единственного достойного предмета теории вероятностей, выделяющего ее из общей теории меры.

Перевернем пирамиду и вместо изучения редкой вероятностной независимости на бескрайнем фоне зависимостей станем рассматривать многообразие вероятностных зависимостей на скудном независимом фоне. Первое, что возникает в душе исследователя, очутившегося на берегу туманного океана вероятностных зависимостей, — скромное желание попытаться классифицировать зависимости событий по характерным вероятностном признакам, чтобы тем самым обозначить хотя бы контуры близлежащих берегов и наметить маршруты первых *эвентологических* путешествий.

## 6.2 Ковариации событий

### 6.2.1 Мультиплет событий и связанные с ним вероятности

Рассмотрим конечное множество событий $\mathfrak{X} = \{x, \ldots, z\}$, каждое из которых — элемент алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение 1 (мультиплет событий, или $N$-плет событий). Конечное множество событий $\mathfrak{X} = \{\underbrace{x, \ldots, z}_{N}\}$ состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий, будем называть *мультиплетом событий*, или $N$*-плетом событий*.

Частными случаями мультиплета событий являются *моноплет, дуплет* и *триплет* событий, иными словами множества событий, состоящие соответственно из одного, двух и трех событий. Имеет смысл говорить также о *нульплете* событий как о множестве собы-

тий, не содержащем ни одного события — пустом множестве событий.

Определение 2 (множество всех подмножеств мультиплета событий, булеан мультиплета событий). Обозначим $2^{\mathfrak{X}}$ — *множество всех подмножеств событий из мультиплета* $\mathfrak{X}$, или *булеан мультиплета событий*.

С произвольным $N$-плетом событий $\mathfrak{X}$ можно связать еще $2^N$ $N$-плетов, которые полностью определяются мультиплетом $\mathfrak{X}$ и некоторым его подмножеством $A \subseteq \mathfrak{X}$, и имеют ту же, как будет показано ниже, структуру вероятностных зависимостей, которая навязывается им вероятностью.

Определение 1' (нумерация мультиплета событий его подмножеством). *Нумерацией мультиплета* $\mathfrak{X}$ *его подмножеством* $A \subseteq \mathfrak{X}$, или $A$-*нумерацией* $\mathfrak{X}$ называется мультиплет $\mathfrak{X}_A = \{x : x \in A\} + \{x^c : x \in A^c\}, \quad A \in 2^{\mathfrak{X}}$.

Определенный таким образом $N$-плет $\mathfrak{X}_A$ отличается от $\mathfrak{X}$ только тем, что события из $A^c = \mathfrak{X} \setminus A$ входят в него в виде своих дополнений. Например, получаем при $A = \mathfrak{X}$ $\mathfrak{X}_{\mathfrak{X}} = \{x : x \in \mathfrak{X}\} + \{x^c : x \in \emptyset\} = \mathfrak{X}$ — $\mathfrak{X}$-нумерацию $\mathfrak{X}$, а при $A = \emptyset$ $\mathfrak{X}_\emptyset = \{x : x \in \emptyset\} + \{x^c : x \in \mathfrak{X}\} = \{x^c : x \in \mathfrak{X}\}$ – $\emptyset$-нумерацию $\mathfrak{X}$ — мультиплет событий, составленный из дополнений к событиям из $\mathfrak{X}$.

Поскольку элементы мультиплета $\mathfrak{X}$ и любой его нумерации принадлежат алгебре $\mathcal{F}$, то для каждого из этих элементов определена вероятность.

Определение 3 (индивидуальные вероятности событий). Вероятности $p_x^1 = \mathbf{P}(x), \quad x \in \mathfrak{X}$, называются *индивидуальными вероятностями событий* $x$ из мультиплета $\mathfrak{X}$, а вероятности $p_x^0 = 1 - p_x^1 = \mathbf{P}(x^c), \quad x \in \mathfrak{X}$, называются *индивидуальными вероятностями дополнений* $x^c = \Omega \setminus x$ *событий* $x$ из мультиплета $\mathfrak{X}$.

Определение 4 (совместные вероятности событий). *Совместными вероятностями событий мультиплета* $\mathfrak{X}$ называются

$$p_{\mathfrak{X}}(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}_X} x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

— вероятности того, что произойдут все события из $X$ и ни одного из $X^c$, иными словами — произойдут все события из $\mathfrak{X}_X$ — $X$-нумерации $\mathfrak{X}$. В частности, при $X = \mathfrak{X}$ совместная вероятность

$p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} x\right)$ — это вероятность пересечения всех событий мультиплета $\mathfrak{X}$, а при $X = \emptyset$ $p_{\mathfrak{X}}(\emptyset) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}} x^c\right)$ — это вероятность пересечения всех дополнений событий мультиплета $\mathfrak{X}$, иными словами, вероятность пересечения всех событий из $\mathfrak{X}_\emptyset$ — $\emptyset$-нумерации мультиплета $\mathfrak{X}$. Будем считать, что $\bigcap_{x\in\emptyset} x = \Omega$ — пересечение пустого множества событий — это достоверное событие $\Omega$. Отсюда и из определения 4 имеем, в частности,

$$p_\emptyset(\emptyset) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in\emptyset} x \bigcap_{x\in\emptyset} x^c\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

— вероятность пересечения всех событий из $\emptyset$-нумерации нульплета $\emptyset$ равна единице.

Определение 5 (распределение мультиплета событий, или совместное распределение событий). Под *совместным распределением $N$ событий* $\underbrace{x,\ldots,z}_{N} \in \mathcal{F}$, образующих мультиплет $\mathfrak{X} = \{x,\ldots,z\}$, иными словами, под *распределением мультиплета* $\mathfrak{X}$, которое навязывается ему вероятностью $\mathbf{P}$, понимается набор из $2^N$ совместных вероятностей

$$p_{\mathfrak{X}} = \left\{p_{\mathfrak{X}}(X), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\} = \left\{\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c\right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\}.$$

Определение 6 (вероятности независимых пересечений событий мультиплета). *Вероятностями независимых пересечений событий мультиплета* $\mathfrak{X}$ называются

$$\mathrm{ind}_{\mathfrak{X}}(X) = \prod_{x\in X} p_x^1 \prod_{x\in X^c} p_x^0, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

— вероятности независимого пересечения всех событий из его $X$-нумераций, иными словами — произведения индивидуальных вероятностей событий из $X$ и дополнений событий из $X^c$. В частности, при $X = \mathfrak{X}$ $\mathrm{ind}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = \prod_{x\in\mathfrak{X}} p_x^1$ — вероятность независимого пересечения всех событий мультиплета $\mathfrak{X}$, а при $X = \emptyset$ $\mathrm{ind}_{\mathfrak{X}}(\emptyset) = \prod_{x\in\mathfrak{X}} p_x^0$ — вероятность независимого пересечения всех дополнений событий мультиплета $\mathfrak{X}$, иными словами, всех событий из $\mathfrak{X}_\emptyset$ — $\emptyset$-нумерации

$\mathfrak{X}$. Будем считать, что $\prod_{x\in\emptyset} p_x^1 = 1$ — произведение пустого множества сомножителей равно единице. Отсюда и из определения 6 имеем, в частности,

$$\mathrm{ind}_\emptyset(\emptyset) = \prod_{x\in\emptyset} p_x^1 \prod_{x\in\emptyset} p_x^0 = 1$$

— вероятность независимого пересечения событий из $\emptyset$-нумерации нульплета $\emptyset$ равна единице.

Определение 7 (независимое распределение мультиплета событий, или независимое распределение событий). Под *независимым распределением $N$ событий* $\underbrace{x,\ldots,z}_{N} \in \mathcal{F}$, образующих мультиплет $\mathfrak{X} = \{x,\ldots,z\}$, иными словами, под *независимым распределением мультиплета* $\mathfrak{X}$, которое навязывается ему вероятностью $\mathbf{P}$ через индивидуальные вероятности его событий $\left\{p_x^1 = \mathbf{P}(x),\ x\in\mathfrak{X}\right\}$, понимается набор

$$\mathrm{ind}_\mathfrak{X} = \left\{\mathrm{ind}_\mathfrak{X}(X),\quad X\in 2^\mathfrak{X}\right\} = \left\{\prod_{x\in X} p_x^1 \prod_{x\in X^c} p_x^0,\quad X\in 2^\mathfrak{X}\right\}$$

из $2^N$ вероятностей независимых пересечений всех событий из нумераций мультиплета $\mathfrak{X}$.

Лемма 1 (о распределениях нумераций мультиплета событий). *Распределение мультиплета $\mathfrak{X}$ полностью определяет распределение каждой его $A$-нумерации подмножеством $A\subseteq\mathfrak{X}$ по формулам:* $p_{\mathfrak{X}_A}(X) = p_\mathfrak{X}(X\ \Delta\ A),\quad X\in 2^\mathfrak{X}$.

Доказательство следует из соотношений между различными нумерациями мультиплета.

### 6.2.2 Плетные ковариации событий

*Плетные ковариации*, которые определяются в этом разделе, — это обычные ковариации, давно используемые в теории вероятностей, поэтому чаще всего они будут называться просто ковариациями.

Обозначим

$$\mathbf{1}_x = \mathbf{1}_x(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega\in x,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

— индикаторы событий $x \in \mathfrak{X}$ — булевы случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение 8 (ковариация, или плетная ковариация). *Ковариацией $\mathfrak{X}$, плетной ковариацией $\mathfrak{X}$, $N$-плетной ковариацией событий из $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$-плетной ковариацией* называется величина

$$\mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \mathbf{E}\left(\prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} \left(1_x - p_x^1\right)\right), & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 1, & \text{иначе}, \end{cases}$$

— центральный смешанный момент порядка $N = |\mathfrak{X}|$ индикаторов событий из $\mathfrak{X}$.

Из определения 8 следует, что $\mathsf{Cov}_{\emptyset} = 1$ — плетная ковариация нульплета равна единице, а $\mathsf{Cov}_{\{x\}} = \mathsf{Cov}_x = 0,\ x \in \mathfrak{X}$ — плетные ковариации любых моноплетов равны нулю.

### 6.2.3 Арные ковариации событий

Возьмем на себя смелость ввести для нового понятия *арной ковариации* специальное обозначение $\mathsf{Kov}$, которое, на первый взгляд, странным образом отличается от обозначения $\mathsf{Cov}$, употребляемого обычно для ковариации. Как показал первый опыт одновременного обращения с тремя типами ковариаций, такое бросающееся в глаза различие в обозначениях действительно необходимо во избежание недоразумений и путаницы и позволяет выстроить не слишком трудно запоминающуюся систему обозначений.

Определение 9 (арная ковариация). *Арной ковариацией $\mathfrak{X}$, $N$-арной ковариацией событий из $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$-арной ковариацией* называется величина

$$\mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \mathbf{E}\left(\prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathbf{1}_x\right) - \prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} p_x^1, & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Из определения 9 следует, что

$$\mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} x\right) - \prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathbf{P}(x), & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) - \mathrm{ind}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

— это разность между вероятностями пересечения и независимого пересечения событий мультиплета $\mathfrak{X}$.

Из определения 9 также следует, что $\mathsf{Kov}_{\emptyset} = 0$ — нуль-арная ковариация нульплета равна нулю[2], и $\mathsf{Kov}_x = 0, \quad x \in \mathfrak{X}$, одинарная ковариация любого моноплета равна нулю.

### 6.2.4 Кортежи подмножеств событий и их ковариации

Определение 10 (кортеж подмножеств событий). *Кортежем подмножеств событий из* $\mathfrak{X}$ называется произвольное подмножество $T$ булеана $2^{\mathfrak{X}}$: $T \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$. Сам булеан $2^{\mathfrak{X}}$ — это кортеж. Элементами любого кортежа $T$ являются некоторые подмножества событий из мультиплета $\mathfrak{X}$, в частности, элементом кортежа может быть и сам мультиплет $\mathfrak{X}$: $\mathfrak{X} \in T$, и пустое подмножество событий: $\emptyset \in T$.

Определение 11 (кортежная плетная ковариация, или плетная ковариация внутри кортежа). *$T$-кортежной плетной ковариацией* $\mathfrak{X}$, или *плетной ковариацией* $\mathfrak{X}$ *внутри кортежа* $T \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ называется величина

$$\mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}^{(T)} = \sum_{X \in T} \mathrm{ind}_{X^c}(X^c)\, \mathsf{Cov}_X = \sum_{X \in T} \left( \mathsf{Cov}_X \prod_{x \in X^c} p_x^1 \right)$$

— сумма $X$-плетных ковариаций (по всем подмножествам $X$ из кортежа $T$), домноженных на вероятности независимых пересечений событий из $X^c$, т.е. на произведения индивидуальных вероятностей событий из $X^c$.

Замечание. Повторим еще раз, что чаще всего определение *плетная* будет опущено, чтобы использовать обычный термин *ковариация*. Это касается и только что определенной *кортежной ковариации*, или *ковариации внутри кортежа*.

Определение 12 (кортежная арная ковариация, или арная ковариация внутри кортежа). *$T$-кортежной арной ковариацией* $\mathfrak{X}$, или *арной*

[2]Здесь, как обычно, молчаливо предполагается, что $\prod_{x \in \emptyset} p_x^1 = 1$ — произведение пустого множества сомножителей равно единице.

*ковариацией* $\mathfrak{X}$ *внутри кортежа* $T \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ называется величина

$$\mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}}^{(T)} = \sum_{X \in T} (-1)^{|X^c|} \mathrm{ind}_{X^c}(E^c)\, \mathsf{Kov}_X =$$

$$= \sum_{X \in T} (-1)^{|X^c|} \left( \mathsf{Kov}_X \prod_{x \in X^c} p_x^1 \right)$$

— знакопеременная сумма $X$-арных ковариаций (по всем подмножествам $X$ из кортежа $T$), домноженных на вероятности независимых пересечений событий из $X^c$, т.е. на произведения индивидуальных вероятностей событий из $X^c$.

### 6.2.5 Слои подмножеств событий и их ковариации

В данной работе нас прежде всего интересуют не произвольные кортежи подмножеств событий, а кортежи одного специального вида, так называемые *слои* подмножеств событий.

Определение 13 (слой подмножеств событий). *$m$-слоем подмножеств событий из мультиплета* $\mathfrak{X}$, или *$m$-слоем мультиплета* $\mathfrak{X}$, называется кортеж

$$C_{\mathfrak{X}}^m = \{X \subseteq \mathfrak{X} :\ |E| = m\} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}, \quad m = 0, \ldots, |\mathfrak{X}|,$$

составленный из всех подмножеств событий мультиплета $\mathfrak{X}$, содержащих $m$ событий.

Определение 14 ($m$-слойная плетная ковариация, или плетная ковариация внутри слоя). *$m$-слойной плетной ковариацией* $\mathfrak{X}$, или *плетной ковариацией* $\mathfrak{X}$ *внутри $m$-слоя* $C_{\mathfrak{X}}^m \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ называется величина

$$\mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}^{(m)} = \sum_{X \in C_{\mathfrak{X}}^m} \mathrm{ind}_{X^c}(X^c)\, \mathsf{Cov}_X =$$

$$= \sum_{X \in C_{\mathfrak{X}}^m} \left( \mathsf{Cov}_X \prod_{x \in X^c} p_x^1 \right), \quad m = 0, \ldots, |\mathfrak{X}|,$$

— сумма $m$-плетных ковариаций $\mathsf{Cov}_X$ (по всем подмножествам $X$ из $m$-слоя), домноженных на вероятности независимых пересечений

событий из $X^c$, т.е. на произведения индивидуальных вероятностей событий из $X^c$.

Из определений 14 и 8 следует, что $\mathsf{Cov}^{(0)}_{\mathfrak{X}} = \prod_{x\in\mathfrak{X}} p^1_x$ — нуль-слойная ковариация равна произведению индивидуальных вероятностей всех событий из мультиплета, $\mathsf{Cov}^{(1)}_{\mathfrak{X}} = 0$ — однослойная ковариация любого мультиплета равна нулю, а $\mathsf{Cov}^{(N)}_{\mathfrak{X}} = \mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}$ — $N$-слойная ковариация любого $N$-плета равна его плетной ковариации.

Определение 15 ($m$-слойная арная ковариация, или арная ковариация внутри слоя). *$m$-слойной арной ковариацией $\mathfrak{X}$, или арной ковариацией $\mathfrak{X}$ внутри $m$-слоя $C^m_{\mathfrak{X}} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$*, называется величина

$$\mathsf{Kov}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = (-1)^{N-m} \sum_{X\in C^m_{\mathfrak{X}}} \mathrm{ind}_{X^c}(E^c)\,\mathsf{Kov}_X =$$

$$= (-1)^{N-m} \sum_{X\in C^m_{\mathfrak{X}}} \left(\mathsf{Kov}_X \prod_{x\in X^c} p^1_x\right)$$

— сумма $X$-арных ковариаций $\mathsf{Kov}_X$ (по всем подмножествам $E$ из $m$-слоя), домноженных на вероятности независимых пересечений событий из $X^c$, т.е. на произведения индивидуальных вероятностей событий из $X^c$. При этом знак суммы зависит от четности $N - m = |\mathfrak{X}| - |X| = |X^c|$.

Из определений 15 и 9 следует, что $\mathsf{Kov}^{(0)}_{\mathfrak{X}} = 0$ — нуль-слойная арная ковариация равна нулю, $\mathsf{Kov}^{(1)}_{\mathfrak{X}} = 0$ — однослойная арная ковариация любого мультиплета равна нулю, а $\mathsf{Kov}^{(N)}_{\mathfrak{X}} = \mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}}$ — $N$-слойная арная ковариация любого $N$-плета равна его $N$-арной ковариации.

### 6.2.6 Свойства ковариаций событий

Лемма 1 (о сумме всех слойно-арных ковариаций мультиплета).

$$\sum_{m=0}^{|\mathfrak{X}|} \mathsf{Kov}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}, & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

*— сумма всех слойных арных ковариаций любого непустого мультиплета $\mathfrak{X}$ равна его плетной ковариации, а для нульплета равна нулю.*

Доказательство следует из определений ковариаций и формул сет-суммирования.

Лемма 2 (о сумме всех слойных ковариаций мультиплета).

$$\sum_{m=0}^{|\mathfrak{X}|} \mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}^{(m)} = \begin{cases} p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

*— сумма всех слойных ковариаций любого непустого мультиплета $\mathfrak{X}$ равна вероятности пересечения всех его событий, а для нульплета равна нулю.*

Доказательство следует из определений ковариаций и формул сет-суммирования.

Следствие из лемм 1 и 2.

Отделив от сумм слойных ковариаций, фигурирующих в леммах 1 и 2, первые два члена ($m = 0, 1$), и учитывая то, что $\mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}}^{(0)} = \mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}}^{(1)} = 0$, а $\mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}^{(0)} = \prod\limits_{x \in \mathfrak{X}} p_x^1$, $\mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}^{(1)} = 0$, получим выражения

$$\sum_{m=2}^{|\mathfrak{X}|} \mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}}^{(m)} = \begin{cases} \mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}, & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\prod_{x \in \mathfrak{X}} p_x^1 + \sum_{m=2}^{|\mathfrak{X}|} \mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}^{(m)} = \begin{cases} p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}), & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

из которых, если вспомнить, что

$$\mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}} = p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) - \prod_{x \in \mathfrak{X}} p_x^1,$$

следуют два красивых косо-симметричных соотношения

$$\mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}} = \begin{cases} \sum\limits_{m=2}^{|\mathfrak{X}|} \mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}}^{(m)}, & \mathfrak{X} \neq \emptyset, \\ 1, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{Cov}$$

$$\mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}} = \sum_{m=2}^{|\mathfrak{X}|} \mathsf{Cov}_{\mathfrak{X}}^{(m)}, \tag{Kov}$$

связывающих арную ковариацию со слойно-плетными, а плетную ковариацию со слойно-арными ковариациями.

Замечание. Во втором соотношении (Kov) можно не различать случаи $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ и $\mathfrak{X} = \emptyset$, так как $\mathsf{Kov}_\emptyset = 0$, чего нельзя сделать в первом соотношении (Cov), так как $\mathsf{Cov}_\emptyset = 1$, в то время как по лемме 2 при $\mathfrak{X} = \emptyset$

$$\sum_{m=2}^{|\mathfrak{X}|} \mathsf{Kov}_{\mathfrak{X}}^{(m)} = 0.$$

## 6.3 Метрическая интерпретация ковариации событий

### 6.3.1 Парная ковариации событий

Лемма (метрическая интерпретация парной ковариации). *Пусть события $x$ и $y$ имеют вероятности $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$, а $\mathrm{Kov}_{xy}$ — их парная ковариация. Тогда*

$$2\mathrm{Kov}_{xy} = \Delta^i_{xy} - \Delta_{xy},$$

*где $\Delta_{xy} = \mathbf{P}(x\Delta y)$ — вероятностное расстояние между событиями $x$ и $y$, а $\Delta^i_{xy} = \mathbf{P}^i(x\Delta y)$ — вероятностное расстояние между независимыми событиями, имеющими те же вероятности, что и события $x$ и $y$.*

Доказательство. Поскольку парная ковариация событий $x$ и $y$, имеющих вероятности $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$, определяется как величина

$$\mathrm{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),$$

то

$$\Delta_{xy} = \mathbf{P}(x\Delta y) = \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) - 2\mathbf{P}(x \cap y) =$$

$$= \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) - 2\mathrm{Kov}_{xy} - 2\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) = \mathbf{P}^i(x\Delta y) - 2\mathrm{Kov}_{xy},$$

где $\mathbf{P}^i(x\Delta y)$ — вероятность симметрической разности независимых событий $x$ и $y$, имеющих вероятности $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$ соответственно. Иначе говоря, $\mathbf{P}^i(x\Delta y) = \Delta^i_{xy}$ — это вероятностное расстояние между независимыми событиями $x$ и $y$, вероятности которых равны $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$. Лемма доказана.

Замечание. Соотношение леммы

$$2\mathrm{Kov}_{xy} = \Delta^i_{xy} - \Delta_{xy} = \mathbf{P}^i(x\Delta y) - \mathbf{P}(x\Delta y)$$

означает, что удвоенная парная ковариация событий — это отличие вероятностного расстояния между этими событиями от вероятностного расстояния между независимыми событиями с такими же вероятностями. Причем если вероятностное расстояние между событиями больше вероятностного расстояния между независимыми событиями с такими же вероятностями (отрицательная парная ковариация), то значит события «вероятностно отталкиваются», в противном случае (положительная парная ковариация) — «вероятностно притягиваются». Соотношение леммы называется *метрической интерпретацией парной ковариации событий.*

### 6.3.2 Ковариация множества событий

Лемма (метрическая интерпретация арной ковариации). *Пусть* $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ *— конечное множество событий из алгебры эвентологического пространства* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*,* $X \subseteq \mathfrak{X}$ *— его произвольное подмножество, события* $x \in \mathfrak{X}$ *имеют вероятности* $\mathbf{P}(x)$*, а* $\mathrm{Kov}_X$ *и* $\mathrm{Kov}^{\cup}_X$ *— арные ковариации множества событий* $X \subseteq \mathfrak{X}$ *по пересечению и по объединению соответственно. Тогда*

$$|X|\,\mathrm{Kov}_X = \Delta^i_X - \Delta_X, \quad |X|\,\mathrm{Kov}^{\cup}_X = \Delta^{\cup}_X - \Delta^{\cup i}_X,$$

*где*

$$\Delta_X = \sum_{x\in X}\mathbf{P}(x) - |X|\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right), \quad \Delta^{\cup}_X = |X|\mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X} x\right) - \sum_{x\in X}\mathbf{P}(x)$$

*— сет-расстояния*[3] *множеств событий* $X \subseteq \mathfrak{X}$ *по пересечению и объединению соответственно, а* $\Delta^i_X$ *и* $\Delta^{\cup i}_X$ *— соответствующие сет-расстояния независимых множеств событий, имеющих те же вероятности, что и события из множества* $X \subseteq \mathfrak{X}$*.*

[3] Свойства *сет-расстояний множества событий* изложены в главе 8 на стр. 156.

## 6.4 Эвентологическая корреляция — мера вложенной зависимости событий

Разумный субъект измеряется не столько числовыми характеристиками, сколько эвентологическими — *событиями*, теми самыми, в которых он принимал участие, активное или пассивное. Зависят между собой не столько числа, сколько события. Любые два события, характеризующие разумного субъекта, например, событие $x \in \mathfrak{X}$ и событие $y \in \mathfrak{X}$ связаны между собой, хотя и не определяют друг друга однозначно — они связаны между собой *статистически*. Естественно попытаться *измерить силу связи между случайными событиями* с помощью вновь определенных эвентологических мер так же, как с помощью классических мер: *ковариации* и *корреляции* измеряется сила связи между случайными величинами.

Отношению полного линейного порядка значений случайных величин аналогично отношение частичного порядка по включению событий. Эта аналогия естественным образом продолжается в интерпретации характеров зависимостей, сила которых измеряется классической и эвентологической корреляциями. Известно, что *классическая корреляция случайных величин измеряет их линейную зависимость*. Эвентологический аналог этого классического факта: *эвентологическая корреляция (Э-корреляция) событий измеряет их вложенную зависимость*.

В эвентологии хорошо известны три типичных характера зависимости множеств событий:

- *вложенный* (Фреше-корреляция равна $+1$),
- *независимый* (Фреше-корреляция равна $0$),
- *наименее пересекающийся*[4] (Фреше-корреляция равна $-1$).

Покажем, что наименее пересекающая зависимость так же, как и вложенная, может быть интерпретирована в терминах отношения включения. Действительно, рассмотрим два титульных события $x, y \in \mathfrak{X}$, эвентологическая парная ковариация которых определяется формулой

$$\mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),$$

[4]Понятие «наименее пересекающиеся» события определяется относительно вероятности: *наименее пересекающимися* называются события, которые при фиксированных индивидуальных вероятностях имеют наименее возможную вероятность пересечения.

а Фреше-корреляция равна

$$\mathsf{Kor}_{xy} = \begin{cases} \mathsf{Kov}_{xy}/|F^+_{xy}| & \mathsf{Kov}_{xy} > 0, \\ \mathsf{Kov}_{xy}/|F^-_{xy}| & \mathsf{Kov}_{xy} < 0, \end{cases}$$

где

$$F^-_{xy} = \max\{0, p_x + p_y - 1\} - p_x p_y, \quad F^+_{xy} = \min\{p_x, p_y\} - p_x p_y$$

— правая и левая Фреше-границы парной ковариации соответственно:

$$F^-_{xy} \le \mathsf{Kov}_{xy} \le F^+_{xy}.$$

Интерпретация отношения пустого (или наименьшего относительно вероятности) пересечения событий в терминах отношения включения основана на простейших наблюдениях. Во-первых, для пустого пересечения:

$$x \cap y = \emptyset \iff x \subseteq y^c,$$

или эквивалентно:

$$x \cap y = \emptyset \iff y \subseteq x^c.$$

Во-вторых, для наименьшего (относительно вероятности) пересечения:

$$x \cap y = x \cap_{\min_{\mathbf{P}}} y \iff x \supseteq y^c,$$

или эквивалентно:

$$x \cap y = x \cap_{\min_{\mathbf{P}}} y \iff y \supseteq x^c.$$

Таким образом наименее пересекающуюся зависимость естественно считать частным вариантом обобщенной вложенной зависимости — *дополнительно-вложенной зависимостью*, а Фреше-корреляцию — мерой обобщенной вложенной зависимости: *прямой* (при положительных значениях, когда события вложены) и *дополнительной* (при отрицательных значениях, когда одно событие вложено в дополнение к другому).

### 6.4.1 Особенности вложенной зависимости между двумя событиями

Рассмотрим два произвольных титульных события $x, y \in \mathfrak{X}$ с парной ковариацией

$$\mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) = p_{xy} - p_x p_y.$$

Э-распределение событий $x$ и $y$ состоит из вероятностей порождаемых ими четырех безымянных событий-террасок

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \mathbf{P}(x \cap y) = p_x p_y + \mathsf{Kov}_{xy} = p_{xy};\\
p(x) &= \mathbf{P}(x \cap y^c) = p_x(1-p_y) - \mathsf{Kov}_{xy} = p_x - p_{xy};\\
p(y) &= \mathbf{P}(x^c \cap y) = (1-p_x)p_y - \mathsf{Kov}_{xy} = p_y - p_{xy},\\
p(\emptyset) &= \mathbf{P}(x^c \cap y^c) = (1-p_x)(1-p_y) + \mathsf{Kov}_{xy} = 1 - p_x - p_y + p_{xy};
\end{aligned}$$

которые выражаются через индивидуальные вероятности

$$p_x = \mathbf{P}(x), \quad p_y = \mathbf{P}(y)$$

и парную ковариацию $\mathsf{Kov}_{xy}$.

Титульное событие $x$ разбивается событием $y$ на два события-террасы

$$x = x \cap y + x \cap y^c = x' + x'',$$

одно из которых вложено в событие $y$:

$$x' \subseteq y,$$

а другое — в его дополнение $y^c = \Omega - y$:

$$x'' \subseteq y^c,$$

где события-террасы кратко обозначены:

$$x' = x \cap y, \; x'' = x \cap y^c.$$

Таким образом, событие $x$ составлено из двух событий-террасок,

- одно из которых $x'$ *вложенно зависит* от $y$,
- а второе $x''$ *вложенно зависит* от $y^c$.

Вычислим парные ковариации между событиями-террасками $x'$ и $x''$ и событиями $y$ и $y^c$ соответственно, учитывая, что каждая пара — вложенные события. Поскольку

$$\mathbf{P}(x') = \mathbf{P}(x \cap y) = p_x p_y + \mathsf{Kov}_{xy};$$

$$\mathbf{P}(x'') = \mathbf{P}(x \cap y^c) = p_x(1 - p_y) - \mathsf{Kov}_{xy},$$

получаем

$$\mathsf{Kov}_{x'y} = \mathbf{P}(x' \cap y) - \mathbf{P}(x')\mathbf{P}(y) = (p_x p_y + \mathsf{Kov}_{xy})(1 - p_y); \quad (1)$$

$$\mathsf{Kov}_{x''y^c} = \mathbf{P}(x'' \cap y^c) - \mathbf{P}(x'')\mathbf{P}(y^c) = (p_x(1 - p_y) - \mathsf{Kov}_{xy})p_y. \quad (2)$$

Заметим, что

$$\mathsf{Kov}_{x'y} = \mathsf{Kov}_{x''y} \Longleftrightarrow \mathsf{Kov}_{xy} = 0$$

— равенство двух парных ковариаций $\mathsf{Kov}_{x'y}$ и $\mathsf{Kov}_{x''y^c}$ эквивалентно нулевой парной ковариации $\mathsf{Kov}_{xy}$, т.е. независимости событий $x$ и $y$. Иначе говоря, события $x$ и $y$ независимы тогда и только тогда, когда событие $x$ разбивается событием $y$ на два события-террасы $x'$ и $x''$, в одинаковой степени *вложенно зависящие* от $y$ и $y^c$ соответственно. Из (1) и (2) следует соотношение, связывающее парные ковариации $\mathsf{Kov}_{x'y}$ и $\mathsf{Kov}_{x''y^c}$:

$$\frac{\mathsf{Kov}_{x'y}}{p_x(1 - p_y)} + \frac{\mathsf{Kov}_{x''y^c}}{p_x p_y} = 1,$$

которое означает, что при фиксированных индивидуальных вероятностях титульных событий эти две парные ковариации связаны противоположной линейной зависимостью: когда одна из них возрастает, другая — убывает. А поскольку обе эти ковариации измеряют вложенную зависимость, то их значения всегда неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$(1 - p_y)\max\{0, p_x + p_y - 1\} \le \mathsf{Kov}_{x'y} \le \min\{p_x, p_y\}(1 - p_y);$$

$$p_y \max\{0, p_x - p_y\} \le \mathsf{Kov}_{x''y^c} \le \min\{p_x, 1 - p_y\}p_y,$$

которые следуют из неравенств Фреше для вероятностей пересечения $p_{x'} = \mathbf{P}(x \cap y)$ и $p_{x''} = \mathbf{P}(x \cap y^c)$:

$$\max\{0, p_x + p_y - 1\} \le p_{x'} \le \min\{p_x, p_y\};$$

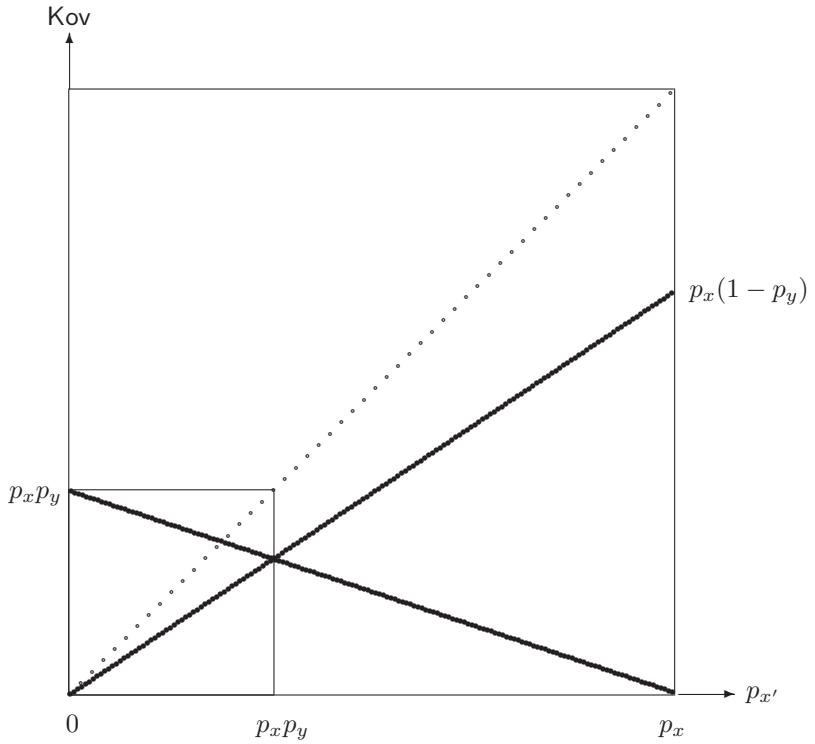



Рис. 6.1. Графики (толстые линии) изменения парных ковариаций $\mathsf{Kov}_{x'y} = p_{x'}(1-p_y)$ (возрастает) и $\mathsf{Kov}_{x''y^c} = (p_x - p_{x'})p_y$ (убывает) как линейных функций параметра $p_{x'} = p_{xy} \in [0,\ p_x]$. Ковариации совпадают, когда $p_{x'} = \mathbf{P}(x \cap y) = p_xp_y$, т.е. когда события $x$ и $y$ независимы.

$$\max\{0, p_x - p_y\} \le p_{x''} \le \min\{p_x, 1-p_y\}.$$

В частной (но вполне типичной) ситуации, когда

$$p_x + p_y < 1, \quad p_x < p_y$$

получаем:

$$0 \le \mathsf{Kov}_{x'y} \le p_x(1-p_y); \quad 0 \le \mathsf{Kov}_{x''y^c} \le p_xp_y.$$

Для этой же ситуации (и кроме того, для $p_y \le 1/2$) графики изменения парных ковариаций

$$\mathsf{Kov}_{x'y} = p_{x'}(1-p_y); \quad \mathsf{Kov}_{x''y^c} = (p_x - p_{x'})p_y$$

как линейных функций параметра $p_{x'} = p_{xy} \in [0,\ p_x]$ показаны на рис. 6.1.

## 6.5 Мультковариации множеств событий

Помимо трёх эквивалентных и давно известных способов представления распределения случайного множества — в виде распределения *вероятностей*, *подвероятностей* и *надвероятностей* — можно себе представить ещё, по крайней мере, два — в виде распределения *мульт-подковариаций* и *мульт-надковариаций*. Скорее всего, существуют и другие эквивалентные способы задания распределений случайных множеств. Например, всегда есть возможность ради удобства перейти к распределениям дополнения случайного множества, если возникает ситуация, когда с дополнением обращаться проще, чем с самим случайным множеством.

При исследовании зависимостей между элементами и множествами элементов, навязываемых случайным множеством, язык мультковариационных распределений оказывается эффективнее прочих. Однако, чтобы воспользоваться его преимуществами, надо поближе познакомиться с не совсем обычными по сравнению с аддитивным вариантом свойствами мультковариаций и мультковариационных распределений случайных множеств.

### 6.5.1 Распределения мультковариаций и мультипликативные формулы обращения

Как оказалось, кроме трёх эквивалентных способов представления распределения случайного множества $K$ под $\mathfrak{X}$ — в виде распределения *вероятностей* $p(X) = \mathbf{P}(K = X), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}$, *подвероятностей* $p^X = \mathbf{P}(K \subseteq X), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}$, и *надвероятностей* $p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}$, существует ещё два — в виде распределения *мульт-подковариаций*:

$$\tau^X = \left[\frac{\pi_0^X}{\pi_1^X}\right]^{(-1)^{|X|}}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}, \tag{$\star$}$$

и распределения *мульт-надковариаций*:

$$\tau_X = \left[\frac{\pi_X^0}{\pi_X^1}\right]^{(-1)^{|X|}}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}, \tag{$\bullet$}$$

где

$$\pi_0^X = \prod_{Y\in 0^X} p^{Y^c}, \quad \pi_1^X = \prod_{Y\in 1^X} p^{Y^c}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

$$\pi_X^0 = \prod_{Y\in 0^X} p_Y, \quad \pi_X^1 = \prod_{Y\in 1^X} p_Y, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

— *чётные и нечётные мульт-под-ковариации и мульт-надковариации* соответственно. Справедливы обратные формулы для $X \in 2^{\mathfrak{X}}$,

$$p^X = \prod_{Y\subseteq X^c} \tau^Y, \quad (\star\star) \qquad\qquad p_X = \prod_{X\subseteq Y} \tau_Y, \quad (\bullet\bullet)$$

связывающие надвероятности и подвероятности $K$ с его мульт-надковариациями и мульт-подковариациями соответственно. Пара формул $(\star)$ и $(\star\star)$, а также $(\bullet)$ и $(\bullet\bullet)$ — это формулы обращения, которые можно считать *мультипликативными аналогами формул обращения Мёбиуса*.

### 6.5.2 Простейшие свойства мультковариаций

Прежде чем двигаться дальше, надо разобраться в элементарных свойствах мультковариаций. Для начала запишем мульт-подковариации небольших порядков $q_X = \mathbf{P}(X \subseteq K^c) = \mathbf{P}(K \subseteq X^c) = p^{X^c}$, $X \in \mathfrak{X}$, по привычке выраженные через *надвероятности дополнения* $K^c = \mathfrak{X} - K$ *случайного множества* $K$. Отметим, что *распределение надвероятностей дополнения* $\boldsymbol{q}_K = \{q_X : X \in 2^{\mathfrak{X}}\}$ — это ещё один эквивалентный способ описания случайного множества $K$. Фактически это всего лишь «перенумерованные» дополнительными множественными индексами подвероятности $p^{X^c}$.

1. Мультипликативная моноплетная $x$-подковариация, $\{x\} \subseteq \mathfrak{X}$:

$$\tau^x = \left[\frac{\pi_0^x}{\pi_1^x}\right]^{-1} = p_x^0 = q_x. \tag{1}$$

2. Мультипликативная дуплетная $xy$-подковариация, $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$:

$$\tau^{xy} = \frac{\pi_0^{xy}}{\pi_1^{xy}} = \frac{p_{xy}^{00}}{p_x^0 p_y^0} = \frac{q_{xy}}{q_x q_y}. \tag{2}$$

3. Мультипликативная триплетная $xyz$-подковариация, $\{x,y,z\}\subseteq\mathfrak{X}$:

$$\tau^{xyz}=\left[\frac{\pi_0^{xyz}}{\pi_1^{xyz}}\right]^{-1}=\frac{p_x^0p_y^0p_z^0\ p_{xyz}^{000}}{p_{xy}^{00}p_{xz}^{00}p_{yz}^{00}}=\frac{q_xq_yq_z\ q_{xyz}}{q_{xy}q_{xz}q_{yz}}. \tag{3}$$

4. Мультипликативная четырёхплетная $xyzw$-подковариация, $\{x,y,z,w\}\subseteq\mathfrak{X}$:

$$\tau^{xyzw}=\frac{\pi_0^{xyzw}}{\pi_1^{xyzw}}=\frac{p_{xy}^{00}p_{xz}^{00}p_{xw}^{00}p_{yz}^{00}p_{yw}^{00}p_{zw}^{00}}{p_x^0p_y^0p_z^0p_w^0\ p_{xyz}^{000}p_{xyw}^{000}p_{xzw}^{000}p_{yzw}^{000}}=$$

$$=\frac{q_{xy}q_{xz}q_{xw}q_{yz}q_{yw}q_{zw}}{q_xq_yq_zq_w\ q_{xyz}q_{xyw}q_{xzw}q_{yzw}}. \tag{4}$$

Обратим внимание на формулы:

$$\tau^{xy}\tau^x\tau^y=q_{xy},\quad \{x,y\}\in 2^{\mathfrak{X}},$$

$$\tau^{xyz}\tau^{xy}\tau^{xz}\tau^{yz}\tau^x\tau^y\tau^z=q_{xyz},\quad \{x,y,z\}\in 2^{\mathfrak{X}},$$

$$\tau^{xyzw}\tau^{xyz}\tau^{xyw}\tau^{xzw}\tau^{yzw}\tau^{xy}\tau^{xz}\tau^{xw}\tau^{yz}\tau^{yw}\tau^{zw}\tau^x\tau^y\tau^z\tau^w=q_{xyzw},$$
$$\{x,y,z,w\}\in 2^{\mathfrak{X}},$$

или в общем виде:

$$\prod_{Y\subseteq X}\tau^Y=q_X,\quad X\in 2^{\mathfrak{X}},$$

которые легко следуют из $(\star\star)$, поскольку $q_X=p^{X^c}$.

### 6.5.3 Выражение вероятностей через мультковариации

Теперь попытаемся, применив к обратным формулам $(\star\star)$ и $(\bullet\bullet)$ обычные формулы обращения Мёбиуса, установить формулы, связывающие мультковариации и вероятности.

Вероятности через мульт-подковариации. Имеем

$$p(X)=\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X\setminus Y|}p^Y=\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X\setminus Y|}\prod_{Z\subseteq Y^c}\tau^Z,\quad X\in 2^{\mathfrak{X}},\ (\star\star\star)$$

Вероятности через мульт-надковариации.

$$p(X)=\sum_{X\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus X|}p_Y=\sum_{X\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus X|}\prod_{Y\subseteq Z}\tau_Z,\quad X\in 2^{\mathfrak{X}},\ (\bullet\bullet\bullet)$$

## 6.6 Эвентологическая теория копулы

Копула — это функция многих переменных $\mathrm{copula}(u_1, \ldots, u_n)$, которая связывает совместную функцию распределения (ф.р.) $F$ множества случайных величин $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с их маргинальными ф.р. $F_i(r_i)$:

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \mathrm{copula}(F(r_1), \ldots, F_n(r_n)). \tag{1}$$

Справедлива также обратная формула:

$$\mathrm{copula}(u_1, \ldots, u_1) = F(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)). \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) — это содержание теоремы Склара и следствия из нее [217], доказательство которых можно найти у Нелсена [193]. Из этого следствия мы знаем, что при любых заданных маргинальных распределениях и любой копуле мы получим правильное совместное распределение. Копула — это такая функция, которая, будучи примененной к одномерным маргиналам, дает в результате правильную многомерную ф.р.: поскольку эта ф.р. содержит всю информацию о случайном векторе, она содержит всю информацию о структуре зависимости его компонент. Использование копулы таким образом без потери какой-либо информации расщепляет распределение случайного вектора на индивидуальные компоненты (маргиналы) и структуру зависимостей (копула) среди них. Важно подчеркнуть, что эта теорема не требует, чтобы $F_1$ и $F_n$ были идентичны или даже принадлежали одному и тому же семейству распределений.

Поскольку совместная ф.р. определяется как вероятность пересечения множества событий:

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : \xi_i(\omega) \leqslant r_i\}\right),$$

а маргинальные ф.р. — как вероятности отдельных событий из этого множества:

$$F_i(r_i) = \mathbf{P}\left(\{\omega : \xi_i(\omega) \leqslant r_i\}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

то копула вполне может быть использована для того, чтобы связать эти вероятности:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\xi_i \leqslant r_i\}\right) = \mathrm{copula}\left(\mathbf{P}\left(\xi_1 \leqslant r_1\right), \ldots, \mathbf{P}\left(\xi_n \leqslant r_n\right)\right).$$

Наша цель — видоизменить классическое понятие копулы, чтобы приспособить его к эвентологическим распределениям множеств событий. На такое видоизменение копулы можно взглянуть с двух точек зрения. На первый взгляд, разумеется, эвентологическая копула — это всего лишь сужение на эвентологические распределения понятия копулы, используемой для функций распределения. Однако пристальный взгляд позволяет открыть, что эвентологическая копула расширяет класс классических копул за счет добавления копул совершенно нового типа, которые связывают с вероятностями событий не только вероятности их пересечений, но и вероятности других сет-операций над ними, в том числе, например, объединений.

Итак, зафиксируем набор вещественных чисел $\{r_1, \ldots, r_n\} \in \mathbb{R}^n$ и обозначим $x_i = \{\omega : \xi_i(\omega) \leqslant r_i\} \subseteq \Omega,\ i = 1, \ldots, n$ — соответствующие события, которые образуют множество $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда копула связывает вероятность пересечения множества событий $\mathfrak{X}$ с их вероятностями:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} x_i\right) = \operatorname{copula}\Big(\mathbf{P}\left(x_1\right), \ldots, \mathbf{P}\left(x_n\right)\Big).$$

Сначала, обозначая

$$\operatorname{copula}\Big(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}\Big) = \operatorname{copula}\Big(\mathbf{P}\left(x_1\right), \ldots, \mathbf{P}\left(x_n\right)\Big),$$

перепишем это соотношение в безындексной форме:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in \mathfrak{X}} x\right) = \operatorname{copula}\Big(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}\Big),$$

Затем обозначим для любого подмножества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$

$$\operatorname{copula}_X(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}) = \operatorname{copula}\Big(\mathbf{P}(x), x \in X;\ 1, x \in X^c\Big)$$

и заметим, что вероятности пересечения произвольных подмножеств событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ выражаются через копулу по формулам:

$$p_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} \Omega\right) =$$

$$= \mathrm{copula}\left(\mathbf{P}(x), x \in X;\ 1, x \in X^c\right) = \mathrm{copula}_X(\mathbf{P}(x),\ x \in \mathfrak{X}).$$

Из формул Мебиуса

$$p(X) = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y, \quad p^X = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y^c|} p_{Y^c},$$

получаем определение эвентологических копул еще двух типов:

$$\mathrm{copula}(X;\ \mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}) = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} \mathrm{copula}_Y(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}),$$

$$\mathrm{copula}^X(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}) = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y^c|} \mathrm{copula}_{Y^c}(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}),$$

где использованы обозначения для $X \subseteq \mathfrak{X}$

$$\mathrm{copula}(X;\ \mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}) = \mathrm{copula}(\mathbf{P}(x), x \in X;\ 1 - \mathbf{P}(x), x \in X^c),$$

$$\mathrm{copula}^X(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}) = \mathrm{copula}(1, x \in X;\ 1 - \mathbf{P}(x), x \in X^c).$$

Эти две новые Э-копулы определяют эвентологические распределения множества $\mathfrak{X}$ в двух видах:

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right) = \mathrm{copula}(\mathbf{P}(x), x \in X;\ 1 - \mathbf{P}(x), x \in X^c) =$$

$$= \mathrm{copula}(X;\ \mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}),$$

$$p^X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} \Omega \bigcap_{x \in X^c} x^c\right) = \mathrm{copula}(1, x \in X;\ 1 - \mathbf{P}(x), x \in X^c) =$$

$$= \mathrm{copula}^X(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}),$$

связывая вероятности двух других видов пересечений событий с вероятностями событий. Будем использовать сокращенные обозначения, опуская аргументы у эвентологических копул:

$$\mathrm{copula}(X) = \mathrm{copula}(X;\ \mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}),\ \mathrm{copula}_X = \mathrm{copula}_X(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}),$$

$$\mathrm{copula}^X = \mathrm{copula}^X(\mathbf{P}(x), x \in \mathfrak{X}).$$

Еще три формулы Мебиуса

$$u(X) = 1 - p(X^c), \quad u_X = 1 - p^{X^c}, \quad u^X = 1 - p_{X^c}$$

позволяют определить три новых эвентологических копулы:

$$\mathrm{Copula}(X) = 1 - \mathrm{copula}(X^c), \quad \mathrm{Copula}_X = 1 - \mathrm{copula}^{X^c},$$

$$\mathrm{Copula}^X = 1 - \mathrm{copula}_{X^c},$$

которые определяют эвентологические распределения еще трех видов:

$$u(X) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X} x \bigcup_{x\in X^c} x^c\right) = \mathrm{Copula}(X),$$

$$u_X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X} x\right) = \mathrm{Copula}_X,\ u^X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X^c} x^c\right) = \mathrm{Copula}^X.$$

**Независимые Э-копулы**

$$\mathrm{copula}_X(u_x,\ x\in\mathfrak{X}) = \prod_{x\in\mathfrak{X}} u_x,$$

$$\mathrm{copula}(X;\ u_x,\ x\in\mathfrak{X}) = \prod_{x\in X} u_x \prod_{x\in X^c}(1-u_x),$$

$$\mathrm{copula}^X(u_x,\ x\in\mathfrak{X}) = \prod_{x\in X^c}(1-u_x),$$

$$\mathrm{Copula}_X(u_x,\ x\in\mathfrak{X}) = 1 - \mathrm{copula}^{X^c} = 1 - \prod_{x\in X}(1-u_x),$$

$$\mathrm{Copula}(X;\ u_x,\ x\in\mathfrak{X}) = 1 - \mathrm{copula}(X^c) = 1 - \prod_{x\in X}(1-u_x)\prod_{x\in X^c} u_x,$$

$$\mathrm{Copula}^X(u_x,\ x\in\mathfrak{X}) = 1 - \mathrm{copula}_{X^c} = 1 - \prod_{x\in X^c} u_x.$$

## 6.7 Условные события

Попытаемся сначала выяснить, что можно понимать под *условным событием (у/событием)*, чтобы затем дать приемлемое строгое определение этого нового эвентологического понятия[5]. Если последовательно отстаивать эвентологическую точку зрения на *событие и вероятность*[6], как на взаимно дополняющие понятия, которые не существуют одно без другого, то *у/событие* — это ни что иное, как то самое ***событие*** с давно готовым удобным обозначением $x|s$, которое *эвентологически соответствует условной вероятности* $\mathbf{P}(x|s)$ *и* ***вероятность*** *которого как раз и равна этой самой условной вероятности*

$$\mathbf{P}(x|s) = \frac{\mathbf{P}(x \cap s)}{\mathbf{P}(s)}.$$

Сказанное выше — это, конечно, не строгое определение, а лишь довольно расплывчатая формулировка того, что можно было бы понимать под *условным событием*. Двинемся по пути уточнения формулировки.

Замечание 1 (о мощности $\Omega$ и мощности событий, имеющих ненулевую вероятность). Пространство э-событий $\Omega$ играет в эвентологии роль $\Omega$-*бытия*[7], и считается, что мощность $\Omega$ равна мощности континуума. При этом вероятность $\mathbf{P}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ считается абсолютно непрерывной относительно равномерной меры. Поэтому мощность каждого события $s$, имеющего ненулевую вероятность $\mathbf{P}(s) > 0$, равна мощности континуума.

---

[5] *Условное событие*, пожалуй, можно считать новым понятием и для теории вероятностей, которая до сих пор довольно успешно без него обходилась, ограничиваясь понятиями условной вероятности, условного распределения, условного математического ожидания и другими условными понятиями, имеющими «числовую» природу.

[6] Точка зрения эвентолога на событие и вероятность: если определена вероятность «чего-то», то это «что-то» есть не что иное, как событие; если же определено событие, то всегда определена и его вероятность — событий без вероятности не существует.

[7] $\Omega$-*бытие (пространство исходов бытия)* состоит из э-событий $\omega \in \Omega$, каждое из которых наступает только единожды и соответствует состоянию бытия в данный момент во всей мыслимой Вселенной. Таким образом, каждая эвентологическая задача рассматривается на фоне $\Omega$-*бытия*, иначе говоря, считается постоянно действующим «вселенский эксперимент», исходами которого служат неповторимые состояния Вселенной $\omega \in \Omega$.

Определение (условное нормирующее отображение событий). *Условным нормирующим отображением (у|отображением) события* $s \in \mathcal{F}$, имеющего ненулевую вероятность $\mathbf{P}(s) > 0$, называется взаимно однозначное отображение $f_s : s \to \Omega$, при котором образом события $s$ служит пространство элементарных событий $\Omega$: $f_s(s) = \Omega$.

Замечание 2 (свойства у|отображений). Обозначим $\mathcal{F}_+ = \{s \in \mathcal{F} : 0 < \mathbf{P}(s) < 1\}$ — множество $\mathcal{F}$-измеримых событий, имеющих ненулевую неединичную вероятность. Пусть $\Omega^{\mathcal{F}} = \{f_s : \ s \in \mathcal{F}_+\}$ — *множество всех у|отображений* $\mathcal{F}$-измеримых событий $s \subseteq \Omega$, имеющих ненулевую вероятность, на $\Omega$. Так как у|отображения взаимно однозначны, то для каждого $f_s \in \Omega^{\mathcal{F}}$ существует обратное ему у|отображение $f_s^{-1} : \Omega \to s$. Взятые вместе они образуют $\mathcal{F}^{\Omega} = \{f_s^{-1} : s \in \mathcal{F}_+\}$ — *множество всех обратных у|отображений.* Суперпозиция $s \xrightarrow{f_s} \Omega \xrightarrow{f_{s'}^{-1}} s'$ у|отображения $f_s$ и обратного у|отображения $f_{s'}^{-1}$ — это взаимно-однозначное отображение $f_{s'}^{-1} f_s : s \to s'$ события $s \in \mathcal{F}_+$ на событие $s' \in \mathcal{F}_+$, которые, взятые вместе, образуют $\mathcal{F}^{\mathcal{F}} = \{f_{s'}^{-1} f_s : \ s \in \mathcal{F}_+, \ s' \in \mathcal{F}_+\}$ — *множество всех* $(s, s')$-*у|отображений.* Для любых $s \in \mathcal{F}_+$ и $s' \in \mathcal{F}_+$ суперпозиция

$$\Omega \xrightarrow{f_s^{-1}} s \xrightarrow{f_{s'}^{-1} f_s} s' \xrightarrow{f_{s'}} \Omega$$

обратного у|отображения $f_s^{-1}$, $(s, s')$-у|отображения $f_{s'}^{-1} f_s$ и у|отображения $f_{s'}$ — это, очевидно, всегда *тождественное отображение*

$$f_{s'} f_{s'}^{-1} f_s f_s^{-1} : \Omega \to \Omega$$

пространства э-событий $\Omega$ на себя.

Подводя итог, заметим, что множество у|отображений $\Omega^{\mathcal{F}}$ *полностью определяет* и множество обратных у|отображений $\mathcal{F}^{\Omega}$, и множество $(s, s')$-у|отображений $\mathcal{F}^{\mathcal{F}}$. В дальнейшем вместе с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ всегда считается заданным множество у|отображений $\Omega^{\mathcal{F}}$.

Определение (эвентологическое измеримое пространство). Измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ вместе с множеством у|отображений $\Omega^{\mathcal{F}}$, т.е. тройка $\left(\Omega, \mathcal{F}, \Omega^{\mathcal{F}}\right)$ называется *эвентологическим измеримым пространством.*

Определение (эвентологическое пространство). Эвентологическое измеримое пространство с вероятностной мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \Omega^{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$ называется *эвентологическим пространством (Э-пространством).*

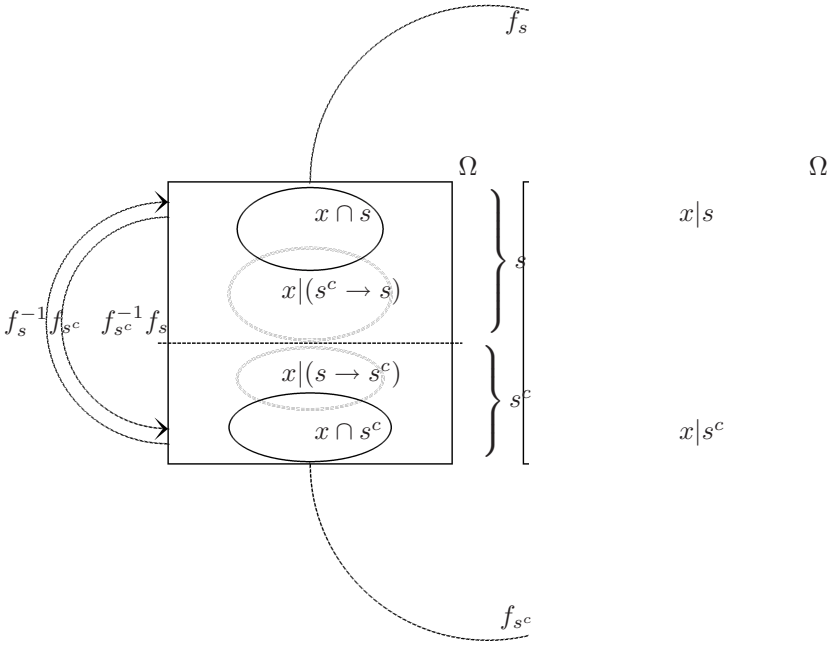



Рис. 6.2. Эвентологическая схема определения у|событий

Замечание 3 (об исполнении событием роли $\Omega$ и ролей других событий). Определение у|отображения события $s$ — это попытка эвентологически описать *то, что «происходит» с событиями* в рамках классической схемы условной вероятности событий при условии, что наступает событие $s$, имеющее ненулевую вероятность $\mathbf{P}(s) > 0$. Теория вероятностей предлагает условную схему, в которой *«событие $s$ играет роль $\Omega$»*. У|отображение $f_s : s \to \Omega$ — это всего лишь детальная разработка роли $\Omega$, доверенной «рядовому» измеримому событию $s \subseteq \Omega$. Пока[8] подразумевается «самая подробная» детализация: «с точностью до э-события» $\omega \in \Omega$. Так что, например,

$$t \subseteq s \quad \Rightarrow \quad f_s(t) = \{f_s(\omega) : \omega \in t\} \subseteq \Omega,$$

[8] До тех пор, пока не берется во внимание *террасное восприятие (террасное приближение, террасная аппроксимация)* событий разумом.

$$t \subseteq \Omega \quad \Rightarrow \quad f_s^{-1}(t) = \{f_s^{-1}(\omega) : \omega \in t\} \subseteq s$$

для измеримого события $t \in \mathcal{F}$.

Для каждого события $s \in \mathcal{F}_+$ и любого другого события $s' \in \mathcal{F}_+$ определено $(s, s')$-у|отображение $f_{s'}^{-1} f_s \in \mathcal{F}^{\mathcal{F}}$, которое позволяет детально разработать *«исполнение событием $s$ роли события $s'$»*.

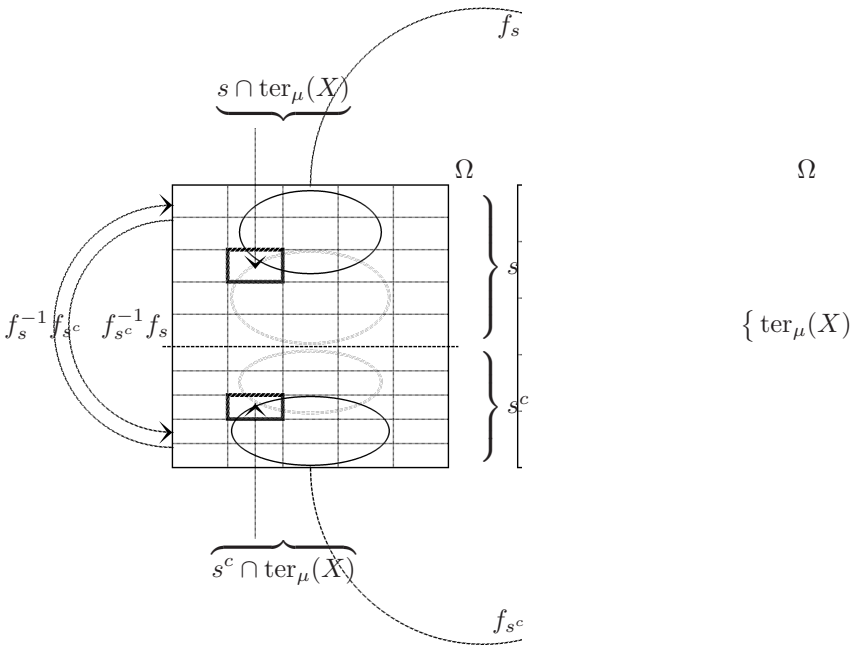



Рис. 6.3. Эвентологическая схема $\mu$-восприятия у|отображений

Замечание 4 (о террасном восприятии $\Omega$-бытия). События вместе со своими вероятностями возникают там и тогда, где и когда возникает разум. Где и когда наступление событий не наблюдается никаким разумом, там и тогда событий со своими вероятностями не существует. На этот скорее философский, чем эвентологический вопрос мы не собираемся отвечать исчерпывающим образом. Вполне может оказаться, например, что любые события всегда наблюдаются всеобщим разумом при помощи каких-то индивидуальных разумов или же какие-то события выпадают из поля зрения разума. Рассмотреть

мыслимые возможности любопытно, но пока нас интересует другое: каким образом индивидуальный разум *воспринимает* наблюдаемое им событие?

Разум — это череда событий. Череда событий, характеризующая индивидуальный разум $\mu \in \mathfrak{M}$, его *собственное множество событий*, определяется как $\mathfrak{X}$-нечеткое событие $\breve{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$. Предполагается, что оно конечно, хотя, может быть, и весьма обширно. Поскольку никакими другими «инструментами» восприятия наблюдаемых событий, кроме событий, накопленных в $\breve{\mu}$, индивидуальный разум $\mu$ не обладает, то его восприятие событий может и должно быть описано не просто на языке событий, т.е. на эвентологическом языке, а *только на языке событий из* $\breve{\mu}$. «Язык событий из $\breve{\mu}$», хотя и относительно велик, но эвентологически довольно однообразен: он состоит «всего лишь» из событий-террасок, порождаемых собственным множеством событий $\breve{\mu}$:

$$\mathrm{ter}_\mu(X) = \bigcap_{x \in X} x_\mu \bigcap_{x \in X^c} x_\mu^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

В силу конечности «языка событий из $\breve{\mu}$» индивидуальный разум $\mu \in \mathfrak{M}$ не способен во всех мельчайших деталях $\omega \in \Omega$ воспринимать $\Omega$-бытие. Поэтому $\mu$ воспринимает $\Omega$-бытие приближенно с так называемой *«террасной точностью»*, которую ему позволяет разрешающая способность «языка событий из $\breve{\mu}$». Иначе говоря, *восприятие индивидуальным разумом* $\mu \in \mathfrak{M}$ *всего* $\Omega$*-бытия (*$\mu$*-восприятие* $\Omega$*-бытия)* всегда ограничено его собственными событиями-террасками: $\mu$ не способен отличить одно э-событие $\omega \in \Omega$ от другого $\omega' \in \Omega$, когда они «попадают» в одно и то же событие-терраску $\mathrm{ter}_\mu(X)$. Можно сказать, что $\Omega$-бытие индивидуальным разумом $\mu$ воспринимается как *конечное пространство террасных э-событий*

$$\Omega_\mu = \{\mathrm{ter}_\mu(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\},$$

элементами которого служат события-терраски, порожденные собственным множеством событий $\breve{\mu}$. При наступлении э-события $\omega \in \Omega$ индивидуальный разум $\mu$, имея *ограниченную разрешающую эвентологическую способность*, вынужден считать, что наступает событие-терраска

$$\omega_\mu = \mathrm{ter}_\mu(X(\omega)) \subseteq \Omega,$$

где

$$X(\omega) = \{x \in \mathfrak{X} : \ \omega \in x_\mu\} \subseteq \mathfrak{X}$$

— подмножество имен тех событий из $\breve{\mu}$, которые наступают при наступлении $\omega$. Такое восприятие $\Omega$-бытия разумом $\mu$ называется *террасным $\mu$-восприятием*.

Замечание 5 (о террасном восприятии у|отображений). Террасный характер восприятия $\Omega$-бытия разумом $\mu$ распространяется и на его восприятие у|отображений в тех ситуациях, когда разуму требуется представить одно событие играющим роль другого события. Например, представить некоторое событие, имеющее ненулевую вероятность, играющим роль $\Omega$-бытия.

Множество событий $\breve{\mu}$ разбивает $\Omega$-бытие на собственные для разума $\mu$ события-терраски: $\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathrm{ter}_\mu(X)$. Теми же событиями-террасками множество событий $\breve{\mu}$ разбивает и событие $s \in \mathcal{F}_+$: $s = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} s \cap \mathrm{ter}_\mu(X)$, и его дополнение $s^c = \Omega - s \in \mathcal{F}_+$: $s^c = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} s^c \cap \mathrm{ter}_\mu(X)$. При этом каждое собственное событие-терраска $\mathrm{ter}_\mu(X)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ разбивается на два события:

$$\mathrm{ter}_\mu(X) = s \cap \mathrm{ter}_\mu(X) + s^c \cap \mathrm{ter}_\mu(X). \tag{1}$$

Данное разбиение порождает следующие террасные механизмы приближенного $\mu$-восприятия у|отображений:

$$f_s : s \cap \mathrm{ter}_\mu(X) \to \mathrm{ter}_\mu(X),$$

$$f_{s^c} : s^c \cap \mathrm{ter}_\mu(X) \to \mathrm{ter}_\mu(X),$$

$$f_{s^c}^{-1} f_s : s \cap \mathrm{ter}_\mu(X) \to s^c \cap \mathrm{ter}_\mu(X).$$

Определение 1 (у|событие). Пусть $s \in \mathcal{F}_+$ — событие с ненулевой вероятностью $\mathbf{P}(s) > 0$, а $x$ — произвольное $\mathcal{F}$-измеримое событие. *Условное событие (у|событие) $x|s$ при условии, что $s$ играет роль $\Omega$*, определяется как образ $x|s = f_s(x \cap s)$ события $x \cap s$ при *у|отображении* $f_s : s \to \Omega$. *Условное событие (у|событие) $x|s^c$* при условии, что $s^c$ играет роль $\Omega$, определяется как образ $x|s^c = f_{s^c}(x \cap s^c)$ события $x \cap s^c$ при *у|отображении* $f_{s^c} : s^c \to \Omega$. *Условное событие (у|событие) $x|(s \to s^c)$* при условии, что $s$ играет роль $s^c$, определяется как образ $x|(s \to s^c) = f_{s^c}^{-1} f_s(x \cap s)$ события $x \cap s$ при *у|отображении* $f_{s^c}^{-1} f_s : s \to s^c$. *Условное событие*

*(у|событие)* $x|(s^c \to s)$ при условии, что $s^c$ играет роль $s$, определяется как образ $x|(s^c \to s) = f_s^{-1} f_{s^c}(x \cap s^c)$ события $x \cap s^c$ при *у|отображении* $f_s^{-1} f_{s^c} : s^c \to s$.

Заметим, что $x|s$ и $x|s^c$ следует рассматривать как сокращенные обозначения для у|события $x$ при условии, что «$s \to \Omega$» — «событие $s$ играет роль $\Omega$»: $x|s = x|(s \to \Omega)$, и для у|события $x$ при условии, что «$s^c \to \Omega$» — «событие $s^c$ играет роль $\Omega$»: $x|s^c = x|(s^c \to \Omega)$.

Вероятности у|событий определяются следующими формулами:

$$\mathbf{P}(x|s) = \frac{\mathbf{P}(x \cap s)}{\mathbf{P}(s)}, \quad \mathbf{P}(x|s^c) = \frac{\mathbf{P}(x \cap s^c)}{\mathbf{P}(s^c)},$$

$$\mathbf{P}(x|(s \to s^c)) = \mathbf{P}(x \cap s)\frac{\mathbf{P}(s^c)}{\mathbf{P}(s)} = \mathbf{P}(x|s)\mathbf{P}(s^c),$$

$$\mathbf{P}(x|(s^c \to s)) = \mathbf{P}(x \cap s^c)\frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{P}(s^c)} = \mathbf{P}(x|s^c)\mathbf{P}(s).$$

Определение 2 (у|событие). Пусть $s \in \mathcal{F}_+$ и $s' \in \mathcal{F}_+$ — два события с ненулевыми вероятностями $\mathbf{P}(s) > 0$ и $\mathbf{P}(s') > 0$, а $x$ — произвольное $\mathcal{F}$-измеримое событие. *Условное событие (у|событие)* $x|(s \to s')$ *при условии, что* $s$ *играет роль* $s'$, определяется как образ

$$x|(s \to s') = f_{s'}^{-1} f_s(x \cap s)$$

события $x \cap s$ при $(s, s')-$*у|отображении* $f_{s'}^{-1} f_s : s \to s'$. Данное определение обобщает предыдущее.

## 6.8 Условные Э-распределения

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, множество избранных $\mathcal{F}$-измеримых событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, некоторое $\mathcal{F}$-измеримое событие $s \subseteq \Omega$, имеющее ненулевую неединичную вероятность: $0 < \mathbf{P}(s) < 1$, и два множества событий $\mathfrak{X}_s = \{x \cap s,\ x \in \mathfrak{X}\}$, $\mathfrak{X}_{s^c} = \{x \cap s^c,\ x \in \mathfrak{X}\}$, на которые событие $s$ *разбивает по Минковскому* множество событий $\mathfrak{X}$: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_s\ (+)\ \mathfrak{X}_{s^c} = \{x \cap s + x \cap s^c,\ x \in \mathfrak{X}\}$. Множество событий $\mathfrak{X}$ *разбивает* пространство э-событий $\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathrm{ter}(X)$ на события-терраски

$$\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Множества событий $\mathfrak{X}_s$ и $\mathfrak{X}_{s^c}$ также *разбивают*, хотя и каждое по своему, пространство э-событий

$$\Omega = \sum_{X\subseteq\mathfrak{X}} \mathrm{ter}_s(X), \quad \Omega = \sum_{X\subseteq\mathfrak{X}} \mathrm{ter}_{s^c}(X)$$

на *собственные события-терраски*

$$\mathrm{ter}_s(X) = \bigcap_{x\in X}(x\cap s)\bigcap_{x\in X^c}(x\cap s)^c,$$

$$\mathrm{ter}_{s^c}(X) = \bigcap_{x\in X}(x\cap s^c)\bigcap_{x\in X^c}(x\cap s^c)^c.$$

Поскольку все события из $\mathfrak{X}_s$ содержатся в событии $s$, а все события из $\mathfrak{X}_{s^c}$ — в его дополнении $s^c = \Omega - s$, то для любых $X \neq \emptyset$ и $Y \neq \emptyset$ — события-терраски попарно $\mathrm{ter}_s(X)$ и $\mathrm{ter}_{s^c}(Y)$ не пересекаются: $\mathrm{ter}_s(X)\cap\mathrm{ter}_{s^c}(Y) = \emptyset$. Поэтому

$$s\cap\mathrm{ter}(X) = \begin{cases}\mathrm{ter}_s(X), & X\neq\emptyset,\\ s\cap\mathrm{ter}_s(\emptyset), & X=\emptyset,\end{cases}$$

$$s^c\cap\mathrm{ter}(X) = \begin{cases}\mathrm{ter}_{s^c}(X), & X\neq\emptyset,\\ s^c\cap\mathrm{ter}_{s^c}(\emptyset), & X=\emptyset.\end{cases}$$

А отсюда[9]

$$\mathrm{ter}(X) = \begin{cases}\mathrm{ter}_s(X)+\mathrm{ter}_{s^c}(X), & X\neq\emptyset,\\ s\cap\mathrm{ter}_s(\emptyset)+s^c\cap\mathrm{ter}_{s^c}(\emptyset), & X=\emptyset.\end{cases} \tag{1}$$

Обозначим

$$\boldsymbol{p} = \{p(X),\ X\subseteq\mathfrak{X}\},$$

$$\boldsymbol{p}_s = \{p_s(X),\ X\subseteq\mathfrak{X}\}, \quad \boldsymbol{p}_{s^c} = \{p_{s^c}(X),\ X\subseteq\mathfrak{X}\}$$

— Э-распределения множеств событий $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_s$ и $\mathfrak{X}_{s^c}$ соответственно, где

$$p(X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X)),$$

[9] Любопытно, что $s\cap\mathrm{ter}_s(\emptyset)+s^c\cap\mathrm{ter}_{s^c}(\emptyset) = \mathrm{ter}_s(\emptyset)\cap\mathrm{ter}_{s^c}(\emptyset)$.

$$p_s(X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}_s(X)), \quad p_{s^c}(X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}_{s^c}(X)).$$

В силу (1)

$$p(X) = \begin{cases} p_s(X) + p_{s^c}(X), & X \neq \emptyset, \\ \mathbf{P}(s \cap \mathrm{ter}_s(\emptyset)) + \mathbf{P}(s^c \cap \mathrm{ter}_{s^c}(\emptyset)), & X = \emptyset. \end{cases} \tag{2}$$

Причем, очевидно, что

$$\mathbf{P}(s \cap \mathrm{ter}_s(\emptyset)) = \mathbf{P}(s) - \sum_{X \neq \emptyset} p_s(X),$$

$$\mathbf{P}(s^c \cap \mathrm{ter}_{s^c}(\emptyset)) = \mathbf{P}(s^c) - \sum_{X \neq \emptyset} p_{s^c}(X).$$

Определение. *Условное Э-распределение множества событий* $\mathfrak{X}$ *при условии, что наступило событие* $s \in \mathcal{F}$ определяется как набор вероятностей $\boldsymbol{p}_{|s} = \{p_{|s}(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$, где[10]

$$p_{|s}(X) = \begin{cases} \dfrac{p_s(X)}{\mathbf{P}(s)}, & X \neq \emptyset, \\ 1 - \dfrac{1 - p_s(\emptyset)}{\mathbf{P}(s)}, & X = \emptyset. \end{cases}$$

Очевидно, что $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{|s}\mathbf{P}(s) + \boldsymbol{p}_{|s^c}\mathbf{P}(s^c)$. Более того, если множество событий $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ образует разбиение $\Omega = \sum_{s \in \mathcal{S}} s$, то справедлива общая «формула полной вероятности»: $\boldsymbol{p} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \boldsymbol{p}_{|s}\mathbf{P}(s)$, позволяющая представить Э-распределение $\boldsymbol{p}$ в виде взвешенной суммы условных Э-распределений $\boldsymbol{p}_{|s}$ с весами, равными $\mathbf{P}(s)$ — вероятностям соответствующих событий из $\mathcal{S}$.

[10] Кстати, заметим, что $p_{|s}(\emptyset) = 1 - \frac{1-p_s(\emptyset)}{\mathbf{P}(s)} = \frac{p_s(\emptyset) - \mathbf{P}(s^c)}{\mathbf{P}(s)}$.

## 6.9 Эвентологическая теорема Байеса

Теорема Байеса[11] на практике применяется часто, например, в диагностике, а также в других областях, где имеется множество $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ взаимоисключающих *событий-гипотез* и требуется определить, как меняются вероятности этих событий-гипотез при условии, что произошло некоторое *событие-обстоятельство* $x \in \mathfrak{X}$. Формулы Байеса для условных вероятностей событий-гипотез $s \in \mathcal{S}$ имеют вид:

$$\mathbf{P}(s \mid x) = \frac{\mathbf{P}(x \mid s)\mathbf{P}(s)}{\mathbf{P}(x)},$$

где

$$\mathbf{P}(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbf{P}(x \mid s)\mathbf{P}(s),$$

хотя наиболее популярна запись:

$$\mathbf{P}(s \mid x) = \frac{\mathbf{P}(x \mid s)\mathbf{P}(s)}{\sum\limits_{s \in \mathcal{S}} \mathbf{P}(x \mid s)\mathbf{P}(s)}, \quad s \in \mathcal{S}.$$

### 6.9.1 Эвентологические «террасные формулировки» теоремы Байеса

Эвентологическая теория позволяет «переформулировать» теорему Байеса в существенно[12] более общей форме, во-первых, сняв несущественное и чисто техническое требование *взаимоисключаемости* и предположив, что множество событий-гипотез $\mathcal{S}$ имеет произвольную структуру, и во-вторых, заменив одно событие-обстоятельство $x \in \mathfrak{X}$ всем множеством событий-обстоятельств $\mathfrak{X}$.

[11] *Байес (Бейес), Томас (Bayes, Thomas, 1702–1761)* — английский священник и математик, член Лондонского королевского общества. Поставил и решил одну из основных задач элементарной теории вероятностей (теорема Байеса, 1763). Статью Байеса [103] послал в Королевское общество его друг *Ричард Прайс (Richard Price)* в 1763. *Пьер Симон Лаплас (Laplace Pierre Simon, 1749–1827)*, заново переформулировав теорию Байеса, спас ее от забвения и дал новую жизнь.

[12] С эвентологической точки зрения, разумеется, поскольку предлагаемые террасные формулировки теоремы Байеса непосредственно вводят в формулы произвольную структуру зависимости множества событий, о которых идет речь.

***Первая террасная формулировка.*** Множество событий-гипотез $\mathcal{S}$ разбивает $\Omega$ на взаимоисключающие события-терраски

$$\mathrm{ter}(S) = \bigcap_{s\in S} s \bigcap_{s\in S^c} s^c, \quad S \subseteq \mathcal{S},$$

где $s^c = \Omega - s$, $S^c = \mathcal{S} - S$, и формулы Байеса принимают более общий *террасный вид*:

$$\mathbf{P}(\mathrm{ter}(S) \mid x) = \frac{\mathbf{P}(x \mid \mathrm{ter}(S))\mathbf{P}(\mathrm{ter}(S))}{\mathbf{P}(x)}, \quad S \subseteq \mathcal{S}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{P}(x) = \sum_{S\subseteq\mathcal{S}} \mathbf{P}(x \mid \mathrm{ter}(S))\mathbf{P}(\mathrm{ter}(S)),$$

и оказывается возможным записать их в виде формул

$$p_{|x}(S) = \frac{\mathbf{P}(x \mid \mathrm{ter}(S))}{\mathbf{P}(x)}\ p(S), \quad S \subseteq \mathcal{S},$$

где

$$\mathbf{P}(x) = \sum_{S\subseteq\mathcal{S}} \mathbf{P}(x \mid \mathrm{ter}(S))\ p(S),$$

связывающих Э-распределение $\boldsymbol{p} = \{p(S),\ S \subseteq \mathcal{S}\}$ множества событий-гипотез $\mathcal{S}$ с условным Э-распределением $\boldsymbol{p}_{|x} = \{p_{|x}(S),\ S \subseteq \mathcal{S}\}$ множества событий-гипотез $\mathcal{S}$ при условии наступления события-обстоятельства $x \in \mathfrak{X}$.

***Вторая террасная формулировка.*** Если вместо одного события-обстоятельства взять все множество событий-обстоятельств $\mathfrak{X}$, то каждая террасная формула Байеса вида (1) для $S \subseteq \mathcal{S}$ «превратится» во множество террасных формул:

$$p_{|\,\mathrm{ter}(X)}(S) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{ter}(X) \mid \mathrm{ter}(S))}{p^*(X)}\ p(S), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \tag{2}$$

где

$$p^*(X) = \sum_{S\subseteq\mathcal{S}} \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X) \mid \mathrm{ter}(S))\ p(S),$$

связывающих Э-распределение $\boldsymbol{p}^* = \{p^*(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ множества событий-обстоятельств $\mathfrak{X}$ с условными Э-распределениями $\boldsymbol{p}_{|\,\mathrm{ter}(X)} = \{\boldsymbol{p}_{|\,\mathrm{ter}(X)}(S),\ S \subseteq \mathcal{S}\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X}$ множества событий-гипотез $\mathcal{S}$ при условии наступления события-терраски $\mathrm{ter}(X)$, порожденного множеством событий-обстоятельств $\mathfrak{X}$.

## 6.10 Эвентологическая регрессия

Эвентологическая регрессия одного множества титульных событий $\mathfrak{X}$ на другое множество титульных событий $\mathcal{Y}$ — это зависимость $\varphi$, связывающая безымянные события-террраски $\mathrm{ter}(X)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, с безымянными событиями-террасками $\mathrm{ter}(Y), Y \subseteq \mathcal{Y}$:

$$\mathrm{ter}(Y) = \varphi(\mathrm{ter}(Y)), \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Поскольку собственных имен у событий-террасок нет, и разумный субъект имеет к ним лишь косвенный «доступ» через логические комбинации собственных имен титульных событий, которые их порождают, то роль собственных имен для событий-террасок $\mathrm{ter}(X)$ исполняют подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$ титульных событий[13], которыми события-террраски занумерованы. Таким образом, для разумного субъекта безымянное событие-терраска

$$\mathrm{ter}(X)$$

«скрывается» за подмножеством титульных событий

$$X \subseteq \mathfrak{X},$$

а зависимость $\varphi$ между безымянными событиями-террасками

$$\mathrm{ter}(Y) = \varphi(\mathrm{ter}(X))$$

«скрывается» за зависимостью между соответствующими подмножествами титульных событий:

$$Y = \varphi(X).$$

При фиксированной метрике $\rho$ на $2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ *функция теоретической эвентологической регрессии* определяется способом, вполне аналогичным классическому:

$$\mathbf{E}\rho(Y, \varphi(X)) \to \min_{\varphi}.$$

[13] Иначе говоря, — подмножества собственных имен, соответствующие подмножествам титульных событий.

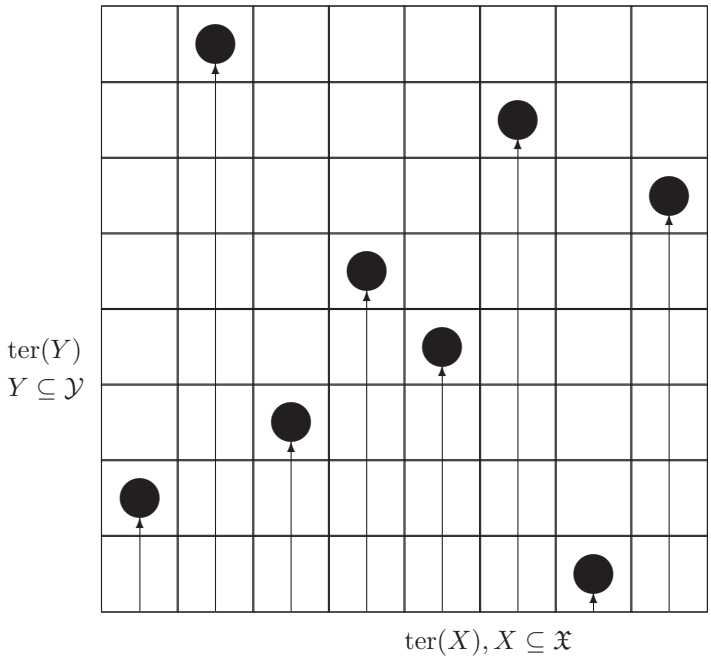



Рис. 6.4. Диаграмма Венна совместного Э-распределения множества событий $\mathfrak{X} + \mathcal{Y}$. Вертикальные прямоугольники — события-терраски $\mathrm{ter}(X), X \subseteq \mathfrak{X}$, горизонтальные — события-терраски $\mathrm{ter}(Y), Y \subseteq \mathcal{Y}$; темными кружками показан «Э-график» функции теоретической эвентологической регрессии: $Y = \varphi(X)$.

Если

$$\rho(Y, \varphi(X)) = \rho_\alpha(Y, \varphi(X)),$$

то функция теоретической эвентологической регрессии имеет вид

$$\varphi(X) = \mathrm{Q}_\alpha(Y|\mathrm{ter}(X))$$

— условного эвентологического сет-квантиля порядка $\alpha$, где

$$\mathrm{Q}_\alpha(Y|\mathrm{ter}(X)) = \{y : \mathbf{P}(y|\mathrm{ter}(X)) \geq \alpha\}$$

— подмножества титульных событий $y \in \mathcal{Y}$, условные вероятности

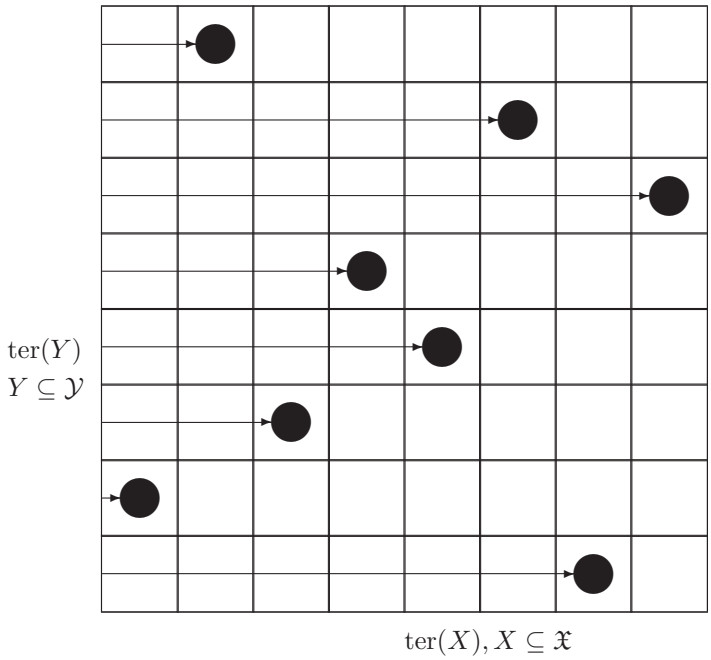



Рис. 6.5. Диаграмма Венна совместного Э-распределения множества событий $\mathfrak{X} + \mathcal{Y}$. Вертикальные прямоугольники — события-терраски $\mathrm{ter}(X), X \subseteq \mathfrak{X}$, горизонтальные — события-терраски $\mathrm{ter}(Y), Y \subseteq \mathcal{Y}$; темными кружками показан «Э-график» функции теоретической эвентологической регрессии: $\psi(Y) = X$.

которых не меньше $\alpha$. В этих обозначениях

$$\mathrm{ter}(\mathrm{Q}_\alpha(Y|\mathrm{ter}(X))) = \varphi(\mathrm{ter}(X)).$$

Аналогичным образом при фиксированной метрике $\rho$ на $2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ определяется еще одна *функция теоретической эвентологической регрессии*:

$$\mathbf{E}\rho(\psi(Y), X) \to \min_{\psi},$$

описывающая *зависимость* $\psi$ между безымянными событиями-террас-

ками вида

$$\psi(\mathrm{ter}(Y)) = \mathrm{ter}(X)$$

а также дуальным образом — *зависимость* между соответствующими подмножествами титульных событий:

$$\psi(Y) = X.$$

### 6.10.1 Некоторые вопросы по эвентологической регрессии

- При каких условиях две функции Э-регрессии

  $$\varphi : 2^{\mathfrak{X}} \to 2^{\mathcal{Y}},$$

  и

  $$\psi : 2^{\mathcal{Y}} \to 2^{\mathfrak{X}}$$

  взаимно обратны: $\psi = \varphi^{-1},\ \varphi = \psi^{-1}$ ? Иначе говоря,

  $$\psi(\varphi(X)) = X, \quad X \subseteq \mathfrak{X}$$

  или

  $$Y = \varphi(\psi(Y)), \quad Y \subseteq \mathcal{Y}.$$

- Какой характер зависимости определяется условием взаимной обратности двух функций теоретической эвентологической регрессии: $\psi = \varphi^{-1}$ ?

- Можно ли определить некий новый тип зависимости условием: $\psi = \varphi^{-1}$ ?

- Для каких параметров $\alpha \in [0, 1]$ возможно корректно определить типы $\alpha$-зависимости условием: $\psi_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}$ ?

### 6.10.2 Эвентологическое регрессионное отношение

Пусть

$$p(X, Y) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X) \cap \mathrm{ter}(Y)), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, Y \subseteq \mathcal{Y},$$

— совместное Э-распределение двух множеств титульных событий $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$.

*Эвентологическим регрессионным отношением порядка* $\alpha \in [0,1]$ двух множеств титульных событий $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ называется безымянное событие

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{X},\mathcal{Y}) = \bigcup_{X,Y:p(X,Y)\geq\alpha} (\mathrm{ter}(X)\cap\mathrm{ter}(Y)) \subseteq \Omega,$$

составленное из пересечений безымянных событий-террасок, порожденных множествами $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, с вероятностями пересечений, не меньшими $\alpha$.

Эвентологическое регрессионное отношение определяет два класса своих проекций — на подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathcal{Y}|X) = \bigcup_{Y:p(Y|X)\geq\alpha} (\mathrm{ter}(X)\cap\mathrm{ter}(Y)) \subseteq \Omega, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

и на подмножества $Y \subseteq \mathcal{Y}$:

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{X}|Y) = \bigcup_{X:p(X|Y)\geq\alpha} (\mathrm{ter}(X)\cap\mathrm{ter}(Y)) \subseteq \Omega, \quad Y \subseteq \mathcal{Y}.$$

Можно определить два семейства эвентологических регрессионных отношений условиями:

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{X},\mathcal{Y}) = \bigcup_{X\subseteq\mathfrak{X}} \mathfrak{R}_\alpha(\mathcal{Y}|X),$$

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{X},\mathcal{Y}) = \bigcup_{Y\subseteq\mathcal{Y}} \mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{X}|Y),$$

и третье семейство, для которого выполнено оба условия.

## 6.11 Заключение

Тема затронутая в главе пока представляется безграничной, то, что изложено, — всего лишь краткое введение в эту фундаментальную область эвентологии, где изучаются структуры статистических и сетфункциональных зависимостей между множествами событий. Эвентологический анализ зависимости событий продолжается в последующих главах при рассмотрении теоретических и прикладных задач.

# Глава 7
# ПАРУС И ВЕТЕР ФРЕШЕ

Предлагается многомерное обобщение неравенств Фреше для вероятности пересечения событий и для арной ковариации множества событий. Вводится новое понятие арной корреляции Фреше случайных событий, определяемое как арная ковариация, нормированная границами Фреше. Обсуждаются понятия паруса и ветра Фреше [29] и приводятся абсолютные неравенства для арной ковариации множества событий.

## 7.1 Введение

Рассматривается скорее всего ранее не встречавшаяся в литературе нормированная мера взаимозависимости случайных событий, значения которой не выходят за пределы интервала $[-1, 1]$ и достигают его границ всякий раз, когда ковариация событий достигает наиболее или наименее возможного для неё значения среди всех значений, разрешенных данными вероятностями этих событий. Предлагается назвать эту меру *арной корреляцией Фреше*[1], поскольку в основу её определения положены неравенства, ограничивающие снизу и сверху вероятность пересечения произвольного множества событий, которые очевидным образом обобщают известные *неравенства Фреше* для вероятности пересечения двух событий.

[1] *Фреше, Морис Рене (Fréchet, Maurice René, 1878–1973)* — французский математик, основные труды по топологии и функциональному анализу. Ввел современные понятия метрического пространства, компактности, полноты и др. Работал также в области теории вероятностей.

## 7.2 Неравенства Фреше для вероятности пересечения событий

*Неравенства Фреше* скорее известны [140] как неравенства для функции распределения $F(u,v),\ u,v\in\mathbf{R}$, двумерного случайного вектора $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$:

$$\max\Big\{0,\ F_1(u)+F_2(v)-1\Big\}\le F(u,v)\le\min\Big\{F_1(u),\ F_2(v)\Big\},\qquad(1)$$

ограничивающие её сверху и снизу так называемыми *границами Фреше*, которые выражаются через индивидуальные функции распределения: $F_1(x)$ и $F_2(y)$ компонент случайного вектора — случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$ соответственно.

В основе неравенств Фреше (1) лежат более фундаментальные неравенства для вероятности пересечения двух событий $x$ и $y$ из алгебры некоторого вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$:

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1\Big\}\le\mathbf{P}(x\cap y)\le\min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y)\Big\},\quad x,\ y\in\mathcal{F}.\qquad(0)$$

Эквивалентность этих двух видов неравенств Фреше сразу следует из определения функции распределения, если в качестве событий $x$ и $y$ взять события вида $x=\Big\{\xi_1<u\Big\},\quad y=\Big\{\xi_2<v\Big\}$. Правое неравенство в (0) совершенно очевидно, а левое следует из того, что

$$\mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1\le\mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-\mathbf{P}(x\cup y)=\mathbf{P}(x\cap y).$$

## 7.3 Неравенства Фреше для ковариации событий

Поскольку *парная ковариация* событий $x$ и $y$ из алгебры $\mathcal{F}$ определяется как величина $\mathsf{Kov}_{xy}=\mathbf{P}(x\cap y)-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$, которая выражается через вероятность их пересечения и индивидуальные вероятности, то неравенства Фреше для вероятности пересечения событий влекут аналогичные неравенства для ковариации:

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x)+\mathbf{P}(y)-1\Big\}-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)\le\mathsf{Kov}_{xy}\le$$
$$\le\min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y)\Big\}-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y).\qquad(2')$$

Простые[2] преобразования позволяют получить из (2') более симметричный вид:

$$-\min\Big\{\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),\ \mathbf{P}(x^c)\mathbf{P}(y^c)\Big\} \le \mathsf{Kov}_{xy} \le$$

$$\le \min\Big\{\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y^c),\ \mathbf{P}(x^c)\mathbf{P}(y)\Big\}. \qquad (2)$$

## 7.4 Неравенства Фреше для вероятности пересечения множества событий

Рассмотрим три события $x$, $y$ и $z$ из алгебры $\mathcal{F}$ и попытаемся найти правую и левую границу Фреше для вероятности их тройного пересечения $\mathbf{P}(x \cap y \cap z)$. Вид правой границы Фреше очевиден, поскольку:

$$\mathbf{P}(x \cap y \cap z) \le \min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y),\ \mathbf{P}(z)\Big\},$$

а левая граница Фреше на основании неравенства (0) для двух событий $x \cap y$ и $z$ может быть записана в виде:

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x \cap y) + \mathbf{P}(z) - 1\Big\} \le \mathbf{P}(x \cap y \cap z).$$

Применяя ещё раз к вероятности пересечения $\mathbf{P}(x \cap y)$ неравенство (0), получим

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x \cap y) + \mathbf{P}(z) - 1\Big\} \ge$$

$$\ge \max\Big\{0,\ \max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) - 1\Big\} + \mathbf{P}(z) - 1\Big\} =$$

$$= \max\Big\{0,\ \max\Big\{\mathbf{P}(z) - 1,\ \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) + \mathbf{P}(z) - 2\Big\}\Big\} =$$

$$= \max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) + \mathbf{P}(z) - 2\Big\},$$

где последний переход объясняется тем, что всегда $\mathbf{P}(z) - 1 \le 0$. Таким образом, неравенства Фреше для вероятности пересечения трёх событий имеют вид

$$\max\Big\{0,\ \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) + \mathbf{P}(z) - 2\Big\} \le \mathbf{P}(x \cap y \cap z) \le$$

[2] Если преобразования справа очевидны, то преобразования слева следуют из очевидного тождества: $\mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y) - 1 - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) \equiv -\mathbf{P}(x^c)\mathbf{P}(y^c)$.

$$\leq \min\Big\{\mathbf{P}(x),\ \mathbf{P}(y),\ \mathbf{P}(z)\Big\}, \tag{3}$$

на основании которого можно сделать предположение о виде неравенств Фреше для вероятности пересечения произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$:

$$\max\left\{0,\ \sum_{x\in X}\mathbf{P}(x) - |X| + 1\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) \leq \min_{x\in X}\mathbf{P}(x), \tag{4}$$

чтобы доказать их индукцией по мощности $|X|$ множества событий $X$.

Не будем делать полагающегося здесь индукционного перехода, а заменим его одним замечанием, которое хотя и не доказывает неравенства Фреше для вероятности пересечения множества событий, но делает их ещё более правдоподобными.

Во-первых, левая граница Фреше в неравенстве, которое превращается в равенство для вероятности «пересечения одного события», имеет очевидный вид

$$\max\Big\{0,\ 1 - \mathbf{P}(x^c)\Big\} = 1 - \mathbf{P}(x^c) = \mathbf{P}(x). \tag{5}$$

Во-вторых, заметим, что левые границы Фреше в (2) и (3) можно переписать в эквивалентных видах

$$\max\{0,\ 1 - \mathbf{P}(x^c) - \mathbf{P}(y^c)\} \leq \mathbf{P}(x \cap y), \tag{6}$$

$$\max\{0,\ 1 - \mathbf{P}(x^c) - \mathbf{P}(y^c) - \mathbf{P}(z^c)\} \leq \mathbf{P}(x \cap y \cap z). \tag{7}$$

Учитывая (5), (6) и (7), легко предположить, что для вероятности пересечения произвольного множества событий левая граница имеет вид

$$\max\left\{0,\ 1 - \sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c)\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right), \tag{8′}$$

который эквивалентен виду левой границы в (4), поскольку

$$1 - \sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c) = \sum_{x\in X}\mathbf{P}(x) - |X| + 1.$$

Таким образом, неравенства Фреше (4) для вероятности пересечения произвольного множества событий можно записать ещё и в виде:

$$\max\left\{0,\ 1-\sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c)\right\}\le\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X}x\right)\le\min_{x\in X}\mathbf{P}(x),\quad X\subseteq\mathcal{F}.\qquad(8)$$

## 7.5 Неравенства Фреше для вероятности объединения событий

Неравенствам Фреше (8) для вероятности пересечения произвольного множества событий очевидным образом соответствуют неравенства Фреше для вероятности объединения произвольного множества событий $X\subseteq\mathcal{F}$:

$$\max_{x\in X}\mathbf{P}(x)\le\mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X}x\right)\le\min\left\{1,\ \sum_{x\in X}\mathbf{P}(x)\right\},\qquad(8'')$$

которые мгновенно получаются из (8), если воспользоваться известным теоретико-множественным соотношением

$$\bigcap_{x\in X}x^c=\left(\bigcup_{x\in X}x\right)^c.$$

## 7.6 Неравенства Фреше для арной ковариации

*Арная ковариация* множества событий $X\subseteq\mathcal{F}$ определяется как величина

$$\mathsf{Kov}_X=\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X}x\right)-\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x).$$

Из (8) получаем неравенства Фреше для арной ковариации произвольного множества событий $X\subseteq\mathcal{F}$:

$$\max\left\{-\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x),\ 1-\sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c)-\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)\right\}\le\mathsf{Kov}_X\le$$

$$\le\min_{x\in X}\mathbf{P}(x)-\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x),\qquad(9')$$

которые запишем окончательно так:

$$-\min\left\{\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x),\ \prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)+\sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c)-1\right\}\le$$

$$\le \mathsf{Kov}_X \le \min_{x\in X}\mathbf{P}(x)-\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x). \tag{9}$$

Введем обозначения

$$F_X^- = \min\left\{\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x),\ \prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)+\sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c)-1\right\},$$

$$\min_{x\in X}\mathbf{P}(x)-\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)=F_X^+,$$

в которых неравенство (9) перепишется в виде

$$-F_X^- \le \mathsf{Kov}_X \le F_X^+. \tag{9''}$$

Назовем $-F_X^-$ *левой*, а $F_X^+$ — *правой границей Фреше* для ковариации произвольного множества событий $X\subseteq\mathcal{F}$.

## 7.7 Арная корреляция Фреше случайных событий

Определим *арную корреляцию Фреше* произвольного множества событий $X\subseteq\mathcal{F}$ как величину

$$\mathsf{Kor}_X=\begin{cases}\mathsf{Kov}_X/F_X^+, & \mathsf{Kov}_X\ge 0,\\ \mathsf{Kov}_X/F_X^-, & \mathsf{Kov}_X\le 0.\end{cases}$$

Свойство 1. Отметим, что арная корреляция Фреше произвольного множества событий $X\subseteq\mathcal{F}$ всегда лежит в интервале $[-1,1]$:

$$-1\le \mathsf{Kor}_X\le 1$$

в силу неравенств Фреше и своего определения.

Свойство 2. Кроме того, $\mathsf{Kor}_X=0$ всякий раз, когда множество событий $X$ арно независимо.

Свойство 3. Если $X$ состоит из двух событий $x$ и $y$, то

$$\mathsf{Kor}_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{когда } x \subseteq y \text{ или } y \subseteq x, \\ -1, & \text{когда } x \cap y = \emptyset. \end{cases}$$

Если $\mathbf{P}(z) = 0 \iff z = \emptyset$ для любого события $z \in \mathcal{F}$, то верны обратные утверждения:

$$\mathsf{Kor}_{xy} = 1 \implies x \subseteq y \text{ или } y \subseteq x,$$

$$\mathsf{Kor}_{xy} = -1 \implies x \cap y = \emptyset.$$

Свойство 4 (необходимое и достаточное условие максимума арной корреляции Фреше).

$$\mathsf{Kor}_X = 1 \quad \iff \quad \left( \bigcap_{x \in X} x \right) \in X.$$

Свойство 5 (необходимое и достаточное условие минимума арной корреляции Фреше).

$$\mathsf{Kor}_X = -1 \quad \iff \quad \begin{cases} \bigcap\limits_{x \in X} x = \emptyset, & \text{если } \sum\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) \geq 1, \\ \bigcap\limits_{x \in X} x = \Omega \setminus \sum\limits_{x \in X} x^c, & \text{если } \sum\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) < 1. \end{cases}$$

## 7.8 Симплекс распределений двух событий и его проекция на плоскость

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и два события $x$ и $y$ из его алгебры $\mathcal{F}$. *Распределением вероятностей* двух событий $x, y \in \mathcal{F}$, как известно [3], называется четверка вероятностей:

$$\Big( \mathbf{P}(x^c \cap y^c), \quad \mathbf{P}(x \cap y^c), \quad \mathbf{P}(x^c \cap y), \quad \mathbf{P}(x \cap y) \Big). \tag{1}$$

Под *симплексом вероятностных распределений* двух событий понимается множество всех вероятностных распределений двух событий,

изоморфное трехмерному симплексу $\$_3$ в четырехмерном пространстве $\mathbf{R}^4$, вершины которого соответствуют вырожденным распределениям:

$$(1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1).$$

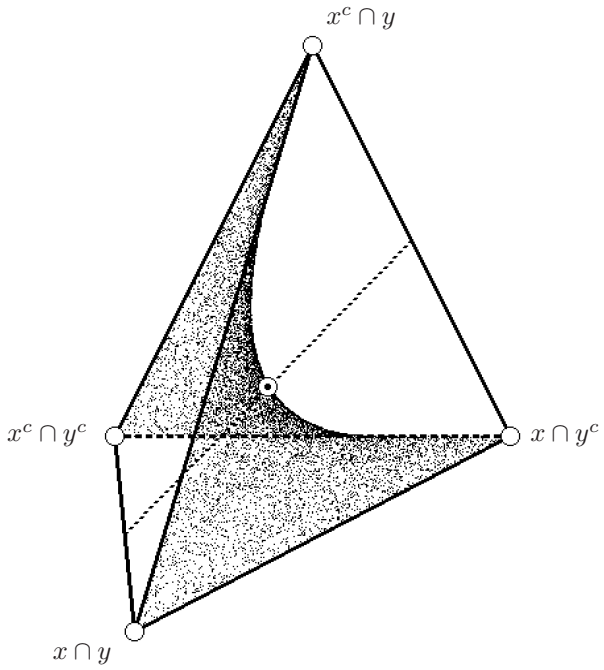



Рис. 7.1. Проекция симплекса Э-распределений двух событий $x$ и $y$ из $\mathbf{R}^4$ на плоскость. Седлообразная поверхность — образ подмножества независимо-точечных Э-распределений (*парус Фреше*); пунктирный отрезок — *ветер Фреше*. Точка $\odot$ в центре симплекса соответствует равномерному Э-распределению двух событий $\{1/4, 1/4, 1/4, 1/4\}$.

Для независимых событий $x$ и $y$ вероятностное распределение определяется двумя параметрами, например их индивидуальными вероятностями $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$:

$$\mathbf{P}(x^c \cap y^c) = (1-\mathbf{P}(x))(1-\mathbf{P}(y)), \quad \mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),$$
$$\mathbf{P}(x \cap y^c) = \mathbf{P}(x)(1-\mathbf{P}(y)), \quad \mathbf{P}(x^c \cap y) = (1-\mathbf{P}(x))\mathbf{P}(y).$$

Множество всех вероятностных распределений двух независимых событий — это двумерное подмножество симплекса $\$_3$, которое имеет седлообразную форму (рис. 1).

Для произвольных событий $x$ и $y$ вероятностное распределение определяется тремя параметрами, например их индивидуальными вероятностями $\mathbf{P}(x)$ и $\mathbf{P}(y)$ и ковариацией $\mathsf{Kov}_{xy}$:

$$\mathbf{P}(x^c\cap y^c) = (1-\mathbf{P}(x))(1-\mathbf{P}(y))+\mathsf{Kov}_{xy}, \quad \mathbf{P}(x\cap y) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)+\mathsf{Kov}_{xy},$$

$$\mathbf{P}(x\cap y^c) = \mathbf{P}(x)(1-\mathbf{P}(y))-\mathsf{Kov}_{xy}, \quad \mathbf{P}(x^c\cap y) = (1-\mathbf{P}(x))\mathbf{P}(y)-\mathsf{Kov}_{xy}\,.$$

На рис. 7.1 событием $x^c \cap y^c$ обозначена вершина $(1,0,0,0) \in \mathbf{R}^4$, соответствующая вырожденному Э-распределению $\mathbf{P}(x^c \cap y^c) = 1$, событием $x \cap y^c$ — вершина $(0,1,0,0) \in \mathbf{R}^4$, событием $x^c \cap y$ — вершина $(0,0,1,0) \in \mathbf{R}^4$, событием $x \cap y$ — вершина $(0,0,0,1) \in \mathbf{R}^4$. Седлообразная поверхность в симплексе — образ множества Э-распределений независимых событий — *парус Фреше*, соответствующий нулевой корреляции Фреше. Точка $\odot$ в центре симплекса соответствует равномерному Э-распределению $(1/4,1/4,1/4,1/4) \in \mathbf{R}^4$. *Ветру Фреше* при фиксированных индивидуальных вероятностях $\mathbf{P}(x) = 1/2,\ \mathbf{P}(y) = 1/2$ соответствует отрезок, показанный тонким пунктиром, проходящим через центр симплекса.

## 7.9 Распределения двух событий с заданной парной корреляцией Фреше

Из определения арной корреляции Фреше получаем, что

$$\mathsf{Kov}_X = \begin{cases} \mathsf{Kor}_X \cdot F_X^+, & \mathsf{Kor}_X \geq 0, \\ \mathsf{Kor}_X \cdot F_X^-, & \mathsf{Kor}_X \leq 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$F_X = \begin{cases} F_X^+ & \mathsf{Kor}_X \geq 0, \\ F_X^- & \mathsf{Kor}_X \leq 0. \end{cases}$$

Тогда распределение двух событий $x$ и $y$ с парной корреляцией Фреше $\mathsf{Kor}_{xy}$ определяется формулами

$$\mathbf{P}(x^c \cap y^c) = (1 - \mathbf{P}(x))(1 - \mathbf{P}(y)) + \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy},$$

$$\mathbf{P}(x \cap y) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) + \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy},$$

$$\mathbf{P}(x \cap y^c) = \mathbf{P}(x)(1 - \mathbf{P}(y)) - \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy},$$

$$\mathbf{P}(x^c \cap y) = (1 - \mathbf{P}(x))\mathbf{P}(y) - \mathsf{Kor}_{xy} \cdot F_{xy}.$$

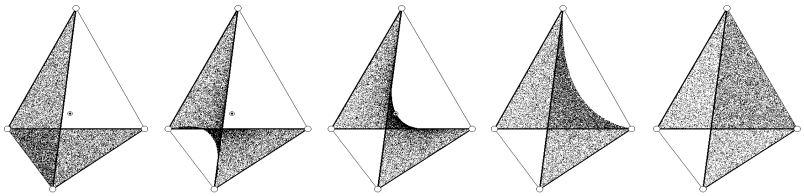


Рис. 7.2. *Паруса Фреше* — классы Э-распределений двух событий $x$ и $y$ с фиксированными парными корреляциями Фреше: $-1,\ -0.5,\ 0,\ 0.5$ и $1$ (слева направо).

Множество вероятностных распределений двух событий с фиксированной парной корреляцией Фреше — это двумерное подмножество симплекса $\$_3$, которое напоминает седлообразную поверхность (рис. 7.2) тем сильнее, чем меньше абсолютная величина парной корреляции Фреше.

## 7.10 Парус и ветер Фреше

Распределение вероятностей произвольного множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ определяется набором вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in Y} x\right), \quad Y \subseteq X,$$

каждую из которых можно выразить через индивидуальные вероятности событий и соответствующую арную корреляцию Фреше по формуле

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in Y} x\right) = \prod_{x \in Y} \mathbf{P}(x) + \mathsf{Kor}_Y F_Y, \quad Y \subseteq X,$$

где $F_Y$ — границы Фреше для вероятности пересечения множества событий $Y$, которые в свою очередь также полностью определяются индивидуальными вероятностями событий из $Y$.

Таким образом, распределение вероятностей множества событий $X$ полностью определяется двумя множествами параметров: множеством *индивидуальных вероятностей*: $\mathbf{P}(x), \quad x \in X$, и множеством *арных корреляций Фреше*: $\mathsf{Kor}_Y, \quad Y \subseteq X$. Фиксирование значений параметров из первого или второго множества определяет классы распределений, которые заслуживают имен собственных. Назовем *парусом Фреше* класс распределений множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ с фиксированными арными корреляциями Фреше: $\mathsf{Kor}_Y$, $Y \subseteq X$, а *ветром Фреше* — класс распределений множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ с фиксированными индивидуальными вероятностями $\mathbf{P}(x), \quad x \in X$. Для двух событий паруса Фреше для различных фиксированных парных корреляций Фреше изображены на рис. 7.1 и 7.2. Каждому ветру Фреше для двух событий соответствует отрезок прямой в симплексе распределений, вдоль которых изменяются паруса Фреше, когда парная корреляция Фреше меняется в пределах от $-1$ до $+1$.

## 7.11 Арная ковариация множества событий и абсолютные неравенства

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и определим арную ковариацию множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ как величину

$$\mathsf{Kov}_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x).$$

Известно, что парная ковариация двух событий $x$ и $y$ из алгебры $\mathcal{F}$ удовлетворяет так называемым *абсолютным неравенствам*[3]:

$$-1/4 \leq \mathsf{Kov}_{xy} \leq 1/4, \tag{1}$$

[3] *Абсолютными* называются неравенства для ковариации множества событий, значения границ которых зависят только от количества событий в этом множестве, но не от вероятностей событий.

которые легко следуют из неравенств Фреше для парной ковариации:

$$-\min\Big\{\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),\ \mathbf{P}(x^c)\mathbf{P}(y^c)\Big\} \le \mathsf{Kov}_{xy} \le$$
$$\le \min\Big\{\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y^c),\ \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y^c)\Big\}. \tag{2}$$

Неравенства (1) можно обобщить, если воспользоваться неравенствами Фреше для ковариации множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$, которые имеют вид:

$$-\min\left\{\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x),\ \prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)+\sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c)-1\right\} \le \mathsf{Kov}_X \le$$
$$\le \min_{x\in X}\mathbf{P}(x) - \prod_{x\in X}\mathbf{P}(x). \tag{3}$$

Лемма. *Для арной ковариации множества событий $X \subseteq \mathcal{F}$ мощности $n = |X|$ справедливы абсолютные неравенства:*

$$-(1-1/n)^n \le \mathsf{Kov}_X \le (1-1/n)(1/n)^{1/(n-1)}. \tag{4}$$

Запишем неравенства Фреше (3) для ковариации множества событий $X$ в виде

$$-F_X^- \le \mathsf{Kov}_X \le F_X^+.$$

Следствие. *Предельные значения границ в абсолютных неравенствах Фреше для ковариации множества событий, мощность которого неограниченно возрастает: $|X| \to \infty$, имеют вид*

$$\lim_{|X|\to\infty} F_X^- = 1/e, \quad \lim_{|X|\to\infty} F_X^+ = 1. \tag{4'}$$

## 7.12 Заключение

Абсолютные неравенства Фреше могут быть использованы в теории распределений множеств случайных событий, особенно при исследовании так называемых *фантомных распределений*. Неравенства Фреше нашли также свое применение в *эвентологической теории нечетких событий*, поскольку в эвентологии нечеткое событие определяется как множество обычных колмогоровских событий.

# Глава 8
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Предлагается «альбом» эвентологических распределений (Э-распределений), включающий метрические Э-распределения, а также вновь введенные *два дискретных многомерных распределения: биномиальное и пуассоновское*, которые заново определены эвентологически и существенно отличаются от тех, которые в классической теории вероятностей принято считать многомерными обобщениями биномиального и пуассоновского распределения.

## 8.1 Введение

Известно уже достаточно много различных распределений случайных множеств событий:

- равномерное,
- слойно равномерное,
- равномощное равномерное,
- независимое (независимо-точечное, точечно зависимое),
- $n$-зависимое,
- кусочно зависимое,
- метрическое

и др. В главе фрагментарно рассматриваются свойства некоторых из этих Э-распределений, а также их основные характеристики. Изложение ведется в основном на языке случайных конечных абстрактных множеств, элементами которых могут быть и колмогоровские события.

## 8.2 Равномерные Э-распределения

Определение. *Равномерным случайным множеством* называется случайное множество $K$ под конечным множеством $\mathfrak{X}$, распределение вероятностей которого имеет вид $p(X) = \mathbf{P}(K = X) = 1/2^N, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}$, где $N = |\mathfrak{X}|$ — мощность конечного множества $\mathfrak{X}$.

Типичное толкование. Равномерное случайное множество равновероятно на $2^{\mathfrak{X}}$ — все возможные значения равномерного случайного множества, иными словами, все подмножества конечного множества $\mathfrak{X}$, *равновероятны*. Дополнение равномерного случайного множества — равномерное случайное множество.

Распределение дополнения $K^{\mathsf{c}} = \mathfrak{X} - K$:

$$q(X) = \mathbf{P}(K^{\mathsf{c}} = X) = 1/2^N, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение подвероятностей пересечений:

$$p^X = \mathbf{P}(K \subseteq X) = 2^{|X|}/2^N = 2^{-|X^{\mathsf{c}}|}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение надвероятностей пересечений:

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = 2^{|X^{\mathsf{c}}|}/2^N = 2^{-|X|}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

Распределение вероятностей объединений:

$$u(X) = \mathbf{P}(K \neq X^c) = 1 - 2^{-N}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение подвероятностей объединений:

$$u_X = \mathbf{P}(K \not\subseteq X^c) = 1 - 2^{-|X|}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение надвероятностей объединений:

$$u^X = \mathbf{P}(X^c \not\subseteq K) = 1 - 2^{-|X^c|}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение мощности

$$p^m_{\mathfrak{X}} = \mathbf{P}(|K| = m) = \frac{C^m_N}{2^N}, \quad m = 0, \ldots, N.$$

Среднее число элементов

$$\mathbf{E}|K| = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} |X| p(X) = \sum_{m=0}^{N} m p^m_{\mathfrak{X}} = N/2.$$

Среднее число подмножеств

$$\mathbf{E}2^{|K|} = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} p_X = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} 2^{|X|}p(X) = \sum_{m=0}^{N} 2^m p_{\mathfrak{X}}^m = (3/2)^N.$$

Среднее число надмножеств

$$\mathbf{E}2^{|K^{\mathrm{c}}|} = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} p^X = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} 2^{|X^{\mathrm{c}}|}p(X) = \sum_{m=0}^{N} 2^{N-m} p_{\mathfrak{X}}^m = (3/2)^N.$$

## 8.3 Слойно равномерные Э-распределения

Различая подмножества $\mathfrak{X}$ по их мощности, все множество $2^{\mathfrak{X}}$ можно разбить на непересекающиеся подмножества $2^{\mathfrak{X}} = \sum_{m=0}^{N} C_{\mathfrak{X}}^m$, которые называются *$m$-слоями* и определяются как множества $m$-подмножеств конечного множества $\mathfrak{X}$: $C_{\mathfrak{X}}^m = \big\{X \in 2^{\mathfrak{X}} :\ |X| = m\big\}$.

Определение. *Слойно равномерным случайным множеством* называется случайное множество $K$ под конечным множеством $\mathfrak{X}$, распределение вероятностей которого имеет вид

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \frac{p_{\mathfrak{X}}^{|X|}}{C_N^{|X|}}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

или то же самое в других обозначениях:

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \frac{p_{\mathfrak{X}}^m}{C_N^m}, \quad X \in C_{\mathfrak{X}}^m,\ m = 0, \dots, N,$$

где $N = |\mathfrak{X}|$ — мощность конечного множества $\mathfrak{X}$, а

$$p_{\mathfrak{X}}^m = \mathbf{P}\left(K \in C_{\mathfrak{X}}^m\right) = \mathbf{P}(|K| = m),\ m = 0, \dots, N,$$

— распределение вероятностей целочисленной случайной величины $|K|$ — мощности случайного множества $K$.

Типичное толкование. Слойно равномерное случайное множество *равновероятно внутри каждого слоя*, а распределение вероятностей

*между слоями* определяется распределением вероятностей его мощности. Дополнение слойно равномерного случайного множества — слойно равномерное случайное множество.

Распределение дополнения $K^{\mathsf{c}} = \mathfrak{X} - K$:

$$q(X) = \mathbf{P}\left(K^{\mathsf{c}} = X\right) = \frac{q_{\mathfrak{X}}^{|X|}}{C_N^{|X|}} = \frac{p_{\mathfrak{X}}^{|X^{\mathsf{c}}|}}{C_N^{|X|}} = \mathbf{P}\left(K = X^{\mathsf{c}}\right), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

или в других обозначениях:

$$q(X) = \mathbf{P}(K^{\mathsf{c}} = X) = \frac{q_{\mathfrak{X}}^{m}}{C_N^{m}} = \frac{p_{\mathfrak{X}}^{N-m}}{C_N^{m}} = \mathbf{P}\left(K = X^{\mathsf{c}}\right), \quad X \in C_{\mathfrak{X}}^{m},$$

где $m = 0, \ldots, N$, а

$$q_{\mathfrak{X}}^{m} = \mathbf{P}\left(K^{\mathsf{c}} \in C_{\mathfrak{X}}^{m}\right) = \mathbf{P}(|K^{\mathsf{c}}| = m) = \mathbf{P}(|K| = N - m) = p_{\mathfrak{X}}^{N-m},$$

где $m = 0, \ldots, N$, — распределение вероятностей целочисленной случайной величины $|K^{\mathsf{c}}|$ — мощности случайного множества $K^{\mathsf{c}}$.

Распределение подвероятностей пересечений:

$$p^X = \sum_{B \subseteq X} \frac{p_{\mathfrak{X}}^{|B|}}{C_N^{|B|}} = \sum_{m=0}^{|X|} \frac{p_{\mathfrak{X}}^{m}}{C_N^{m}} C_{|X|}^{m} =$$

$$= \frac{1}{C_N^{|X|}} \sum_{m=0}^{|X|} p_{\mathfrak{X}}^{m} C_{N-m}^{|X|-m} = \frac{1}{C_N^{|X|}} \mathbf{E} C_{|K^{\mathsf{c}}|}^{|X^{\mathsf{c}}|}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

где

$$\mathbf{E} C_{|K|}^{|X|} = \sum_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}} C_{|Y|}^{|X|} p(Y)$$

— математическое ожидание случайной величины $C_{|K|}^{|X|}$ — *биномиальный момент порядка* $|X|$ *мощности* $|K|$ *случайного множества* $K$.

Распределение надвероятностей пересечений:

$$p_X = \sum_{X \subseteq B} \frac{p_B^{|B|}}{C_N^{|B|}} = \sum_{m=|X|}^{N} \frac{p_{\mathfrak{X}}^{m}}{C_N^{m}} C_{N-|X|}^{N-m} =$$

$$= \frac{1}{C_N^{|X|}} \sum_{m=|X|}^{N} p_{\mathfrak{X}}^m C_m^{|X|} = \frac{1}{C_N^{|X|}} \mathbf{E} C_{|K|}^{|X|}, \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение мощности:

$$p_{\mathfrak{X}}^m = \mathbf{P}(|K| = m), \quad m = 0, \ldots, N.$$

Среднее число элементов:

$$\mathbf{E}|K| = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} |X| p(X) = \sum_{m=0}^{N} m p_{\mathfrak{X}}^m.$$

Среднее число подмножеств:

$$\mathbf{E} 2^{|K|} = \sum_{m=0}^{N} \mathbf{E} C_{|K|}^m = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} p_X = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} 2^{|X|} p(X) = \sum_{m=0}^{N} 2^m p_{\mathfrak{X}}^m.$$

Среднее число надмножеств:

$$\mathbf{E} 2^{|K^c|} = \sum_{m=0}^{N} \mathbf{E} C_{|K^c|}^m = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} p^X = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} 2^{|X^c|} p(X) = \sum_{m=0}^{N} 2^{N-m} p_{\mathfrak{X}}^m.$$

## 8.4 Равномощные равномерные распределения

1. Распределение надвероятностей пересечений. Ясно, что если случайные множества постоянной мощности имеют равномерное распределение на своем слое, то надвероятности множеств одинаковой мощности равны между собой. Действительно, надвероятности моноплетов $\{x\}$ равны:

$$\mathbf{P}(x \in K(m)) = \sum_{x \in X} p(X, m) = \sum_{x \in X} \frac{1}{C_N^m} = \frac{C_{N-1}^{m-1}}{C_N^m} = \frac{m}{N}.$$

Надвероятности дуплетов $\{x, y\}$ равны:

$$\mathbf{P}(\{x, y\} \subseteq K(m)) = \sum_{\{x,y\} \subseteq X} p(X, m) = \frac{C_{N-2}^{m-2}}{C_N^m} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}.$$

Надвероятности подмножеств $X_s$ мощности $s \ll m$ равны

$$\mathbf{P}(X_s \subseteq K(m)) = \sum_{X_s \subseteq X} p(X,m) = \frac{C_{N-s}^{m-s}}{C_N^m} = \frac{m(m-1)\cdots(m-s+1)}{N(N-1)\cdots(N-s+1)},$$

в частности, когда $s = m$

$$\mathbf{P}(X_m \subseteq K(m)) = \frac{1}{C_N^m}.$$

Для $s > m$ надвероятности подмножеств мощности $s$ равны нулю.

2. Распределение подвероятностей пересечений. Также ясно, что если случайные множества постоянной мощности имеют равномерное распределение на своем слое, то подвероятности множеств одинаковой мощности равны между собой. Подвероятности подмножеств $X_s$ мощности $s \gg m$ равны

$$\mathbf{P}(K(m) \subseteq X_s) = \sum_{X \subseteq X_s} p(X,m) = \frac{C_s^m}{C_N^m} =$$

$$= \frac{(N-m)(N-m-1)\cdots(N-m-s+1)}{N(N-1)\cdots(N-s+1)},$$

в частности, когда $s = m$

$$\mathbf{P}(K(m) \subseteq X_m) = \frac{1}{C_N^m}.$$

Для $s < m$ подвероятности подмножеств мощности $s$ равны нулю.

## 8.5 Независимые (независимо-точечные) случайные множества событий

Определение. *Независимым (независимо-точечным) случайным множеством* называется случайное множество $K$ под конечным множеством событий $\mathfrak{X}$, независимых в совокупности, его распределение вероятностей имеет вид

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x) \prod_{x \in X^c} \mathbf{P}(x^c), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

где $x^c = \Omega - x$ — дополнение события $x$ до $\Omega$, $X^c = \mathfrak{X} - X$ — дополнение множества событий $X$ до $\mathfrak{X}$.

Типичное толкование. Значениями независимого случайного множества $K$ служат подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$ наступивших событий, независимых в совокупности $\mathfrak{X}$. Дополнение независимого случайного множества $K^c = \mathfrak{X} - K$ — независимое случайное множество.

Распределение дополнения $K^{\mathsf{c}} = \mathfrak{X} - K$:

$$q(X) = \mathbf{P}(K^c = X) = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x^c) \prod_{x \in X^c} \mathbf{P}(x), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение подвероятностей пересечений:

$$p^X = \mathbf{P}(K \subseteq X) = \prod_{x \in X^c} \mathbf{P}(x^c), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение надвероятностей пересечений:

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

Распределение вероятностей объединений:

$$u(X) = \mathbf{P}(K \neq X^c) = 1 - \prod_{x \in X^c} \mathbf{P}(x) \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x^c), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение подвероятностей объединений:

$$u_X = \mathbf{P}(K \not\subseteq X^c) = 1 - \prod_{x \in X} \mathbf{P}(x^c), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение надвероятностей объединений:

$$u^X = \mathbf{P}(X^c \not\subseteq K) = 1 - \prod_{x \in X^c} \mathbf{P}(x), \quad X \in 2^{\mathfrak{X}},$$

Среднее число событий:

$$\mathbf{E}|K| = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} |X| p(X) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(x).$$

Среднее число подмножеств событий:

$$\mathbf{E}2^{|K|} = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} p_X = \prod_{x\in\mathfrak{X}} (1+\mathbf{P}(x)).$$

Среднее число надмножеств событий:

$$\mathbf{E}2^{|K^{\mathrm{c}}|} = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} p^X = \prod_{x\in\mathfrak{X}} (2-\mathbf{P}(x)).$$

## 8.6 Кусочно зависимые Э-распределения

Определение (кусочно-зависимые Э-распределения). Пусть

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 + \ldots + \mathfrak{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{X}_i \subseteq \mathcal{F}$$

— разбиение конечного множества $\mathfrak{X}$ на $n$ непересекающихся подмножеств $\mathcal{F}$-измеримых событий. Случайное множество событий

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

называется *кусочно-зависимым случайным множеством событий относительно заданного разбиения* $\mathfrak{X}$, если

$$K = K_1 + \ldots + K_n = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

и его Э-распределение имеет вид

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \prod_{i=1}^{n} p_i(X \cap \mathfrak{X}_i), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где

$$K_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_i}, 2^{2^{\mathfrak{X}_i}}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

— *непересекающиеся* случайные множества событий с Э-распределениями

$$p_i(X) = \mathbf{P}(K_i = X), \quad X \subseteq \mathfrak{X}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Типичное толкование. Кусочно-зависимое случайное множество событий $K$ представимо в виде объединения *«независимых в совокупности»* и непересекающихся случайных множеств событий, значения каждого из которых $K_i$ не выходят за пределы соответствующего фрагмента $\mathfrak{X}_i$ разбиения множества событий $\mathfrak{X}$.

Замечание 1. Поскольку Э-распределение каждого $K_i$ определяется не более, чем $2^{|\mathfrak{X}_i|}-1$ вероятностью событий-террасок, а вероятности из Э-распределения кусочно-зависимого случайного множества событий $K$ представимы в виде произведений вероятностей из Э-распределений $K_i$, то Э-распределение $K$ определяется не более чем $\sum_{i=1}^{n}\left(2^{|\mathfrak{X}_i|}-1\right)$ вероятностями событий-террасок, что может быть существенно меньше $2^{|\mathfrak{X}|}$ — числа вероятностей в Э-распределении произвольного случайного множества событий под $\mathfrak{X}$.

Замечание 2. В частности, когда $\mathfrak{X}_i=\{x_i\},\ i=1,\ldots,n$ — моноплеты событий, кусочно-зависимое случайное множество $K$ имеет так называемое *независимо-точечное Э-распределение*, т.е. все его $2^n$ вероятностей определяются $n$ вероятностями событий $x\in\mathfrak{X}$ по известным формулам:

$$p(X)=\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)\prod_{x\in X^c}\mathbf{P}(x^c),\quad X\subseteq\mathfrak{X}.$$

Распределение дополнения $K^c=\mathfrak{X}-K$:

$$q(X)=\mathbf{P}(K^c=X)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(K_i^c=X\cap\mathfrak{X}_i)=\prod_{i=1}^{n}q_i(X\cap\mathfrak{X}_i),\quad X\in 2^{\mathfrak{X}},$$

где $K_i^c=\mathfrak{X}_i-K_i$ — дополнения до $\mathfrak{X}_i$, а $q_i$ — Э-распределения $K_i^c$ под $\mathfrak{X}_i$.

Распределение подвероятностей пересечений:

$$p^X=\mathbf{P}(K\subseteq X)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(K_i\subseteq X\cap\mathfrak{X}_i)=\prod_{i=1}^{n}p_i^{X\cap\mathfrak{X}_i},\quad X\in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение надвероятностей пересечений:

$$p_X=\mathbf{P}(X\subseteq K)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X\cap\mathfrak{X}_i\subseteq K_i)=\prod_{i=1}^{n}p^i_{X\cap\mathfrak{X}_i},\quad X\in 2^{\mathfrak{X}}.$$

Распределение мощности:

$$\mathbf{P}(|K|=m)=\sum_{m_1+\ldots+m_n=m}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(|K_i|=m_i),\quad m=0,\ldots,N.$$

Среднее число элементов:

$$\mathbf{E}|K|=\sum_{x\in\mathfrak{X}}p_x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\mathfrak{X}_i}p_x^i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}|K_i|.$$

Среднее число подмножеств:

$$\mathbf{E}2^{|K|}=\mathbf{E}2^{|K_1|+\ldots+|K_n|}=\mathbf{E}\prod_{i=1}^{n}2^{|K_i|}=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}2^{|K_i|}=\prod_{i=1}^{n}\sum_{X\subseteq\mathfrak{X}_i}p_X^i.$$

Среднее число надмножеств:

$$\mathbf{E}2^{|K^c|}=\mathbf{E}2^{|K_1^c|+\ldots+|K_n^c|}=\mathbf{E}\prod_{i=1}^{n}2^{|K_i^c|}=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}2^{|K_i|}=\prod_{i=1}^{n}\sum_{X\subseteq\mathfrak{X}_i}p_i^{X^c}.$$

## 8.7 $n$-ЗАВИСИМЫЕ Э-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматривается класс Э-распределений множеств событий, которые максимизируют энтропию при определенных ограничениях. Рассматривается связь этих Э-распределений с мультковариациями событий. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ — вероятностное пространство, а $\mathfrak{X}\subseteq\mathcal{F}$ — конечное множество $\mathcal{F}$-измеримых событий. Под энтропией случайного множества наступающих событий $K:(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})\to\left(2^{\mathfrak{X}},2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$, равно как и под энтропией множества событий $\mathfrak{X}$, или под энтропией Э-распределения $\{p(X),\ X\subseteq\mathfrak{X}\}$, понимается следующее классическое выражение

$$\$=-\sum_{X\subseteq\mathfrak{X}}\mathbf{P}(K=X)\ln\mathbf{P}(K=X)=-\sum_{X\subseteq\mathfrak{X}}p(X)\ln p(X),$$

где

$$p(X)=\mathbf{P}(K=X)=\mathbf{P}\left(\mathrm{ter}(X)\right),\quad X\subseteq\mathfrak{X},$$

— вероятности событий-террасок

$$\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c = \{\omega :\ K(\omega) = X\} \subseteq \Omega, \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Известно, что абсолютного максимума энтропия \$ достигает на равномерном Э-распределении: $p(X) = 1/2^{|\mathfrak{X}|},\ X \subseteq \mathfrak{X}$. Также известен факт, что максимум энтропии Э-распределения при фиксированных вероятностях событий $\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}(x \in K) = p_x,\ x \in \mathfrak{X}$ достигается на так называемом независимо-точечном Э-распределении:

$$p(X) = \prod_{x\in X} p_x \prod_{x\in X^c} (1 - p_x), \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Напомним, что Э-распределение $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ может быть задано также в эквивалентной форме с помощью набора так называемых *вероятностей покрытия*

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}_X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

которые связаны с вероятностями $p(X)$ формулами обращения Мебиуса:

$$p_X = \sum_{X\subseteq Y} p(Y), \quad p(X) = \sum_{X\subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y.$$

Заметим, что в частном случае, когда $X = \{x\}$ — моноплет событий, вероятность покрытия $p_X = p_x = \mathbf{P}(x)$ — это вероятность события $x \in \mathfrak{X}$. Возникает общая задача поиска условного максимума энтропии Э-распределения при вероятностях покрытия $p_X$, фиксированных на подмножествах событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ мощности меньшей или равной $n$: $p_X = a_X,\ |X| \leqslant n$, а также при произвольных ограничениях на «область определения»[1] случайного множества событий $K$ (эта задача впервые решена в [20]).

[1] Под «областью определения» $K$ понимается множество значений, которые $K$ принимает с ненулевыми вероятностями: $\{X \subseteq \mathfrak{X} :\ p(X) > 0\} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$.

### 8.7.1 Максимизация энтропии при фиксированных вероятностях покрытия

Зафиксируем вероятности покрытия $p_X$ для всех множеств мощности меньшей или равной $n$: $p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = a_X, \quad |X| \leqslant n$. Найдем Э-распределение, которое максимизирует энтропию \$ при таких ограничениях. Для этого запишем энтропию через вероятности покрытия. Известно, что вероятности значений $p(X)$ выражаются через вероятности покрытия $p_X$ по формуле обращения Мёбиуса: $p(X) = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y \setminus X|} p_Y$. Отсюда получаем следующее выражение для энтропии:

$$\$ = -\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \left( \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y \setminus X|} p_Y \right) \ln \left( \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y \setminus X|} p_Y \right).$$

Для нахождения максимума приравняем к нулю частные производные \$ по $p_Z, \quad |Z| > n$.

$$\$'_{p_Z} = -\sum_{X \subseteq Z} (-1)^{|Z \setminus X|} \ln \left( \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y \setminus X|} p_Y \right) = 0, \quad |Z| > n.$$

Немного преобразуя выражение, получим следующую систему уравнений для вероятностей значения случайного множества:

$$\prod_{X \subseteq Z} p(X)^{(-1)^{|Z \setminus X|}} = \tau(Z) = 1, \quad |Z| > n,$$

где $\tau(Z)$ — мультиковариация множества событий $Z \subseteq \mathfrak{X}$. Таким образом, доказана следующая

Теорема. *В классе Э-распределений, удовлетворяющих следующим ограничениям: $p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = a_X, \quad |X| \leq n$, максимум энтропии достигается на Э-распределении, для которого: $\tau(Z) = 1, \quad |Z| > n$. Такие Э-распределения будем называть $n$-зависимыми.*

Из известного факта, что любое распределение СКАМ можно представить в виде произведения мультковариаций: $p(X) = \prod_{Y \subseteq X} \tau(Y)$ вытекает

Следствие. *$n$-зависимое Э-распределение представимо в виде:*

$$\mathbf{P}(K = X) = p(X) = \prod_{Y \subseteq X, |Y| \leq n} \tau(Y).$$

Например, для случаев $n = 1, 2, 3$ получаем следующие выражения для таких Э-распределений[2]:

$$p(X) = \tau(\emptyset) \prod_{x \in X} \tau(x) = p(\emptyset) \prod_{x \in X} \frac{p(x)}{p(\emptyset)},$$

$$p(X) = \tau(\emptyset) \prod_{x \in X} \tau(x) \prod_{\{x,y\} \subset X} \tau(x, y) =$$

$$= p(\emptyset) \prod_{x \in X} \frac{p(x)}{p(\emptyset)} \prod_{\{x,y\} \subset X} \frac{p(\emptyset)p(x, y)}{p(x)p(y)},$$

$$p(X) = \tau(\emptyset) \prod_{x \in X} \tau(x) \prod_{\{x,y\} \subset X} \tau(x, y) \prod_{\{x,y,z\} \subset X} \tau(x, y, z) =$$

$$= p(\emptyset) \prod_{x \in X} \frac{p(x)}{p(\emptyset)} \prod_{\{x,y\} \subset X} \frac{p(\emptyset)p(x, y)}{p(x)p(y)} \prod_{\{x,y,z\} \subset X} \frac{p(x)p(y)p(z)p(x, y, z)}{p(\emptyset)p(x, y)p(x, z)p(y, z)}.$$

### 8.7.2 Максимизация энтропии при фиксации области определения случайного множества событий

Допустим, что случайное множество может принимать только значения из некоторой области $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $p(X) = 0,\ X \notin \mathcal{A} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$. При таких ограничениях абсолютный максимум энтропии \$, как легко понять, достигается на следующем Э-распределении:

$$p(X) = \begin{cases} 1/|\mathcal{A}|, & X \in \mathcal{A}, \\ 0, & X \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Как и в предыдущей секции, дополнительно зафиксируем вероятности покрытия для всех множеств мощности меньшей или равной $n$: $p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = a_X, \quad |X| \leq n$. Аналогичными рассуждениями можно быть доказана следующая

Теорема. *В классе Э-распределений, удовлетворяющих следующим ограничениям:* $p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = a_X,\ |X| \leq n$ *и* $p(X) = 0, \quad X \notin \mathcal{A}$, *максимум энтропии достигается на Э-распределении*

[2]Здесь использованы понятные сокращения $p(x) = p(\{x\}),\ \tau(x) = \tau(\{x\})$ и т.п., которые будут далее использоваться без дополнительных оговорок.

*вида* $p(X) = \prod_{Y \subseteq X, |Y| \leq n} \alpha(Y),\ X \in \mathcal{A}$, *где* $\alpha(Y)$ *находятся из ограничений на вероятности покрытия и условия нормировки вероятности:* $\sum_{X \in \mathcal{A}} p(X) = 1$.

## 8.8 Метрические Э-распределения

*Эвентологическое распределение* — это любое распределение вероятностей, определяющее множество случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. В ряде задач, например в задаче $N$ случайных событий [53, 65], для задания эвентологических распределений удобнее и естественнее использовать такую характеристику множества случайных событий, которая имеет свойства расстояния между ними. Однако расстояние обычно определяется лишь для пар элементов, а не для произвольных множеств элементов.

Поставим задачу определить на $2^{\mathfrak{X}}$ такую *сет-функцию* $\Delta_X$ — функцию множества $X \subseteq \mathfrak{X}$, которая бы, во-первых, обобщала понятие обычного расстояния между двумя случайными событиями $x, y \in \mathfrak{X}$, т.е. совпадала с вероятностью их симметрической разности, когда $X = \{x, y\}$ — дуплет:

$$\Delta_{xy} = \mathbf{P}(x \triangle y),$$

а, во-вторых, для произвольного $X \subseteq \mathfrak{X}$ обладала бы свойствами, напоминающими привычные свойства расстояния. Как выяснится ниже, этим условиям вполне удовлетворяет сет-функция $\Delta_X$, определяемая для $X \subseteq \mathfrak{X}$ как

$$\Delta_X = |X| \cdot u_X - \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x),$$

где $u_X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right)$ — вероятности объединения случайных событий. Сет-функция $\Delta_X$ называется *сет-расстоянием множества случайных событий* $X \subseteq \mathfrak{X}$.

### 8.8.1 Метрика

Определение (метрика). *Метрика* на множестве $\mathfrak{X}$ (*расстояние между двумя элементами* $x, y$ *множества* $\mathfrak{X}$) — это действительная чис-

ловая функция $\rho(x,y)$, определенная на $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ и удовлетворяющая для любых $x,y,z\in\mathfrak{X}$ двум аксиомам:

1) $\rho(x,y)=0 \iff x=y$ *(аксиома нуля)*,
2) $\rho(x,z)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,y)$ *(аксиома треугольника)*.

Замечание 1. Из определения вытекают два свойства расстояния:

- $\rho(x,y)\geqslant 0$ *(неотрицательность)*,
- $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ *(симметричность)*.

Действительно, если в аксиоме треугольника, во-первых, положить $y=x$, то получим *неотрицательность*: $2\rho(x,y)\geqslant 0$, а во-вторых, положить $z=x$, то получим *симметричность*, так как из возникающего неравенства $\rho(y,x)\geqslant\rho(x,y)$ сразу же следует ему противоположное: $\rho(x,y)\geqslant\rho(y,x)$.

Замечание 2. Если для функции $\rho$ выполнена только одна аксиома треугольника, то она называется *псевдометрикой (квазиметрикой)*, или *псевдорасстоянием (квазирасстоянием)*.

Замечание 3. Когда $\mathfrak{X}\subseteq\mathcal{F}$ — конечное множество случайных событий, то действительная числовая функция

$$\Delta_{xy}=\mathbf{P}(x\triangle y),\quad x,y\in\mathfrak{X},$$

— *вероятность симметрической разности двух событий* $x$ и $y$, будет метрикой на $\mathfrak{X}$ всякий раз, когда вероятность $\mathbf{P}$ такова, что

$$\mathbf{P}(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\emptyset.$$

Иначе $\mathbf{P}(x\triangle y)$ — псевдометрика.

### 8.8.2 Сет-метрика по объединению

Два события. Рассмотрим два случайных события $x,y\in\mathcal{F}$, образующие множество (дуплет) $X=\{x,y\}\subset\mathcal{F}$. Обычным расстоянием между двумя событиями служит вероятность их симметрической разности $\mathbf{P}(x\triangle y)$, которую можно представить в виде следующей взвешенной суммы вероятностей террасок:

$$\mathbf{P}(x\triangle y)=0\cdot\mathbf{P}(x\cap y)+1\cdot\mathbf{P}(x\cap y^c)+1\cdot\mathbf{P}(x^c\cap y),$$

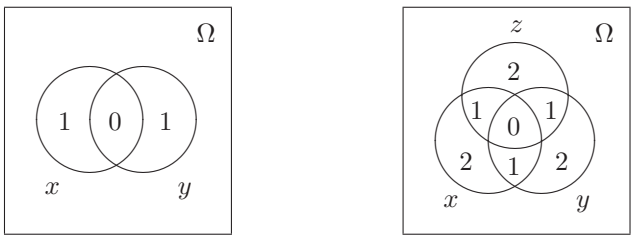



Рис. 8.1. Террасные "штрафы за несовпадение" множества $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$ из двух случайных событий $x, y \subseteq \Omega$ (слева) и множества $\{x, y, z\} \subseteq \mathfrak{X}$ из трех случайных событий $x, y, z \subseteq \Omega$ (справа) для сет-расстояний этих множеств по объединению: $\Delta^{\cup}_{xy}$ и $\Delta^{\cup}_{xyz}$

содержащихся в объединении двух событий:

$$x \cup y = x \cap y + x \cap y^c + x^c \cap y.$$

Веса вероятностей террасок имеют смысл «штрафов за несовпадение» случайных событий. Наименьший «штраф» 0 имеет терраска $x \cap y$, так как наступление этой терраски означает одновременное наступление двух событий (т.е. события $x$ и $y$ совпадают на этой терраске); терраски $x \cap y^c$ и $x^c \cap y$ штрафуются единицей, так как наступает только одно событие из двух (рис. 15.2 слева). Таким образом, *вес терраски — это число ненаступивших случайных событий* при наступлении данной терраски.

Три события. Применим ту же систему «террасных штрафов» для террасок, образованных пересечением трех событий $x, y, z \in \mathcal{F}$ (рис. 15.2 справа). Тогда аналогичная взвешенная сумма, которую мы обозначим $\Delta_{xyz}$, имеет вид

$$\Delta_{xyz} = 0 \cdot \mathbf{P}(x \cap y \cap z) + 1 \cdot \mathbf{P}(x \cap y \cap z^c) + 1 \cdot \mathbf{P}(x \cap y^c \cap z) + 1 \cdot \mathbf{P}(x^c \cap y \cap z)$$

$$+ 2 \cdot \mathbf{P}(x \cap y^c \cap z^c) + 2 \cdot \mathbf{P}(x^c \cap y \cap z^c) + 2 \cdot \mathbf{P}(x^c \cap y^c \cap z).$$

Произвольное множество событий. Для произвольного множества событий $X \subset \mathcal{F}$ аналогичная взвешенная сумма равна

$$\Delta_X = \sum_{\emptyset \subset Y \subseteq X} (|X| - |Y|) \mathbf{P} \left( \bigcap_{x \in Y} x \bigcap_{x \in X \setminus Y} x^c \right),$$

где суммирование распространяется на все непустые подмножества $X$. Сначала заметим, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in Y} x \bigcap_{x\in X\setminus Y} x^c\right) = p(X,Y) = \mathbf{P}\left(K_X = Y\right)$$

— вероятность того, что среди множества событий $X$ наступят только события из подмножества $Y \subseteq X$, т.е. вероятность того, что случайное множество наступивших событий $K_X$, определенное под $X$, примет значение $Y$.

Замечание 4. Под случайными множествами событий $K_X$ понимаются проекции

$$K_X = K \cap X, \quad X \subseteq \mathfrak{X}$$

случайного множества

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right),$$

определенного под $\mathfrak{X}$ распределением вероятностей

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c\right),$$

где $X^c = \mathfrak{X} \setminus X$.

Замечание 5. Сет-расстояние $\Delta_X$ зависит только от распределения мощности случайного множества событий $K_X$:

$$\Delta_X = \sum_{a=1}^{|X|} (|X| - a)\mathbf{P}(|K_X| = a).$$

А теперь перепишем формулу для сет-расстояния в виде

$$\Delta_X = \sum_{\emptyset\subseteq Y\subseteq X} (|X| - |Y|)p(X,Y) - |X|p(X,\emptyset) =$$

$$= |X|(1 - p(X,\emptyset)) - \sum_{\emptyset\subseteq Y\subseteq X} |Y|p(X,Y)$$

и заметим, что, во-первых,

$$1 - p(X, \emptyset) = \mathbf{P}\left(K_X \neq \emptyset\right) = \mathbf{P}\left(K \cap X \neq \emptyset\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) = u_X,$$

во-вторых,

$$\sum_{\emptyset \subseteq Y \subseteq X} |Y| p(X, Y) = \sum_{\emptyset \subseteq Y \subseteq X} |Y| \mathbf{P}\left(K_X = Y\right) = \mathbf{E}\left|K_X\right|.$$

В итоге взвешенная сумма для произвольного множества случайных событий $X$ принимает вид:

$$\Delta_X = |X| \cdot u_X - \mathbf{E}\left|K_X\right|, \tag{1}$$

который можно выбрать в качестве определения новой характеристики $\Delta_X$ множества случайных событий $X \subset \mathcal{F}$ — *сет-расстояния множества случайных событий* $X$. Прежде чем дать определение сет-расстояния, заметим только, что в силу «старой» теоремы Роббинса: $\mathbf{E}\left|K_X\right| = \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x)$.

Определение (сет-расстояние множества случайных событий). *Сет-расстояние множества случайных событий* — это сет-функция, определяемая для каждого множества случайных событий $X \subset \mathcal{F}$ как величина

$$\Delta_X = |X| \cdot \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) - \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x). \tag{2}$$

Определение (расстояние события до множества событий). *Расстоянием случайного события* $x \in \mathfrak{X}$ *до множества событий* $X \subseteq \mathfrak{X}$ называется действительная числовая функция

$$d : \mathfrak{X} \times 2^{\mathfrak{X}} \to \mathbb{R},$$

которая на $(x, X) \in \mathfrak{X} \times 2^{\mathfrak{X}}$ принимает значение

$$d(x, X) = \mathbf{P}\left\{x \triangle \left(\bigcup_{y \in X} y\right)\right\}.$$

Определение (расстояние между множествами событий). *Расстоянием между множествами событий* $X \subseteq \mathfrak{X}$ *и* $Y \subseteq \mathfrak{X}$ называется действительная числовая функция

$$d : 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}} \to \mathbb{R},$$

которая на $(X, Y) \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ принимает значение, равное вероятности симметрической разности объединений этих двух множеств событий:

$$d(X, Y) = \mathbf{P}\left\{\left(\bigcup_{x \in X} x\right) \triangle \left(\bigcup_{x \in Y} x\right)\right\}.$$

Замечание 6. Для расстояний события до множества событий и расстояния между множествами событий не выполняется аксиома нуля. Поэтому, строго говоря, речь идет о сет-псевдометриках (сет-квазиметриках) и сет-псевдорасстояниях (сет-квазирасстояниях). Но, чтобы не отягощать терминологию будем продолжать опускать «псевдо-» или «квази-», всегда помня, однако, что аксиома нуля для этих сет-метрик не выполняется.

Замечание 7. Расстояние события до множества событий — это частный случай расстояния между множествами событий, когда одно из множеств — моноплет:

$$d(x, X) = d(\{x\}, X).$$

Замечание 8. Только что введенные расстояния проще всего выразить через распределение вероятностей объединений: $u_X, X \subseteq \mathfrak{X}$. Расстояние между множествами событий $X$ и $Y$ равно

$$d(X, Y) = 2u_{X \cup Y} - u_X - u_Y.$$

Если же $Y \subseteq X$, то

$$d(X, Y) = u_X - u_Y,$$

так как тогда $X \cup Y = X$. В частности, для расстояния события $x$ до множества событий $X$ формула имеет вид

$$d(x, X) = 2u_{X \cup \{x\}} - u_X - u_{\{x\}}.$$

Если же $x \in X$, то

$$d(x, X) = u_X - u_{\{x\}}.$$

Лемма. *Сет-расстояние $\Delta_X$ множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ представимо в виде суммы расстояний всех событий из $X$ до самого множества событий $X$:*

$$\Delta_X = \sum_{x \in X} d(x, X).$$

Доказательство. Из (2) следует, что

$$\Delta_X = \sum_{x \in X} \left\{ \mathbf{P}\left( \bigcup_{y \in X} y \right) - \mathbf{P}(x) \right\}.$$

Кроме того, для $x \in X$

$$x \triangle \left( \bigcup_{y \in X} y \right) = \left( \bigcup_{y \in X} y \right) \setminus x,$$

так как $x \subseteq \left( \bigcup_{y \in X} y \right)$. Это означает, что

$$\Delta_X = \sum_{x \in X} \mathbf{P} \left\{ x \triangle \left( \bigcup_{y \in X} y \right) \right\},$$

что доказывает лемму.

### 8.8.3 Сет-метрика по пересечению

Можно ввести еще одну характеристику расстояния множества случайных событий, двойственную только что рассмотренной. В ее определении операция объединения заменяется двойственной ей операцией пересечения: $\Delta_X^{\cap} = \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x) - |X| \cdot \mathbf{P}\left( \bigcap_{x \in X} x \right)$. Называется эта характеристика *сет-расстоянием множества случайных событий $X$ по пересечению*. Схема «террасных штрафов за несовпадение» для этого случая показана на рис. 8.2.

Приведем еще три формулы, справедливые для сет-расстояния множества событий (по пересечению):

$$\Delta_X^{\cap} = \sum_{\emptyset \subseteq Y \subset X} |Y| p(Y), \quad \Delta_X^{\cap} = \sum_{m=0}^{|X|-1} m \mathbf{P}(|K_X| = m),$$

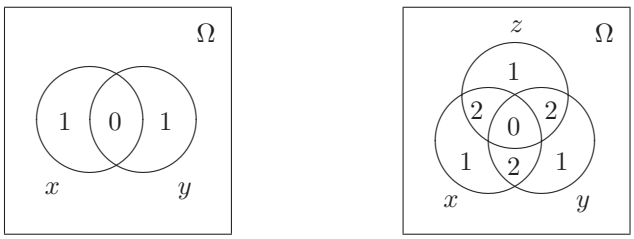



Рис. 8.2. Террасные "штрафы за несовпадение" множества $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$ из двух случайных событий $x, y \subseteq \Omega$ (слева) и множества $\{x, y, z\} \subseteq \mathfrak{X}$ из трех случайных событий $x, y, z \subseteq \Omega$ (справа) для сет-расстояний этих множеств по пересечению: $\Delta^{\cap}_{xy}$ и $\Delta^{\cap}_{xyz}$

$$\Delta^{\cap}_{X} = \sum_{m=0}^{|X|-1} m\mathbf{P}(C^{m}_{X}).$$

Отметим еще, что в основе определения сет-расстояния по пересечению лежат соответствующие понятия *расстояния случайного события от множества событий (по пересечению)*:

$$d^{\cap}(x, X) = \mathbf{P}\left\{x \triangle \left(\bigcap_{y\in X} y\right)\right\},$$

и более общего понятия — *расстояния между множествами событий (по пересечению)*:

$$d^{\cap}(X, Y) = \mathbf{P}\left\{\left(\bigcap_{x\in X} x\right) \triangle \left(\bigcap_{x\in Y} x\right)\right\}.$$

Аналогичное этому понятие расстояния между подмножествами абстрактного случайного множества было введено в [81] под названием вероятностной псевдометрики, правда, в менее отчетливой форме и в излишне громоздких и потому неудобных обозначениях.

Свойства данных *расстояний относительно пересечения* аналогичны соответствующим свойствам *расстояний относительно объединения*.

Лемма. *Сет-расстояние $\Delta^{\cap}_{X}$ множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ представимо в виде суммы расстояний всех событий из $X$ до самого*

*множества событий* $X$:

$$\Delta_X^{\cap} = \sum_{x \in X} d^{\cap}(x, X).$$

Замечание 9. Рассмотренные расстояния по пересечению проще всего выразить через распределение вероятностей пересечений: $p_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$. Расстояние между множествами событий $X$ и $Y$ равно

$$d^{\cap}(X, Y) = p_X + p_Y - 2p_{X \cup Y}.$$

Если же $Y \subseteq X$, то

$$d^{\cap}(X, Y) = p_Y - p_X,$$

так как тогда $X \cup Y = X$. В частности, для расстояния события $x$ до множества событий $X$ формула имеет вид

$$d^{\cap}(x, X) = d^{\cap}(\{x\}, X) = p_{\{x\}} + p_X - 2p_{X \cup \{x\}},$$

а если $x \in X$, то

$$d^{\cap}(x, X) = p_{\{x\}} - p_X.$$

Заметим еще, что

$$\Delta_X^{\cup} + \Delta_X^{\cap} = |X| \left\{ \mathbf{P}\left( \bigcup_{x \in X} x \right) - \mathbf{P}\left( \bigcap_{x \in X} x \right) \right\} = |X| \cdot (u_X - p_X).$$

### 8.8.4 Свойства сет-расстояния

1. Неотрицательность. Сет-расстояние — неотрицательная сет-функция:

$$\Delta_X \geqslant 0, \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Это следует из того, что

$$\Delta_X = \sum_{x \in X} \left\{ \mathbf{P}\left( \bigcup_{x \in X} x \right) - \mathbf{P}(x) \right\},$$

а для любого $X \subseteq \mathfrak{X}$ и каждого $x \in X$

$$\mathbf{P}\left( \bigcup_{x \in X} x \right) - \mathbf{P}(x) \geqslant 0.$$

2. Неравенство треугольника. Сет-расстояние должно удовлетворять неравенству треугольника, которое можно пытаться записать несколькими способами. Нами выбрано неравенство следующего вида:

$$\Delta_{X\cap\{x\}^c} + \Delta_{X\cap\{y\}^c} \geqslant \Delta_{X\cap\{z\}^c}, \tag{3}$$

которое выполняется для любого $X \subseteq \mathfrak{X}$ любых $x, y, z \in X$. Заметим, что условие $x, y, z \in X$, скорее всего, можно ослабить: $x, y, z \in \mathcal{F}$.

В частности, когда $X$ — триплет: $X = \{x, y, z\}$, тогда $X \cap \{z\}^c = \{x, y\}$, $X \cap \{y\}^c = \{x, z\}$, $X \cap \{x\}^c = \{y, z\}$, и неравенство (3) превращается в обычное неравенство треугольника:

$$\Delta_{xz} + \Delta_{yz} \geqslant \Delta_{xy},$$

которое выполняется и означает, что

$$\mathbf{P}(x\triangle z) + \mathbf{P}(y\triangle z) \geqslant \mathbf{P}(x\triangle y).$$

Если договориться обозначать

$$X - x = X \cap \{x\}^c,$$

то неравенство (3) можно записать лаконичнее:

$$\Delta_{X-x} + \Delta_{X-y} \geqslant \Delta_{X-z}. \tag{3'}$$

Заметим, что в этом неравенстве множество $X$, вроде бы, должно содержать триплет $\{x, y, z\}$. Хотя это условие, скорее всего, можно убрать.

### 8.8.5 Неравенства треугольника для сет-расстояния

Здесь мы не будем доказывать неравенство треугольника для сет-расстояния[3]

$$\Delta_{X'-x} + \Delta_{X'-y} \geqslant \Delta_{X'-z},$$

где

$$X' = X + \{x, y, z\} \subseteq \mathfrak{X},$$

[3]За полным доказательством неравенства треугольника для сет-расстояния отошлем читателя к нашей работе [61].

которое можно переписать в эквивалентном виде

$$\Delta_{X+\{y,z\}} + \Delta_{X+\{x,z\}} \geqslant \Delta_{X+\{x,y\}}, \qquad (3'')$$

где $X \subseteq \{x,y,z\}^c = \mathfrak{X} \setminus \{x,y,z\}$, а сформулируем лишь ряд утверждений, имеющих к нему отношение.

Лемма.

$$\Delta_X = \sum_{m=1}^{|X|} (|X| - m)\mathbf{P}\left(C_X^m\right).$$

Лемма (неравенство треугольника для сет-расстояния по объединению). *Для каждого $X \subseteq \mathcal{F}$ и любых $x, y, z \in \mathcal{F}$*

$$\Delta_{X+\{y,z\}} + \Delta_{X+\{x,z\}} \geqslant \Delta_{X+\{x,y\}}. \qquad (3'')$$

Лемма (неравенство треугольника для сет-расстояния по пересечению). *Для каждого $X \subseteq \mathcal{F}$ и любых $x, y, z \in \mathcal{F}$*

$$\Delta^{\cap}_{X+\{y,z\}} + \Delta^{\cap}_{X+\{x,z\}} \geqslant \Delta^{\cap}_{X+\{x,y\}}. \qquad (3'')$$

### 8.8.6 Метрическое задание эвентологических распределений

Теорема (метрическое задание эвентологических распределений). *Любое эвентологическое распределение множества случайных событий $\mathfrak{X}$ определяется заданием всех вероятностей событий $\mathbf{P}(x)$, $x \in \mathfrak{X}$ и всех сет-расстояний $\Delta_X$, $X \subseteq \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Из (1) легко получить распределение вероятностей объединений:

$$u_X = \frac{1}{|X|}\left(\Delta_X + \sum_{x \in X} \mathbf{P}(x)\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

т.е. одно из эвентологических распределений множества случайных событий $\mathfrak{X}$, которое в условиях теоремы (когда заданы все вероятности событий и все сет-расстояния) определено для всех $X \subseteq \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Доказанная теорема, справедливая для любого эвентологического распределения, рискует остаться довольно тривиальным утверждением, если с ее помощью не удастся выделить специальные классы *метрических эвентологических распределений*, определяемые той

или иной сет-метрикой. Разумеется, как только один из таких классов будет построен, станут известны и другие способы задания распределений из «вновь обнаруженного» класса, в том числе и классические — при помощи распределений вероятностей пересечений или объединений. Но можно с уверенностью заявить, что эвентологическое распределение будет иметь полное право называться *метрическим*, если оно «всего лишь» обнаружено при помощи сет-метрики.

## 8.9 Дискретные многомерные распределения: эвентологический подход

Предполагается впервые дать определения двух *дискретных многомерных распределений*: *биномиального* и *пуассоновского*, которые до сих пор не встречались в теории вероятностей и определения которых естественным образом возникли в рамках эвентологического подхода.

Предлагаемое *биномиальное многомерное распределение*, по-видимому, наиболее подходит на роль многомерного обобщения биномиального распределения в отличие от давно известного в теории вероятностей полиномиального (мультиномиального) распределения. Хотя последнее и считается в теории вероятностей обобщением биномиального и многомерно, но, как будет показано ниже, есть мало оснований считать его *многомерным обобщением* биномиального распределения, каковым с очевидностью является *биномиальное многомерное распределение*, о котором идет речь.

Подобные же комментарии относятся и к *пуассоновскому многомерному распределению*, также до сих пор не встречавшемуся в теории вероятностей в предлагаемой форме, которая позволяет наиболее полно описывать структуру зависимостей рассматриваемых случайных элементов.

### 8.9.1 Биномиальное многомерное распределение

Напомним классические определения и свойства биномиального и полиномиального распределения.

**Биномиальное распределение**

Биномиальное распределение — дискретное распределение вероятностей случайной величины $\xi$, принимающей целочисленные значения $k = 0, \ldots, n$ с вероятностями $p_k = \mathbf{P}(\xi = k) = b_k(n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где $0 \leq p \leq 1$ — параметр биномиального распределения, иногда называемый «вероятностью положительного исхода»; одно из основных распределений вероятностей, порождаемых конечным множеством независимых случайных экспериментов (испытаний).

*Традиционная интерпретация.* Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — последовательность независимых случайных величин (так называемых бернуллиевских случайных величин), каждая из которых может принимать лишь два значения 1 и 0 с вероятностями $p$ и $1-p$ соответственно. Случайные величины $\beta_i$ можно трактовать как результаты независимых испытаний, причем $\beta_i = 1$ в случае «положительного исхода» и $\beta_i = 0$ в случае «отрицательного исхода» $i$-го испытания. Если общее количество испытаний фиксировано, то такая схема называется *испытаниями Бернулли*, причем суммарное количество «положительных исходов» $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\omega)$, подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n, p$.

*Эвентологическая интерпретация.* Проводится множество из $n$ случайных экспериментов. В результате $k$-го эксперимента событие $x_k$ наступает с вероятностью $p = \mathbf{P}(x_k)$ или не наступает с вероятностью $1-p = \mathbf{P}(x_k^c)$; все вместе эти события образуют множество событий $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, независимых в совокупности. Такая схема проведения экспериментов называется *схемой испытаний Бернулли.* Случайная величина $\xi(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}}^{n} \mathbf{1}_x(\omega)$, равная сумме индикаторов событий из $\mathfrak{X}$ и интерпретируемая как число событий из множества $\mathfrak{X}$, наступающих в результате $n$ независимых случайных экспериментов, подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n, p$.

*Производящая функция* биномиального распределения — $n$-ая степень бинома $(pw + (1-p))$, разложение которой в сумму по формуле *бинома Ньютона (отсюда название «биномиальное распределение»)*

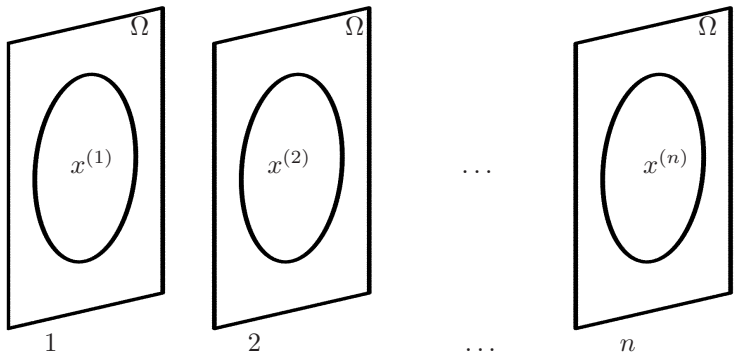



Рис. 8.3. Схема испытаний Бернулли, определяющая биномиальное распределение с параметрами $(n; p_x)$.

имеет вид:

$$(pw + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} b_k w^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p_k (1-p)^{n-k} w^k.$$

*Моменты* биномиального распределения выражаются формулами: $\mathbf{E}\xi = np$, $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - np)^2 = np(1-p)$, $\mu_3 = \mathbf{E}(\xi - np)^3 = np(1-p)(1-2p)$; *асимметрия* $\gamma_1 = (1-2p)/\sqrt{np(1-p)}$, *эксцесс* $\gamma_2 = (1-6p(1-p))/np(1-p)$. *Характеристическая функция* $f(t) = (1+p(e^{it}-1))^n$. Функция распределения биномиальной случайной величины имеет вид

$$F(u) = \mathbf{P}(\xi \le u) = \sum_{k=0}^{[u]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где $[u]$ — целая часть $u \in [-\infty, +\infty]$.

Справедливо так называемое «нормальное приближение»

$$F(u) = \Phi\left[\frac{u - np + 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right] + R_n(u,p),$$

где $\Phi$ — функция распределения стандартного нормального распределения, а $R_n(u,p) = O(n^{-1/2})$ равномерно для всех $u$. Существуют

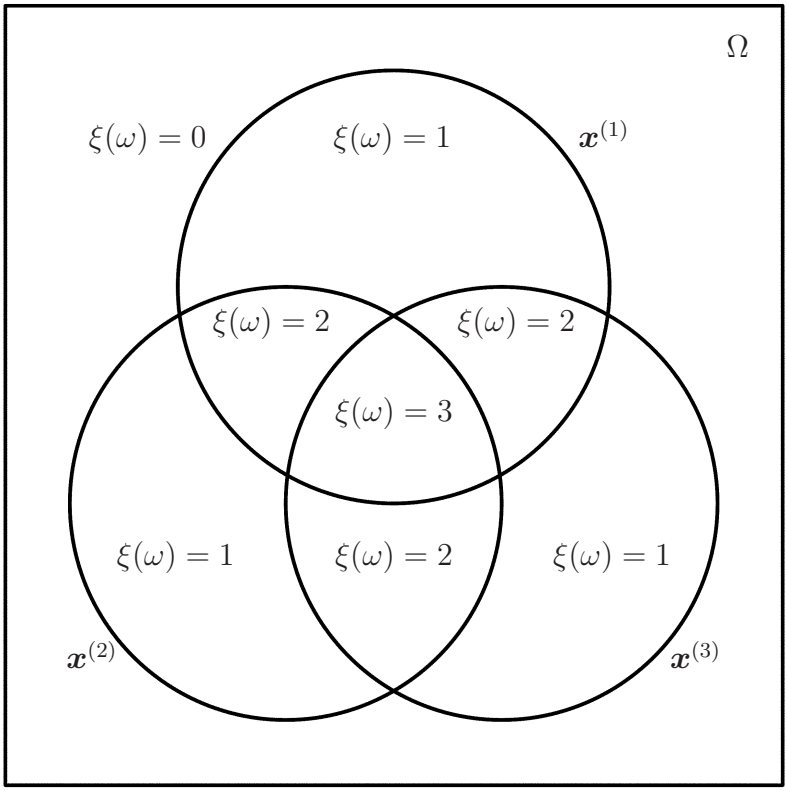



Рис. 8.4. Сумма индикаторов событий $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x^{(i)}}(\omega)$ — случайная величина, порождаемая триплетом событий $\mathfrak{X} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$.

и другие нормальные приближения биномиального распределения с остатками более высокого порядка точности.

При $n \to \infty$ функция биномиального распределения $F$ выражается в терминах функции $\Phi$ стандартного нормального распределения асимптотической формулой (теорема Муавра-Лапласа)

$$F(u) = \frac{1}{B([u]+1, n-[u])} \int_0^1 t^{[u]}(1-t)^{n-[u]-1} dt,$$

где $B(a, b)$ — бета-функция Эйлера.

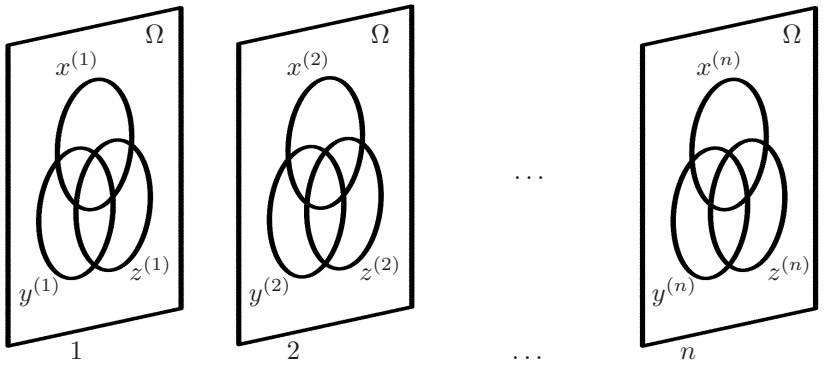



Рис. 8.5. Схема испытаний Бернулли, порожденная триплетом событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$, определяющая биномиальное 3-мерное распределение общего вида с параметрами $(n;\ p(x), p(y), p(z), p(xy), p(xz), p(yz), p(xyz))$.

Если количество независимых экспериментов $n$ велико, а вероятность $p$ мала, то биномиальные вероятности $b_k(n,p)$ приближенно выражаются в терминах распределения Пуассона:

$$b_k(n,p) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

При этом если $n \to \infty$ и $0 < c \le u \le C$, то равномерно относительно всех $p$ из открытого интервала имеет место асимптотическая формула

$$F(u) = \sum_{k=0}^{[u]} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + O(n^{-2}),$$

где $\lambda = (2n - [u])p/(2-p)$.

Многомерным обобщением биномиального распределения в теории вероятностей считается *полиномиальное (мультиномиальное) распределение.*

### Полиномиальное (мультиномиальное) распределение

Полиномиальное распределение (мультиномиальное распределение) — совместное распределение вероятностей случайных величин $\xi_1, \ldots,$

$\xi_k$, принимающих целые неотрицательные значения $n_1, \ldots, n_k$, удовлетворяющие условиям $n_1 + \ldots + n_k = n$, с вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi_1 = n_1, \ldots, \xi_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k},$$

где $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; является многомерным дискретным распределением случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, такого, что $\xi_1 + \ldots + \xi_n = n$ (по существу это распределение является $(k-1)$-мерным, так как в пространстве $\mathbb{R}^k$ оно вырождено); естественным (с точки зрения современной теории вероятностей) образом обобщает *биномиальное распределение* и совпадает с ним при $n = 2$. Название «полиномиальное распределение» объясняется тем, что полиномиальная вероятность является общим членом разложения полинома (многочлена) $(p_1 + \ldots + p_k)^n$.

*Традиционная интерпретация.* Полиномиальное распределение появляется в так называемой *полиномиальной схеме* случайных экспериментов: каждая из случайных величин $\xi_j$ — это число наступлений одного из взаимоисключающих событий $x_j, j = 1, \ldots, k$, при повторных независимых экспериментах. Если в каждом эксперименте вероятность наступления события $x_j$ равна $p_j$, то полиномиальная вероятность равна вероятности того, что при $n$ экспериментах события $x_1, \ldots, x_k$ наступят $n_1, \ldots, n_k$ раз соответственно. Каждая из случайных величин $\xi_i$ имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $np_i$ и дисперсией $np_i(1 - p_i)$.

*Эвентологическая интерпретация.* Проводится $n$ случайных экспериментов. В результате каждого ($i$-го) эксперимента наступают события из множества $\mathfrak{X}_i = \{x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}\}$, состоящего из $k$ непересекающихся событий, образующих разбиение $\Omega$ и наступающих соответственно с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$ $(p_1 + \ldots + p_k = 1)$, которые не меняются от эксперимента к эксперименту. Такая схема проведения экспериментов называется *полиномиальной схемой испытаний.*

Случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, составленный из случайных величин

$$\xi_j(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x_j^{(i)}}(\omega), \quad j = 1, \ldots, k,$$

равных сумме индикаторов событий $x_j^{(i)}, i = 1, \ldots, n$, наступающих с вероятностью $p_j$, и интерпретируемых как число событий из $x_j^{(1)}, \ldots,$

$x_j^{(n)}$, наступающих в результате $n$ независимых случайных экспериментов, подчиняется полиномиальному распределению с параметрами $n, p_1, \ldots, p_k$, т.е. полиномиальная вероятность — это вероятность того, что $\xi_1 = n_1, \ldots, \xi_k = n_k$, где $n_1 + \ldots + n_k = n$.

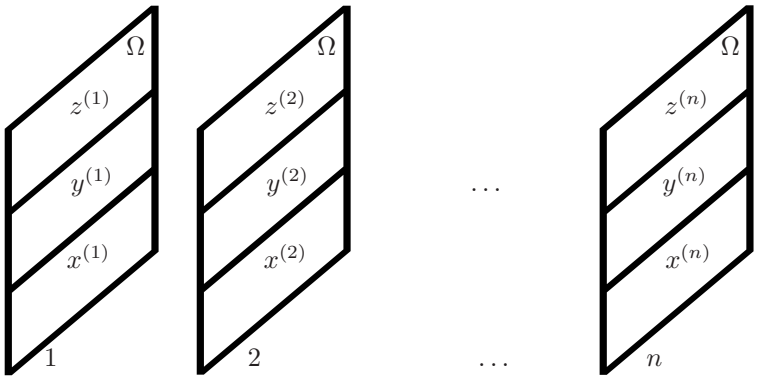



Рис. 8.6. Полиномиальная схема испытаний Бернулли, определяющая полиномиальное распределение с параметрами $(n; p_x, p_y, p_z)$.

Случайный вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет математическое ожидание $(np_1, \ldots, np_k)$ и ковариационную матрицу $B = \|b_{ij}\|$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} np_i(1-p_i), & i = j, \\ -np_ip_j, & i \neq j. \end{cases}$$

Ранг матрицы $B$ равен $k-1$ в силу того, что $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

*Характеристическая функция*:

$$f(t_1, \ldots, t_k) = \left(p_1 e^{it_1} + \ldots + p_k e^{it_k}\right)^n.$$

При $n \to \infty$ распределение случайного вектора $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ с нормированными компонентами $\eta_i = (\xi_i - np_i)/\sqrt{np_i(1-p_i)}$ стремится к некоторому многомерному нормальному распределению, а распределение суммы $\sum_{i=1}^k (1-p_i)\eta_i^2$, которая используется в математической статистике при построении $\chi^2$-критерия, стремится к $\chi^2$-распределению с $k-1$ степенями свободы.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $z^{(2)}$ | $(1,0,1)$ | $(0,1,1)$ | $(0,0,2)$ | $\Omega$ |
| $y^{(2)}$ | $(1,1,0)$ | $(0,2,0)$ | $(0,1,1)$ | |
| $x^{(2)}$ | $(2,0,0)$ | $(1,1,0)$ | $(1,0,1)$ | |
| | $x^{(1)}$ | $y^{(1)}$ | $z^{(1)}$ | |

Рис. 8.7. Значения случайного вектора на $\Omega$, подчиняющегося двумерному ($n = 2$) полиномиальному (триномиальному: $|\mathfrak{X}| = N = 3$) распределению. Пространство $\Omega$ разбито пересечениями событий из двух множеств $\mathfrak{X}^{(1)} = \{x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\}$ и $\mathfrak{X}^{(2)} = \{x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}\}$.

### Биномиальное многомерное распределение

Пусть проводится конечная последовательность из $n$ независимых случайных экспериментов. В результате $i$-го эксперимента могут наступить или нет события из $N$-множества $\mathfrak{X}^{(i)}$ событий $x^{(i)} \in \mathfrak{X}^{(i)}$. Эвентологические распределения множеств событий $\mathfrak{X}^{(i)}, i = 1, \ldots, n$, совпадают с одним и тем же эвентологическим распределением $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ некоторого $N$-множества $\mathfrak{X}$ событий $x \in \mathfrak{X}$, которое не меняется от эксперимента к эксперименту. Такая схема проведения экспериментов называется *многомерной (эвентологической) схемой испытаний Бернулли с порождающим множеством событий* $\mathfrak{X}$. Тогда каждая из случайных величин

$$\xi_x(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x^{(i)}}(\omega), \quad x^{(i)} \in \mathfrak{X}^{(i)}, \quad x \in \mathfrak{X},$$

подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n, p_x = \mathbf{P}(x)$, а случайный вектор[4] $\widehat{\xi} = (\xi_x,\ x \in \mathfrak{X})$ подчиняется *биномиальному многомерному ($N$-мерному) распределению* с параметрами $n, \{p(X),\ \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Вероятности *биномиального многомерного распределения, порожденного $N$-множеством событий* $\mathfrak{X}$, определяются для любого целочисленного набора $\widehat{n} = (n_x,\ x \in \mathfrak{X}) \in [0, n]^N$ формулой

$$b_{\widehat{n}}(n; p(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}) = \mathbf{P}(\widehat{\xi} = \widehat{n}) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x,\ x \in \mathfrak{X}) =$$

$$= \sum_{\check{n}} m_{\check{n}}(n; \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}),$$

где

$$m_{\check{n}}(n; \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}) = \mathbf{P}(\check{\xi} = \check{n}) =$$

$$= \mathbf{P}\Big((\xi(X), X \subseteq \mathfrak{X}) = (n(X), X \subseteq \mathfrak{X})\Big) = \frac{n!}{\prod\limits_{X \subseteq \mathfrak{X}} n(X)!} \prod_{X \subseteq \mathfrak{X}} [p(X)]^{n(X)}$$

— вероятности $2^N$-мерного мультиномиального распределения случайного вектора $\check{\xi} = (\xi(X),\ X \subseteq \mathfrak{X})$ с параметрами $(n; \{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\})$, порожденного $2^N$-множеством событий-террасок $\Big\{\mathrm{ter}(X), X \subseteq \mathfrak{X}\Big\}$, которое взаимно-однозначно соответствует данному биномиальному многомерному распределению. Суммирование проводится по всем $2^N$-мерным наборам $\check{n} = (n(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}) \in \mathcal{S}^{2^N}$, из $2^N$-вершинного симплекса $\mathcal{S}^{2^N}$, т.е. таким, что $n = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} n(X)$, но для которых выполнены еще $N$ равенств $n_x = \sum_{x \in X} n(X), \quad x \in \mathfrak{X}$.

**Биномиальное одномерное распределение**. При $N = 1$ (когда *порождающее множество* $\mathfrak{X} = \{x\}$ — моноплет событий) биномиальное одномерное распределение случайной величины $\xi_x$ совпадает с классическим биномиальным распределением с параметрами $(n; p_x)$. Иначе говоря, вероятности *биномиального одномерного распределения* имеют классический вид

$$b_{n_x}(n; p_x) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x) = C_n^{n_x} p_x^{n_x} (1 - p_x)^{n - n_x}, \quad 0 \leq n_x \leq n.$$

[4] В эвентологии вообще и в данном контексте в частности понятие «вектор» используется в расширенном смысле: как *неупорядоченное* конечное множество, или *неупорядоченный* конечный набор, неких элементов.

**Биномиальное двумерное распределение**. При $N = 2$ (когда *порождающее множество* $\mathfrak{X} = \{x, y\}$ — дуплет событий) *биномиальное двумерное распределение* случайного вектора $\widehat{\xi} = (\xi_x, \xi_y) = (\xi_x, x \in \mathfrak{X})$ определяется четырьмя параметрами $\Big(n; p(x), p(y), p(xy)\Big)$, где[5]

$$p(x) = \mathbf{P}(x \cap y^c), \quad p(y) = \mathbf{P}(x^c \cap y), \quad p(xy) = \mathbf{P}(x \cap y).$$

Вероятности *биномиального двумерного распределения* вычисляются для любого целочисленного вектора $\widehat{n} = (n_x, n_y) \in [0, n]^2$ по формуле

$$b_{\widehat{n}}(n; p(x), p(y), p(xy)) = \mathbf{P}(\widehat{\xi} = \widehat{n}) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x,\ \xi_y = n_y) =$$

$$= \sum_{n(xy)=\max\{0, n_x+n_y-n\}}^{\min\{n_x, n_y\}} m_{\check{n}}(n; p(\varnothing), p(x), p(y), p(xy)),$$

где

$$m_{\check{n}}(n; p(\varnothing), p(x), p(y), p(xy)) = \mathbf{P}(\check{\xi} = \check{n}) =$$

$$= \mathbf{P}\Big((\xi(\varnothing), \xi(x), \xi(y), \xi(xy)) = (n(\varnothing), n(x), n(y), n(xy))\Big) =$$

$$= \frac{n!}{n(\varnothing)!n(x)!n(y)!n(xy)!}[p(\varnothing)]^{n(\varnothing)}[p(x)]^{n(x)}[p(y)]^{n(y)}[p(xy)]^{n(xy)}$$

— вероятности 4-мерного мультиномиального распределения случайного вектора $\check{\xi} = (\xi(\varnothing), \xi(x), \xi(y), \xi(xy))$ с параметрами $(n; p(\varnothing), p(x), p(y), p(xy))$, а суммирование проводится по всем наборам $\check{n} = (n(\varnothing), n(x), n(y),\ n(xy))$, таким, что $n = n(\varnothing) + n(x) + n(y) + n(xy)$, для которых выполнены еще 2 равенства $n_x = n(x) + n(x, y), \quad n_y = n(y) + n(x, y)$, и может быть сведено к суммированию по одному параметру $n(x, y)$ в границах Фреше, поскольку при фиксированных $n_x$ и $n_y$ все величины $n(\varnothing), n(x), n(y), n(xy)$ можно выразить через один параметр, например, $n(xy)$:

$$n(x) = n_x - n(xy),\ n(y) = n_y - n(xy),\ n(\varnothing) = n - n_x - n_y + n(xy),$$

[5] Очевидно, что $p(x)+p(y)+p(xy) = 1-p(\varnothing)$. Ниже используются обозначения $p_x = \mathbf{P}(x) = p(x) + p(xy)$, $p_y = \mathbf{P}(y) = p(y) + p(xy)$, $\mathsf{Kov}_{xy} = p(xy) - p_x p_y$, $\sigma_x^2 = p_x(1 - p_x)$, $\sigma_y^2 = p_y(1 - p_y)$.

который меняется в пределах границ Фреше:

$$\max\{0, n_x + n_y - n\} \le n(xy) \le \min\{n_x, n_y\}.$$

Формулу можно также записать в виде:

$$b_{\widehat{n}}(n; p(x), p(y), p(xy)) = \mathbf{P}(\widehat{\xi} = \widehat{n}) = [p(\varnothing)]^n \, [\tau(x)]^{n_x} \, [\tau(y)]^{n_y} \times$$

$$\times \sum_{n(xy)=\max\{0, n_x+n_y-n\}}^{\min\{n_x, n_y\}} \mathcal{C}_n^{n(x,y)}(\widehat{n}) \, [\tau(x,y)]^{n(xy)},$$

где

$$\mathcal{C}_n^{n(x,y)}(\widehat{n}) = \frac{n!}{(n - n_x - n_y + n(xy))!(n_x - n(xy))!(n_y - n(xy))!n(xy)!}$$

— *двумерный биномиальный коэффициент*, а

$$\tau(x) = \frac{p(x)}{p(\varnothing)}, \ \tau(y) = \frac{p(y)}{p(\varnothing)}, \ \tau(x,y) = \frac{p(\varnothing)p(xy)}{p(x)p(y)}$$

— *мультковариации* первого и второго порядка событий $x$ и $y$.

Вектор математических ожиданий биномиального двумерного случайного вектора $(\xi_x, \xi_y)$ равен $(\mathbf{E}\xi_x, \mathbf{E}\xi_x) = (np_x, np_y)$, а его ковариационная матрица выражается через ковариационную матрицу случайного вектора $(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y)$ индикаторов событий из *порождающего множества* $\mathfrak{X} = \{x, y\}$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} np_x(1-p_x) & n\mathsf{Kov}_{xy} \\ n\mathsf{Kov}_{xy} & np_y(1-p_y) \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} p_x(1-p_x) & \mathsf{Kov}_{xy} \\ \mathsf{Kov}_{xy} & p_y(1-p_y) \end{pmatrix}$$

Ковариационная матрица центрированного и нормированного биномиального двумерного случайного вектора

$$\left( \frac{\xi_x - np_x}{\sigma_x}, \frac{\xi_y - np_y}{\sigma_y} \right)$$

выражается через ковариационную матрицу случайного вектора

$$\Big( (\mathbf{1}_x - p_x)/\sigma_x, \ (\mathbf{1}_y - p_y)/\sigma_y \Big)$$

центрированных и нормированных индикаторов событий из $\mathfrak{X} = \{x, y\}$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} n & n\rho_{xy} \\ n\rho_{xy} & n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy} \\ \rho_{xy} & 1 \end{pmatrix},$$

где $\rho_{xy} = \mathsf{Cov}_{xy}/\sigma_x\sigma_y$ — коэффициент корреляции случайных величин $\mathbf{1}_x$ и $\mathbf{1}_y$ — индикаторов событий из $\mathfrak{X} = \{x, y\}$.

**Характеристики биномиального многомерного распределения**. Вектор математических ожиданий биномиального многомерного случайного вектора $(\xi_x, x \in \mathfrak{X})$ равен $(\mathbf{E}\xi_x, x \in \mathfrak{X}) = (np_x, x \in \mathfrak{X})$, а его ковариационная матрица выражается через ковариационную матрицу случайного вектора $(\mathbf{1}_x, x \in \mathfrak{X})$ индикаторов событий из *порождающего множества* $\mathfrak{X}$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} n\sigma_x^2 & \dots & n\mathsf{Kov}_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ n\mathsf{Kov}_{xy} & \dots & n\sigma_y^2 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \dots & \mathsf{Kov}_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathsf{Kov}_{xy} & \dots & \sigma_y^2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_x^2 = p_x(1 - p_x), \quad \mathsf{Kov}_{xy} = -p_x p_y, \ x \neq y.$

Ковариационная матрица порожденного разбиением центрированного и нормированного биномиального многомерного случайного вектора

$$\left(\frac{\xi_x - np_x}{\sigma_x}, x \in \mathfrak{X}\right)$$

выражается через ковариационную матрицу случайного вектора

$$\left((\mathbf{1}_x - p_x)/\sigma_x, \ x \in \mathfrak{X}\right)$$

центрированных и нормированных индикаторов событий из $\mathfrak{X}$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} n\sigma_x^2 & \dots & n\rho_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ n\rho_{xy} & \dots & n\sigma_y^2 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \dots & \rho_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{xy} & \dots & \sigma_y^2 \end{pmatrix},$$

где $\rho_{xy} = \mathsf{Cov}_{xy}/\sigma_x\sigma_y = -p_x p_y/\sigma_x\sigma_y$ — коэффициент корреляции случайных величин $\mathbf{1}_x$ и $\mathbf{1}_y$ — индикаторов событий из $\mathfrak{X}$.

**Полиномиальное распределение — частный случай биномиального многомерного распределения, когда последнее**

**порождается разбиением пространства элементарных событий**. Когда *порождающее $N$-множество* $\mathfrak{X}$ составлено из событий, образующих разбиение: $\Omega = \sum_{x\in\mathfrak{X}} x$, *биномиальное многомерное распределение* случайного вектора $\widehat{\xi} = (\xi_x, x \in \mathfrak{X})$ определяется $N$ параметрами[6] $(n; p_x, x \in \mathfrak{X})$, где $p_x = \mathbf{P}(x)$, $\sum_{x\in\mathfrak{X}} p_x = 1$, и представляет из себя полиномиальное распределение с данными параметрами.

Отсюда вероятности *биномиального многомерного распределения, порожденного разбиением* $\Omega$, определяются для любого целочисленного вектора $\widehat{n} = (n_x, x \in \mathfrak{X})$ из симплекса $\mathcal{S}^N$ (т.к. $\sum_{x\in\mathfrak{X}} n_x = n$) такой же формулой, что и вероятности соответствующего полиномиального распределения

$$b_{\widehat{n}}(n; p_x, x \in \mathfrak{X}) = \mathbf{P}(\widehat{\xi} = \widehat{n}) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x, x \in \mathfrak{X}) = \frac{n!}{\prod\limits_{x\in\mathfrak{X}} n_x!} \prod_{x\in\mathfrak{X}} [p_x]^{n_x}.$$

**Биномиальное $N$-мерное распределение, заданное множеством $\mathfrak{X}$, определяет $2^N$-мерное полиномиальное, заданное множеством событий-террасок $\{\mathrm{ter}(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$, но не наоборот**. *Многомерная ($N$-мерная) схема $n$ испытаний Бернулли с порождающим множеством событий* $\mathfrak{X}$, которое подчиняется эвентологическому распределению $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$, определяет $N$ случайных величин

$$\xi_x(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{x^{(i)}}(\omega), \quad x^{(i)} \in \mathfrak{X}^{(i)}, \quad x \in \mathfrak{X},$$

каждая из которых имеет биномиальное распределение с параметрами $n, p_x = \mathbf{P}(x)$, а все вместе образуют $N$-мерный случайный вектор $\widehat{\xi} = (\xi_x,\ x \in \mathfrak{X})$, распределенный по *биномиальному многомерному ($N$-мерному) закону* с $2^N$ параметрами $n, \{p(X),\ \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}\}$, в состав которых входит число испытаний $n$ и $2^N - 1$ вероятность из эвентологического распределения порождающего множества событий $\mathfrak{X}$ (иначе говоря, все $2^N$ вероятностей $p(X)$ за исключением одной: $p(\varnothing)$).

[6] Поскольку $\sum_{x\in\mathfrak{X}} p_x = 1$, то среди $N$ вероятностей только $N - 1$ можно выбирать независимо.

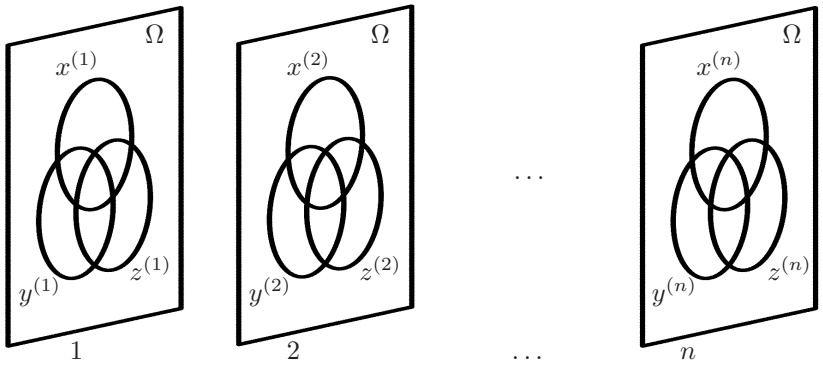



Рис. 8.8. Трехмерная схема $n$ испытаний Бернулли, порожденная триплетом событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$, определяющая 3-мерный случайный вектор $\widehat{\xi} = \{\xi_x, x \in \mathfrak{X}\}$, распределенный по биномиальному 3-мерному закону с параметрами $(n;\ p(x), p(y), p(z), p(xy), p(xz), p(yz), p(xyz))$; а также 8-мерный случайный вектор $\check{\xi} = \{\xi(\varnothing), \xi(x), \xi(y), \xi(z), \xi(xy), \xi(xz), \xi(yz), \xi(xyz)\}$, распределенный по полиномиальному 8-мерному закону с теми же параметрами, что и у биномиального 3-мерного распределения.

Та же многомерная схема $n$ испытаний Бернулли определяет $2^N$ случайных величин

$$\xi(X)(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\mathrm{ter}(X^{(i)})}(\omega), \quad X^{(i)} \subseteq \mathfrak{X}^{(i)}, \quad X \in \mathfrak{X},$$

каждая из которых имеет биномиальное распределение с параметрами $n, p(X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X))$, а все вместе образуют $2^N$-мерный случайный вектор $\check{\xi} = (\xi(X),\ X \subseteq \mathfrak{X})$ распределенный по *полиномиальному многомерному ($2^N$-мерному) закону*, порожденному множеством событий-террасок $\{\mathrm{ter}(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ и определяемому $2^N + 1$ параметром $n, \{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$, куда входит число испытаний $n$ и все $2^N$ вероятностей $p(X)$ из эвентологического распределения порождающего множества событий $\mathfrak{X}$.

Вероятности данных *биномиального и полиномиального многомерных распределений* связаны для любых $N$-мерных наборов неотрицательных чисел $\widehat{n} = \{n_x, x \in \mathfrak{X}\} \in [0, n]^N$ формулой $\mathbf{P}(\widehat{\xi} = \widehat{n}) = \sum_{\check{n}} \mathbf{P}(\check{\xi} = \check{n})$ где суммирование проводится по всем $2^N$-мерным наборам неотрицательных чисел $\check{n} = (n(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}) \in \mathcal{S}^{2^N}$, таким,

что $n = \sum_{X\subset\mathfrak{X}} n(X)$, для которых также выполнены $N$ равенств $n_x = \sum_{x\in X} n(X), \quad x \in \mathfrak{X}$.

**Замечание.** Любому биномиальному $N$-мерному распределению, порожденному множеством событий $\mathfrak{X}$, соответствует *единственное* полиномиальное $2^N$-мерное распределение, порожденное множеством соответствующих событий-террасок $\{\mathrm{ter}(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Обратное неверно: произвольному полиномиальному $2^N$-мерному распределению, порожденному $2^N$-множеством событий, образующих разбиение $\Omega$, соответствуют, вообще говоря, $(2^N)!$ биномиальных $N$-мерных распределений, порожденных $N$-множествами событий $\mathfrak{X}$, составленных из событий разбиения как из событий-террасок, что существенно зависит от способов нумерации событий разбиения подмножествами $X \subseteq \mathfrak{X}$ (общее число таких способов как раз и равно $(2^N)!$).

### 8.9.2 Многомерное распределение Пуассона

Многомерное распределение Пуассона — дискретное распределение вероятностей случайного вектора $\widehat{\xi} = (\xi_x,\ \mathfrak{X})$, принимающего значения $\widehat{n} = (n_x,\ \mathfrak{X})$ с вероятностями

$$\mathbf{P}(\widehat{\xi} = \widehat{n}) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x,\ x \in \mathfrak{X}) = \pi_{\widehat{n}}(\lambda(X),\ \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}) =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{\check{n}} \prod_{X\neq\varnothing} \frac{[\lambda(X)]^{n(X)}}{n(X)!},$$

где суммирование распространяется на такие наборы неотрицательных целых чисел $\check{n} = (n(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X})$, для которых справедливы $N$ равенств: $n_x = \sum\limits_{x\in X} n(X), \quad x \in \mathfrak{X}$, а $\{\lambda(X),\ \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — параметры: $\lambda(X)$ — среднее число наступления события-террасы

$$\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c,$$

иначе говоря, среднее число наступления всех событий из $X$ и ни одного из $X^c$;

$$\lambda = \sum_{X\neq\varnothing} \lambda(X)$$

— среднее число наступления хотя бы одного события из $\mathfrak{X}$, иначе говоря, среднее число наступления события $\bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}} x$ — объединения всех событий из $\mathfrak{X}$.

Например, при $\widehat{n} = (0,\dots,0)$

$$\mathbf{P}(\widehat{\xi} = (0,\dots,0)) = \mathbf{P}(\xi_x = 0,\ x\in\mathfrak{X}) = e^{-\lambda},$$

при $\widehat{n} = (0,\dots,0,n_x,0,\dots,0),\ x\in\mathfrak{X}$

$$\mathbf{P}(\widehat{\xi} = (0,\dots,0,n_x,0,\dots,0)) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x,\ \xi_y = 0, y\neq x) = e^{-\lambda}\frac{[\lambda(x)]^{n(x)}}{n(x)!}.$$

если же в векторе $\widehat{n}$ одна компонента $n_x$ фиксирована, а остальные произвольны: $\widehat{n} = (\cdot,\dots,\cdot,n_x,\cdot,\dots,\cdot),\ x\in\mathfrak{X}$, то получаем

$$\mathbf{P}(\widehat{\xi} = (\cdot,\dots,\cdot,n_x,\cdot,\dots,\cdot)) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x) = e^{-\lambda_x}\frac{[\lambda_x]^{n_x}}{n_x!}$$

— формулу одномерного распределения Пуассона с параметром $\lambda_x$ случайной величины $\xi_x$, где $\lambda_x = \sum_{x\in X}\lambda(X)$ для каждого $x\in\mathfrak{X}$ определяется параметрами многомерного распределения Пуассона.

*Эвентологическая интерпретация.* Проводится счётное множество независимых экспериментов, в результате каждого $n$-го эксперимента наступают события из множества $\mathfrak{X}$. Вероятности $p_x = \mathbf{P}(x)$ событий $x\in\mathfrak{X}$ малы — т.е. малы и вероятности $p(X),\ \varnothing\neq X\subseteq\mathfrak{X}$ порождаемых ими событий-террасок $\mathrm{ter}(X), \varnothing\neq X\subseteq\mathfrak{X}$, причём при $n\to\infty$ $np(X)\to\lambda(X),\quad \varnothing\neq X\subseteq\mathfrak{X}$. Тогда случайный вектор

$$\widehat{\xi} = (\xi_x,\ x\in\mathfrak{X}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{x^{(n)}},\ x\in\mathfrak{X}\right)$$

подчиняется многомерному ($N$-мерному) распределению Пуассона с параметрами $\{\lambda(X),\ \varnothing\neq X\subseteq\mathfrak{X}\}$.

**Замечание.** Неверно представлять, что вероятности стремятся к нулю так, что только в одном $n$-м испытании $np(X) = \lambda(X),\quad X\subseteq\mathfrak{X}$. На самом деле, правильнее считать, что стремление вероятностей к нулю таково, что данное соотношение выполнено *во всех первых $n$ испытаниях*. Таким образом, точнее говоря, случайный эксперимент заключается в том, что проводится *последовательность $n$-серий независимых испытаний (серий из $n$ испытаний)*, и данное

соотношение выполнено для всех испытаний из $n$-серии. Тогда $n$-серия определяет биномиальное многомерное ($N$-мерное) распределение с параметрами $(n; p(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X})$, которое при $n \to \infty$ стремится к многомерному ($N$-мерному) пуассоновскому с параметрами $(\lambda(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X})$.

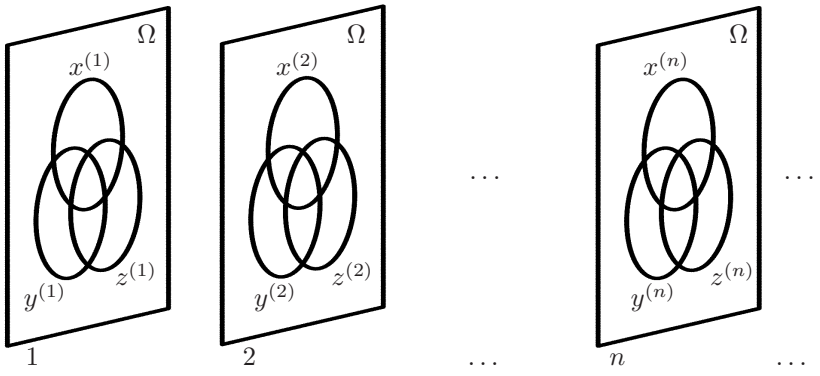



Рис. 8.9. Схема счетного ряда испытаний Бернулли, порожденная триплетом событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$, определяющая 3-мерное распределение Пуассона с параметрами $(\lambda(x), \lambda(y), \lambda(z), \lambda(xy), \lambda(xz), \lambda(yz), \lambda(xyz))$.

Вектор математических ожиданий многомерного распределения Пуассона равен $(\mathbf{E}\xi_x,\ x \in \mathfrak{X}) = (\lambda_x,\ x \in \mathfrak{X})$, где $\lambda_x = \sum_{x \in X} \lambda(X), \quad x \in \mathfrak{X}$. Поскольку $\mathsf{Cov}(\xi_x, \xi_y) = \lambda_{xy}$, где $\lambda_{xy} = \sum_{\{x,y\} \subseteq X} \lambda(X), \quad \{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$, то ковариационная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_x & \dots & \lambda_{xy} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{xy} & \dots & \lambda_y \end{pmatrix},$$

В двумерном варианте, когда $\mathfrak{X} = \{x, y\}$, суммирование происходит по одному параметру $n(xy) = n(\{x, y\})$, который меняется в пределах границ Фреше:

$$\mathbf{P}(\widehat{\xi} = \widehat{n}) = \mathbf{P}(\xi_x = n_x, \xi_y = n_y) =$$

$$= \pi_{\widehat{n}}(\lambda(x), \lambda(y), \lambda(xy)) = e^{-\lambda} \sum_{n(xy)=0}^{\min\{n_x, n_y\}} \frac{[\lambda(x)]^{n(x)}}{n(x)!} \frac{[\lambda(y)]^{n(y)}}{n(y)!} \frac{[\lambda(xy)]^{n(xy)}}{n(xy)!},$$

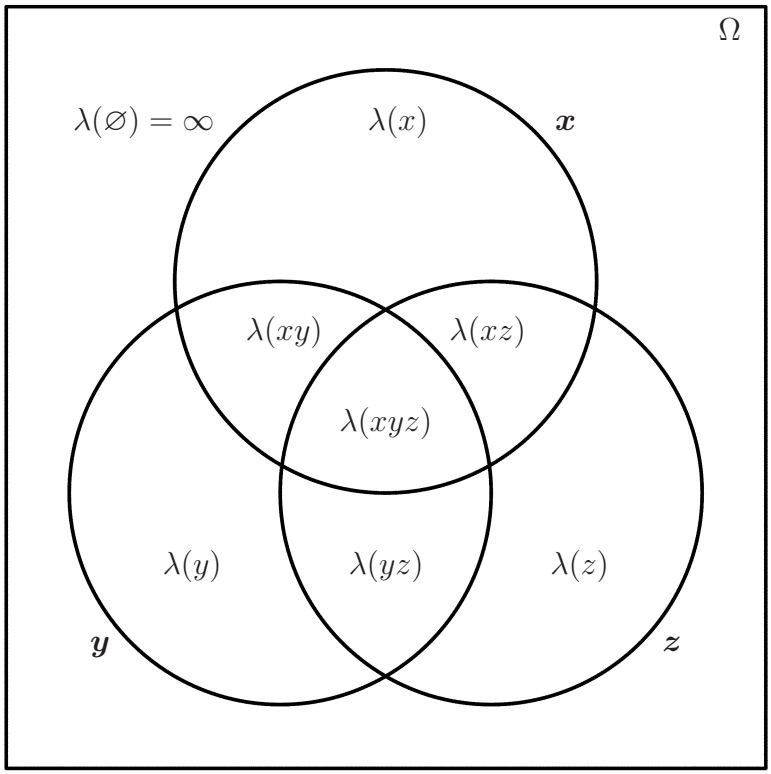



Рис. 8.10. Параметры $\lambda(x), \lambda(y), \lambda(z), \lambda(xy), \lambda(xz), \lambda(yz), \lambda(xyz)$ 3-мерного распределения Пуассона, порождённого триплетом событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$, имеют смысл среднего числа наступления соответствующих событий-террасок $\mathrm{ter}(x), \mathrm{ter}(y), \mathrm{ter}(z), \mathrm{ter}(xy), \mathrm{ter}(xz), \mathrm{ter}(yz), \mathrm{ter}(xyz)$. Величина $\lambda(\varnothing)$, хотя и не считается параметром, по определению полагается равной бесконечности как предельное число испытаний, в которых не наступило ни одно из событий.

где $n(x) = n_x - n(xy), n_y = n(y) - n(xy)$, а $\lambda = \lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(xy)$.

Вектор математических ожиданий двумерного распределения Пуассона равен $(\mathbf{E}\xi_x,\ \mathbf{E}\xi_y) = (\lambda_x,\ \lambda_y)$, где $\lambda_x = \lambda(x) + \lambda(xy), \quad \lambda_y = \lambda(y) + \lambda(xy)$, а ковариационная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda(xy) \\ \lambda(xy) & \lambda_y \end{pmatrix},$$

так как в двумерном варианте $\lambda_{xy} = \lambda(xy)$.

Центральные смешанные моменты произвольного порядка вычисляются по формулам (см. лемму ниже)

$$\mathbf{E}\prod_{x\in X}(\xi_x - \lambda_x) = \begin{cases} \lambda_X, & 2 \le |X| \le 3, \\ \lambda_{xyzw} + \lambda xy\lambda zw + \lambda xz\lambda yw + \lambda xw\lambda yz, & |X| = 4, \\ \dots \end{cases}$$

где $\lambda_X = \sum_{X\subseteq Y}\lambda(Y)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ величины, определяемые набором параметров $\{\lambda(X), \varnothing \ne X \subseteq \mathfrak{X}\}$ многомерного распределения Пуассона.

**Обращение Мёбиуса**:

$$\mathbf{E}\prod_{x\in X}\frac{\xi_x}{\lambda_x} = \sum_{Y\subseteq X}\mathbf{E}\prod_{x\in Y}\left(\frac{\xi_x}{\lambda_x} - 1\right),$$

$$\mathbf{E}\prod_{x\in X}\left(\frac{\xi_x}{\lambda_x} - 1\right) = \sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X-Y|}\mathbf{E}\prod_{x\in Y}\frac{\xi_x}{\lambda_x},$$

— две взаимно обратные формулы, которые связывают центральные смешанные моменты со смешанными моментами случайных величин $\xi_x, x \in X$, так как

$$\mathbf{E}\prod_{x\in X}\left(\frac{\xi_x}{\lambda_x} - 1\right) = \frac{\mathbf{E}\prod_{x\in X}(\xi_x - \lambda_x)}{\prod_{x\in X}\lambda_x} = \frac{\mathsf{Cov}(\xi_x, x \in X)}{\prod_{x\in X}\lambda_x},$$

$$\mathbf{E}\prod_{x\in X}\left(\frac{\xi_x}{\lambda_x}\right) = \frac{\mathbf{E}\prod_{x\in X}\xi_x}{\prod_{x\in X}\lambda_x}.$$

### Многомерное пуассоновское приближение

Если количество независимых экспериментов $n$ велико, а вероятности $p_x = \mathbf{P}(x)$ событий $x \in \mathfrak{X}$ малы, т.е. малы и вероятности $p(X)$, $\varnothing \ne X \subseteq \mathfrak{X}$ порождаемых ими событий-террасок $\mathrm{ter}(X), \varnothing \ne X \subseteq \mathfrak{X}$, то для любого набора целых чисел $\widehat{n} = (n_x,\ x \in \mathfrak{X}) \in [0, n]^N$

биномиальные вероятности приближенно выражаются в терминах *многомерного распределения Пуассона*:

$$b_{\widehat{n}}(n; p(X),\ \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}) \approx e^{-n\sum_{X\neq\varnothing} p(X)} \sum \prod_{X\neq\varnothing} \frac{(np(X))^{n(X)}}{n(X)!},$$

где суммирование распространяется на такие наборы $(n(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X})$, для которых $n \geq \sum_{X\subseteq\mathfrak{X}} n(X)$ и справедливы $N$ равенств: $n_x = \sum\limits_{x\in X} n(X), \quad x \in \mathfrak{X}$.

В двумерном варианте, когда $\mathfrak{X} = \{x, y\}$, суммирование происходит по одному параметру $n(xy) = n(\{x, y\})$, который меняется в пределах так называемых границ Фреше:

$$b_{\widehat{n}}(n; p(x), p(y), p(xy)) \approx e^{-n(p(x)+p(y)+p(xy))} \times$$

$$\times \sum_{n(xy)=0}^{\min\{n_x,n_y\}} \frac{[np(x)]^{n(x)}}{n(x)!} \frac{[np(y)]^{n(y)}}{n(y)!} \frac{[np(xy)]^{n(xy)}}{n(xy)!},$$

где $n(x) = n_x - n(xy), n_y = n(y) - n(xy)$.

**Теорема Пуассона (двумерный вариант).** Пусть $p_x \to 0,\ p_y \to 0$ при $n \to \infty$, причём

$$np(x) \to \lambda(x), \quad np(y) \to \lambda(y), \quad np(xy) \to \lambda(xy).$$

Тогда для любого набора целых чисел $\widehat{n} = (n_x, n_y) \in [0, n]^2$ при $n \to \infty$

$$b_{\widehat{n}}(n, p(x), p(y), p(xy)) \to \pi_{\widehat{n}}(\lambda(x), \lambda(y), \lambda(xy)),$$

где

$$\pi_{\widehat{n}}(\lambda(x), \lambda(y), \lambda(xy)) = e^{-\lambda(x)-\lambda(y)-\lambda(xy)} \times$$

$$\times \sum_{n(xy)=0}^{\min\{n_x,n_y\}} \frac{(\lambda(x))^{n(x)}}{n(x)!} \frac{(\lambda(y))^{n(y)}}{n(y)!} \frac{(\lambda(xy))^{n(xy)}}{n(xy)!}$$

— *двумерная пуассоновская вероятность*, и $n(x) = n_x - n(xy),\ n(y) = n_y - n(xy)$.

**Доказательство** вполне воспроизводимо.

**Доказательство**. Двумерная биномиальная вероятность

$$b_{\widehat{n}}(n; p(x), p(y), p(xy)) = \sum_{n(xy)=\{0, n_x+n_y-n\}}^{\min\{n_x, n_y\}} m_{\check{n}}(n; p(\varnothing), p(x), p(y), p(xy))$$

— это сумма четырехмерных мультиномиальных вероятностей

$$m_{\check{n}}(n; p(\varnothing), p(x), p(y), p(xy)) = \frac{n!}{n(\varnothing)!n(x)!n(y)!n(xy)!} \times$$

$$\times [p(\varnothing)]^{n(\varnothing)} [p(x)]^{n(x)} [p(y)]^{n(y)} [p(xy)]^{n(xy)},$$

когда параметр $n(xy)$ меняется в пределах границ Фреше. При больших $n$ значение левой границы Фреше $\max\{0, n_x + n_y - n\}$ равно 0, поэтому суммирование в этой формуле распространяется на такие $n(xy)$, для которых $0 \leq n(xy) \leq \min\{n_x, n_y\}$.

Покажем вид пуассоновского приближения мультиномиальных вероятностей

$$m_{(n(\varnothing), n(x), n(y), n(xy))}(n) = m_{(n(\varnothing), n(x), n(y), n(xy))}(n; p(\varnothing), p(x), p(y), p(xy)),$$

вывод которого мы начинаем. Для $n(x) = 0, n(y) = 0, n(xy) = 0$

$$m_{(n,0,0,0)}(n) = [p(\varnothing)]^n = (1 - \lambda/n)^n \,,$$

где $\lambda = \lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(xy)$. Переходя к логарифмам и используя разложение Тейлора находим

$$\log m_{(n,0,0,0)}(n) = n \log(1 - \lambda/n) = -\lambda - \lambda^2/(2n) - \cdots \,.$$

Так что для больших $n$

$$m_{(n,0,0,0)}(n) \approx e^{-\lambda} = e^{-\lambda(x) - \lambda(y) - \lambda(xy)},$$

где знак $\approx$ означает приближённое равенство (в данном случае с точностью до членов порядка $n^{-1}$). Далее видно, что для произвольных фиксированных $n(x), n(y), n(xy)$ и достаточно больших $n$ имеем

$$\frac{m_{(n(\varnothing), n(x), n(y), n(xy))}(n)}{m_{(n(\varnothing)+1, n(x)-1, n(y), n(xy))}(n)} = \frac{(n(\varnothing) + 1)}{np(\varnothing)} \frac{\lambda(x)}{n(x)} \approx \frac{\lambda(x)}{n(x)},$$

$$\frac{m_{(n(\varnothing),n(x),n(y),n(xy))}(n)}{m_{(n(\varnothing)+1,n(x),n(y)-1,n(xy))}(n)} = \frac{(n(\varnothing)+1)}{np(\varnothing)}\frac{\lambda(y)}{n(y)} \approx \frac{\lambda(y)}{n(y)},$$

$$\frac{m_{(n(\varnothing),n(x),n(y),n(xy))}(n)}{m_{(n(\varnothing)+1,n(x),n(y),n(xy)-1)}(n)} = \frac{(n(\varnothing)+1)}{np(\varnothing)}\frac{\lambda(xy)}{n(xy)} \approx \frac{\lambda(xy)}{n(xy)},$$

так как при больших $n$ имеют место приближения: $(n(\varnothing)+1)/n \approx 1, \quad p(\varnothing) \approx 1$.

Отсюда последовательно заключаем, что

$$m_{(n-1,1,0,0)}(n) \approx \lambda(x)e^{-\lambda}, \quad m_{(n-1,0,1,0)}(n) \approx \lambda(y)e^{-\lambda},$$

$$m_{(n-1,0,0,1)}(n) \approx \lambda(xy)e^{-\lambda},$$

и в общем случае по индукции получаем

$$m_{(n(\varnothing),n(x),n(y),n(xy))}(n) = \frac{\lambda(x)}{n(x)!}\frac{\lambda(y)}{n(y)!}\frac{\lambda(xy)}{n(xy)!}e^{-\lambda(x)-\lambda(y)-\lambda(xy)}$$

— пуассоновское приближение для четырехмерной мультиномиальной вероятности, из которого следует утверждение теоремы: пуассоновское приближение для двумерной биномиальной вероятности.

**Теорема Пуассона (многомерный вариант).** Пусть $p_x \to 0, \ x \in \mathfrak{X}$ при $n \to \infty$, причём $np(X) \to \lambda(X)$ для всех непустых подмножеств $\mathfrak{X}$: $\varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда для любого набора целых чисел $\widehat{n} = (n_x, x \in \mathfrak{X}) \in [0,n]^N$ при $n \to \infty$

$$b_{\widehat{n}}(n; p(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}) \to \pi_{\widehat{n}}(\lambda(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}),$$

где

$$\pi_{\widehat{n}}(\lambda(X), \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}) = e^{-\sum_{X\neq\varnothing}\lambda(X)} \sum_{\check{n}} \prod_{X\neq\varnothing} \frac{(\lambda(X))^{n(X)}}{n(X)!}$$

— *многомерная пуассоновская вероятность*, а суммирование распространяется на такие наборы $\check{n}$, для которых $n_x = \sum_{x\in X} n(X), \ x \in \mathfrak{X}$. **Доказательство** также несложно.

## 8.10 Заключение

Рассмотренные Э-распределения — это далеко не полный список распределений, встречающихся в эвентологических исследованиях. Каждое Э-распределение множества событий определяется и определяет соответствующую структуру зависимостей событий. В данный список распределений не включены два простых Э-распределения, определяющих *вложенную и наименее пересекающуюся* структуры зависимостей, занимающие крайние положения в диапазоне зависимостей множества событий. Примеры использования *Э-распределений вложенных и наименее пересекающихся множеств событий* можно найти в третьей части этой книги.

# Глава 9
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассматриваются начала эвентологической теории случайных процессов на примере обобщения пуассоновского процесса до эвентологического процесса, учитывающего структуру зависимостей множества событий, события-терраски которого определяют этот процесс.

## 9.1 Введение

Новое эвентологическое определение многомерных дискретных распределений — биномиального (см. стр. 167) и пуассоновского (см. стр. 181) — позволило по-новому определить многомерный пуассоновский процесс и говорить о начале развития теории эвентологических случайных процессов, которая предназначена для описания изменения во времени структур зависимости множеств событий, изучаемых эвентологией. Новизна эвентологической теории случайных процессов кроется в предположении, что в достаточно малый интервал времени может наступить подмножество событий[1] из некоторого фиксированного конечного множества событий. Такое весьма слабое предположение открывает возможность применить аппарат математической эвентологии для изучения динамики структур зависимости множеств событий.

[1] В классической теории случайных процессов обычно полагают, что в достаточно малый интервал времени может наступить не более одного события.

## 9.2 Пуассоновский процесс

Обозначим $\pi(t)$ — случайную величину, равную числу событий, наступивших за интервал $[0,t]$ — и допустим, что

$$\mathbf{P}(\pi(\Delta t)=n)=\begin{cases}0, & n<0,\\ 1-\lambda\Delta t+o(\Delta t), & n=0,\\ \lambda\Delta t+o(\Delta t), & n=1,\\ o(\Delta t), & n>1,\end{cases} \tag{1}$$

где $o(\Delta t)/\Delta t\to 0 \quad$ при $\quad \Delta t\to 0$, а $\lambda>0$ — среднее число событий, наступивших за единицу времени (интенсивность потока событий). Случайный процесс $\{\pi(t),\ t\in T\}$ называется *пуассоновским процессом.*

Итак, основными свойствами, определяющими пуассоновский процесс, являются следующие:

1) вероятности (1) не меняются со временем;

2) вероятность одновременного наступления двух и более событий пренебрежимо мала;

3) вероятность наступления событий в интервале $(t,t+h]$ не зависит от того, как вел себя процесс до момента $t$, в частности не зависит от времени, прошедшего с момента наступления предыдущего события.

Из свойств пуассоновского процесса следует, что

$$\mathbf{P}(\pi(t)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

— случайная величина $\pi(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda t$. В частности, вероятность того, что за интервал $[0,t]$ ни одно событие не наступит, равна $\mathbf{P}(\pi(t)=0)=e^{-\lambda t}$. Поэтому вероятность того, что наступит по крайней мере одно событие, равна $\mathbf{P}(\pi(t)\geqslant 1)=1-e^{-\lambda t}$. Интервал времени между наступлениями соседних событий — это случайная величина $\tau$, распределенная по экспоненциальному закону с ф.р.[2] $F(t)=\mathbf{P}(\tau\leqslant t)=1-e^{-\lambda t}$ и плотностью $f(t)=F'(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

[2] Действительно, $F(t)=\mathbf{P}(\tau\leqslant t)=1-\mathbf{P}(\tau>t)=1-\mathbf{P}(\pi(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$.

## 9.3 Многомерный пуассоновский процесс

Обозначим

$$\pi(t) = (\pi_x(t),\ x \in \mathfrak{X})$$

— случайный вектор, $x$-тая компонента которого $\pi_x(t)$ равна числу наступления события $x \in \mathfrak{X}$ за интервал $[0, t]$ и имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda_x t$, а сам случайный вектор имеет многомерное пуассоновское распределение с параметрами $\{\lambda(X)t,\ \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}\}$, где

$$\lambda_x = \sum_{x \in X} \lambda(X), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

*Многомерным пуассоновским процессом* называется семейство случайных векторов

$$\{\pi(t) = (\pi_x(t),\ x \in \mathfrak{X}),\ t \in T\},$$

каждый из которых имеет многомерное пуассоновское распределение с параметрами $\{\lambda(X)t,\ \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}\}$.

## 9.4 Эвентологические процессы пуассоновских событий

Допустим, что

$$\mathbf{P}(K(\Delta t) = X) = \begin{cases} 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), & X = \emptyset, \\ \lambda(X)\Delta t + o(\Delta t), & \varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}, \\ o(\Delta t), & X \not\subseteq \mathfrak{X}, \end{cases} \tag{2}$$

где $o(\Delta t)/\Delta t \to 0 \quad$ при $\quad \Delta t \to 0$,

$$\lambda = \sum_{\varnothing \neq X \subseteq \mathfrak{X}} \lambda(X),$$

а $\lambda(X) > 0$ — средние числа событий-террасок $\mathrm{ter}(X)$, наступивших за единицу времени (интенсивность потоков событий-террасок). *Событийно-террасно-значный*[3] случайный процесс

$$\{\mathrm{ter}(K(t)),\ t \in T\},$$

[3]Значениями *событийно-террасно-значного* случайного процесса служат события-терраски.

где

$$K(t) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

— случайные множества событий, называется *эвентологическим пуассоновским процессом множества событий* $\mathfrak{X}$.

Заметим, что в силу эвентологического принципа дуальности для любого $t \in T$

$$\mathbf{P}(K(t) = X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

## 9.5 Заключение

В предложенном тексте содержатся лишь определения эвентологического многомерного пуассоновского процесса, изучение его свойств откладывается до следующих публикаций.

# Глава 10
# ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ СОБЫТИЙ

*Теория нечетких событий* — одно из направлений эвентологии, убедительно демонстрирующее эффективность эвентологической теории в познании явлений и процессов, где главную роль играет разумный субъект. Эвентологическая теория нечетких событий естественным образом математически обосновывает и расширяет теорию нечетких множеств и теорию возможностей Заде [248, 256], а также теорию свидетельств Демпстера-Шафера [121, 214] как весьма частные и до сих пор эвентологически строго не обоснованные подходы в математическом описании неопределенности.

## 10.1 Введение

*Нечеткие* множества, *нечеткие* суждения, *нечеткие* выводы имеют место там и тогда, где и когда существует и чем-то интересуется разум. Теория нечетких множеств возникла как ответ на нечеткость языка, на котором говорит разум. Язык разума не может и не должен быть четким. Нечеткость языка порождается *нечеткими событиями*, которые создает разум и которыми оперирует рассудок. Из *нечетких событий* сложен фундамент эвентологии.

Идея эвентологического обоснования теории нечетких множеств Заде [248, 249] впервые высказана автором в 2004 [48]. Предложенная Лотфи Заде в 1965 теория нечетких множеств, уже успевшая за сорок лет стать классической и с поразительной легкостью освоить многие приложения, хотя и обладает давно всеми замеченными очевидными аналогиями с теорией вероятностей и теорией случайных

множеств, до сих пор не имела с ними общих теоретических оснований. Хотя многочисленные последователи Заде часто без разбору используют нечеткие множества в самых разных областях, стоит им заметить там неопределенность того или иного рода, нетрудно обнаружить, что теория Заде наиболее успешно применяется там и тогда, где и когда *нечеткость порождается присутствием человека и его разума*. В этом кроется одно из оправданий *эвентологии, теории случайных нечетких событий* [48], возникшей в рамках теории вероятностей и преследующей единственную цель — *эвентологически описать движение разума*, — теории, которая неожиданно для стороннего взгляда претендует на создание оригинального и весьма естественного математического языка для обсуждения общих теоретических оснований неопределенности.

## 10.2 Краткий обзор развития теории нечетких множеств Заде

Лишь из наших дней переход от обычной характеристической функции множества (индикатора множества) к функции принадлежности, который совершил Лотфи Заде[1] в 1965 [248], может показаться ординарным и даже тривиальным, поскольку был подготовлен всем ходом развития математики. Действительно, к тому времени уже были разработаны трехзначная логика Я. Лукасевича[2] [183], многозначная логика Э. Поста[3] [201], а также бесконечнозначные логики. Эти логики отражали идею о недостаточности для познания закона исключенного третьего, впервые высказанную Л. Брауэром[4].

[1] *Заде, Лотфи Аскер (Zadeh, Lotfi Asker, p. 1921)* — американский математик. Основатель теории нечетких множеств (1965), нечеткой логики (1973) и мягких вычислений (1991).

[2] *Лукасевич, Ян (Lukasiewicz, Jan, 1878–1956)* — польский математик и логик. Построил (1920) первую систему многозначной логики (трехзначная логика Лукасевича), а с ее помощью систему модальной логики.

[3] *Пост, Эмиль Леон (Post, Emil Leon, 1897–1954)* — американский математик и логик. Обобщил (1921) классическое двузначное исчисление высказываний до многозначного.

[4] *Брауэр, Лейтзен Эгберт Ян (Brower, Luitzen Egbert Jan, 1881–1966)* — голландский математик. Основные труды по топологии. С 1904 проводил критику так называемых чистых доказательств существования, опирающихся на логический принцип исключенного третьего, что в конечном итоге положило начало целому направлению в обоснованиях математики — *математическому интуи-*

Уже имелись методы теории вероятностей, позволявшие работать с функциями распределения, и квантовая физика со своим принципом неопределенностей. А американский философ М. Блэк[5] [108], исследовавший феномен нечеткости, ввел так называемые «профили согласованности» — прямые предшественники функций принадлежности.

Но вряд ли этот переход — просто результат сознательной работы Л. Заде, опиравшегося на некоторые теперь кажущиеся прозрачными аналогии с перечисленными подходами. Скорее, это — продукт его бессознательного, его интуиции, вдохновленной не столько успехами многозначных логик, теории вероятностей и квантовой физики, сколько стремлением сблизить математический язык с тем нечетким и единственно возможным для разума языком, который разум создал сам, будучи неспособным создать что-то более четкое, да и не имея к этому ни малейшего желания. То, что обстоятельства складывались именно так, подтверждает ничем не прикрытое удовольствие, с которым Л. Заде отдал центральную роль в теории нечетких множеств своей «лингвистической переменной» [255].

Вместе с тем сказав «а» в 1965, т.е. предложив использовать функцию принадлежности вместо индикатора, Л. Заде до сих пор не произнес «б», так и не ответив, откуда «берутся» эти самые функции принадлежности, а заодно и операции над ними. Следствием этой недосказанности служит «зоопарк» операций над нечеткими множествами, за последние годы разросшийся в рамках этой теории до неприличных размеров, в основном благодаря усилиям чересчур усердных последователей Л. Заде.

Московская школа нечетких множеств, мягких вычислений и искусственного интеллекта в последние годы [88] почти вплотную подошла к ответу на этот фундаментальный вопрос — к осознанию нечеткости, основанной на «очеловечивании» моделей, ради которой и только ради которой стоит «городить огород» нечеткой математики. Однако решающего шага так и не было сделано. Осознание «очеловеченной» нечеткости ограничилось философскими нематематическими рассуждениями, которые иногда доходили до возведения неприлично разросшегося «зоопарка» операций над нечеткими

---

*ционизму.*

[5] *Блэк, Макс (Black, Max, 1909–1988)* — американский философ и логик. Основные труды по философии языка, философии математики, науки и искусства.

множествами в ранг определения самой нечеткости. Но это — путь в никуда.

Нынче на решающий шаг — открытое и «бесстрашное» введение разума в предмет математического исследования — способна, пожалуй, лишь *эвентология*, в частности *эвентологическая теория нечетких событий*, открывшая *создателя нечеткости* в разуме, который, как и материя, есть «просто удобный способ связывания событий в череду». Надеюсь, эвентология, вооруженная уже достаточно мощным математическим событийным аппаратом, будет иметь *время и случай*[6], чтобы попытаться эвентологически представить, как разум создает *нечеткость* в окружении материи, порождающей *случайность*.

### 10.2.1 Основные определения теории Заде

Кратко изложим основы *теории нечетких множеств Заде* [248, 249] на примере понятия *нечеткого события Заде*, чтобы иметь возможность сравнить уже успевшую стать классической теорию нечетких множеств с только что появившейся на свет *эвентологической теорией нечетких событий*. *Нечетким событием Заде* $\widetilde{A}$ в пространстве элементарных событий $\Omega$ называется совокупность пар $\left(\mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega),\ \omega\right),\ \omega \in \Omega$, где $\mathcal{Z}_{\widetilde{A}} : \Omega \to [0,1]$ — *функция степени принадлежности*[7] *элементарного события* $\omega$ *нечеткому событию* $\widetilde{A}$, или в иных обозначениях: $\mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega) = \mathcal{Z}\left(\omega \in \widetilde{A}\right), \quad \omega \in \Omega$. *Высотой нечеткого события Заде* $\widetilde{A}$ называется максимум его функции при-

[6] «...не проворным дается успешный бег, не храбрым — победа, не мудрым — хлеб, и не у разумных богатство, и не искусным — благорасположение, но *время и случай* для всех их». — Библия, Екклесиаст, 9–11.

[7] Традиционно в теории нечетких множеств для обозначения функции степени принадлежности используется греческая буква $\mu$, происхождение которой, скорее всего, связано с начальной буквой английского слова *membership (принадлежность)*. К сожалению, в эвентологии нечетких событий эта буква играет решающую роль: $\mu$ обозначает индивидуальный разум, а множество индивидуальных разумов обозначается $\mathfrak{M}$. Буквы $\mu$, $\mathfrak{M}$, $M$ и $\mathbf{M}$ выбраны эвентологами как напоминающие об английском слове *mind (разум)*. Поэтому во избежание недоразумений нам пришлось пожертвовать традицией теории Заде и вместо $\mu$ использовать букву $\mathcal{Z}$, связанную с именем основателя Заде, для обозначения введенной им функции принадлежности, в чем мы приносим свои искренние извинения последователям этой теории: поверьте, другого выхода мы не нашли.

надлежности $\mathrm{height}(\widetilde{A}) = \max_{\omega\in\Omega} \mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega)$. Если высота нечеткого события Заде равна единице, оно называется *высоким*, иначе — *невысоким*. *Глубиной нечеткого события Заде* $\widetilde{A}$ называется минимум его функции принадлежности $\mathrm{deep}(\widetilde{A}) = \min_{\omega\in\Omega} \mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega)$. Если глубина нечеткого события Заде равна нулю, оно называется *глубоким*, иначе — *неглубоким*. *Носителем* нечеткого события Заде $\widetilde{A}$ называется событие $\mathrm{supp}(\widetilde{A}) = \{\omega \in \Omega :\ \mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega) > 0\}$, элементарные события которого имеют ненулевые степени принадлежности.

*Невозможным* нечетким событием Заде называется событие $\widetilde{\emptyset}$, носитель которого является невозможным событием: $\mathrm{supp}(\widetilde{\emptyset}) = \emptyset$. *Ядром* нечеткого события Заде $\widetilde{A}$ называется событие $\mathrm{core}(\widetilde{A}) \subseteq \Omega$, элементарные события которого имеют единичные степени принадлежности $\mathrm{core}(\widetilde{A}) = \{\omega \in \Omega :\ \mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega) = 1\}$. *Достоверным* нечетким событием Заде называется событие $\widetilde{\Omega}$, ядро которого является достоверным событием: $\mathrm{core}(\widetilde{\Omega}) = \Omega$. *Событием-срезом (или событием уровня)* нечеткого события Заде $\widetilde{A}$ называется событие $A_\alpha \subseteq \Omega$, элементарные события которого имеют степени принадлежности, не меньшие $\alpha$: $A_\alpha = \{\omega \in \Omega :\ \alpha \leqslant \mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega)\}, \quad \alpha \in [0,1]$. Нечеткие события Заде $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ равны, когда их функции принадлежности совпадают на $\Omega$: $\widetilde{A} = \widetilde{B} \iff \mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega) = \mathcal{Z}_{\widetilde{B}}(\omega), \quad \omega \in \Omega$. Приведем также основные операции над нечеткими событиями, предложенные Заде [248, **?**]. *Дополнением* нечеткого события $\widetilde{A}$ называется нечеткое событие $\widetilde{A}^c$ с функцией принадлежности $\mathcal{Z}_{\widetilde{A}^c}(\omega) = 1 - \mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. *Пересечением* нечетких событий $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется нечеткое событие $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$ с функцией принадлежности $\mathcal{Z}_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(\omega) = \min\left\{\mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega),\ \mathcal{Z}_{\widetilde{B}}(\omega)\right\}$, $\omega \in \Omega$. *Объединением* нечетких событий $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ называется нечеткое событие $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$ с функцией принадлежности $\mathcal{Z}_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(\omega) = \max\left\{\mathcal{Z}_{\widetilde{A}}(\omega),\ \mathcal{Z}_{\widetilde{B}}(\omega)\right\}$, $\omega \in \Omega$. Кроме классических операций в теории нечетких множеств Заде предложены обобщающие их бинарные операции $\beta : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$, которые удовлетворяют четырем аксиомам (монотонности, ассоциативности, коммутативности и граничного условия). Эти бинарные операции называются *треугольной нормой* и *треугольной конормой*[8].

[8]Понятие *треугольной нормы* и *треугольной конормы* появилось в 1951 в

| **Треугольная норма $T(a,b)$** | **Треугольная конорма $S(a,b)$** | **Примечания** |
|---|---|---|
| $\min\{a,b\}$ | $\max\{a,b\}$ | по Заде |
| $ab$ | $a+b-ab$ | вероятностная |
| $\max\{0,a+b-1\}$ | $\min\{1,a+b\}$ | по Лукасевичу |
| $\log_\lambda\left\{1+\dfrac{(\lambda^a-1)(\lambda^b-1)}{\lambda-1}\right\}$ | $1-\log_\lambda\left\{1+\dfrac{(\lambda^{1-a}-1)(\lambda^{1-b}-1)}{\lambda-1}\right\}$ | лог-операция $\lambda>0$ $\lambda\neq 1$ |
| $\begin{cases} T_Z, & \lambda=0,\\ T_0, & \lambda=1,\\ T_L, & \lambda=+\infty,\\ T^\lambda_{\log}, & \text{иначе.}\end{cases}$ | $\begin{cases} S_Z, & \lambda=0,\\ S_0, & \lambda=1,\\ S_L, & \lambda=+\infty,\\ S^\lambda_{\log}, & \text{иначе.}\end{cases}$ | по Франку |
| $ab\ \boldsymbol{\delta}\Big(0,\ (1-a)(1-b)\Big)$ | $1-(1-a)(1-b)\ \boldsymbol{\delta}\Big(1,\ 1-ab\Big)$ | дельта-операция |
| $\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$ | $\dfrac{a+b}{1+ab}$ | по Эйнштейну $\lambda>0$ |
| $\dfrac{ab}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)}$ | $\dfrac{a+b-(2-\lambda)ab}{1-(1-\lambda)ab}$ | при $\lambda=2$ равна операции по Эйнштейну |
| $\left(1+\sqrt[\lambda]{\left(\frac{1}{a}-1\right)^\lambda+\left(\frac{1}{b}-1\right)^\lambda}\right)^{-1}$ | $\left(1+\sqrt[-\lambda]{\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}}\right)^{-1}$ | $\lambda>0$ |
| $1-\sqrt[\lambda]{(1-a)^\lambda+(1-b)^\lambda+(1-a)^\lambda(1-b)^\lambda}$ | $\sqrt[\lambda]{a^\lambda+b^\lambda+a^\lambda b^\lambda}$ | $\lambda>0$ |
| $\dfrac{ab}{\max\{a,b,\lambda\}}$ | $\dfrac{a+b-ab-\min\{a,b,1-\lambda\}}{\max\{1-a,1-b,\lambda\}}$ | $\lambda\in[0,1]$ |
| $\max\left\{0,\ 1-\sqrt[\lambda]{(1-a)^\lambda+(1-b)^\lambda}\right\}$ | $\min\left\{1,\ \sqrt[\lambda]{a^\lambda+b^\lambda}\right\}$ | $\lambda\geqslant 1$ |
| $\max\left\{0,\ \dfrac{a+b-1+\lambda ab}{1+\lambda}\right\}$ | $\min\left\{1,\ a+b+\frac{\lambda}{1+\lambda}ab\right\}$ | $\lambda\geqslant -1$ |

Таблица 10.1. «Зоопарк» взаимно дополнительных бинарных операций в теории нечетких множеств Заде.

*Треугольной нормой* называется бинарная операция $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая четырем аксиомам:

1. $b \leqslant c \ \to \ T(a,b) \leqslant T(a,c)$ и $T(b,a) \leqslant T(c,a)$ (*монотонность*);
2. $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$ (*ассоциативность*);
3. $T(a,b) = T(b,a)$ (*коммутативность*);
4. $T(a,1) = T(1,a) = a$ (*граничное условие*).

*Треугольной конормой* называется бинарная операция $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая четырем аксиомам:

1. $b \leqslant c \ \to \ S(a,b) \leqslant S(a,c)$ и $S(b,a) \leqslant S(c,a)$ (*монотонность*);
2. $S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$ (*ассоциативность*);
3. $S(a,b) = S(b,a)$ (*коммутативность*);
4. $S(a,0) = S(0,a) = a$ (*граничное условие*).

Треугольная норма $T$ и треугольная конорма $S$ называются *дополнительными* бинарными операциями, если $T(a,b) + S(1-a, 1-b) = 1$ для $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$. Наибольшей популярностью в теории Заде пользуются три пары дополнительных треугольных норм и конорм. 1) *Пересечение и объединение по Заде*: $T_Z(a,b) = \min\{a,b\}$, $S_Z(a,b) = \max\{a,b\}$. 2) *Пересечение и объединение по Лукасевичу*: $T_L(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$, $S_L(a,b) = \min\{1, a+b\}$. 3) *Вероятностное пересечение и объединение*: $T_0(a,b) = ab$, $S_0(a,b) = a + b - ab$. Используемые в теории Заде дополнительные бинарные операции треугольной нормы и конормы собраны в приведенной выше таблице.

### 10.2.2 Эвентологическая модификация операций Заде

Бинарные операции $\beta : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, которые удовлетворяют четырем аксиомам (монотонности, ассоциативности, коммутативности и граничного условия) и называются *треугольными нормами* и *треугольными конормами*, используются в теории нечетких множеств в качестве обобщения классических операций над нечеткими множествами, введенных еще Л.Заде.

---

вероятностной геометрии у К. Менгера [189]. В дальнейшем треугольные нормы и конормы были подробно исследованы Б. Швейцером и А. Скларом [210].

С точки зрения эвентологии, для теории нечетких событий Заде оказывается вполне достаточным более узкий класс бинарных операций над нечеткими событиями, которые определяются как треугольные нормы и конормы, удовлетворяющие еще одной дополнительной аксиоме: *неравенствам Фреше* [**?**], и для которых поэтому используются специальные названия: *границы пересечения* и *границы объединения* соответственно. Обратимся к строгим определениям. *Границей пересечения* называется бинарная операция $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая пяти аксиомам:

1. $b \leqslant c \ \to \ T(a,b) \leqslant T(a,c)$ и $T(b,a) \leqslant T(c,a)$ (*монотонность*);
2. $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$ (*ассоциативность*);
3. $T(a,b) = T(b,a)$ (*коммутативность*);
4. $T(a,1) = T(1,a) = a$ (*граничное условие*);
5. $\max\{0,\ a+b-1\} \leqslant T(a,b) \leqslant \min\{a,b\}$ (*неравенства Фреше*).

*Границей объединения* называется бинарная операция $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая пяти аксиомам:

1. $b \leqslant c \ \to \ S(a,b) \leqslant S(a,c)$ и $S(b,a) \leqslant S(c,a)$ (*монотонность*);
2. $S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$ (*ассоциативность*);
3. $S(a,b) = S(b,a)$ (*коммутативность*);
4. $S(a,0) = S(0,a) = a$ (*граничное условие*);
5. $\max\{a,b\} \leqslant S(a,b) \leqslant \min\{1,\ a+b\}$ (*неравенства Фреше*).

Границы пересечения $T$ и границы объединения $S$ называются *дополнительными* бинарными операциями, если $T(a,b) + S(1-a, 1-b) = 1$ для $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$.

Пользующимся наибольшей популярностью в теории Заде трем парам дополнительных бинарных операций над нечеткими множествами соответствуют следующие эвентологические модификации: три пары дополнительных границ пересечений и границ объединений нечетких событий, соответственно получивших новые эвентологические названия и обозначения. Все вместе они называются *операциями Фреше*[9]. 1) *Правая граница пересечения и левая граница объединения по Фреше (пересечение и объединение по Заде)*: $T_r(a,b) =$

[9]Необходимо уточнить, что, строго говоря, операции Фреше (точно так же, как и операции Заде) выполняются не над самими нечеткими событиями (в эвентологическом смысле), а всего лишь над их функциями принадлежности, так как в теории Заде нечеткое событие — это не более чем функция принадлежности, заданная на пространстве элементарных событий.

| | **Граница пересечения** $T(a,b)$ | **Граница объединения** $S(a,b)=1-T(1-a,1-b)$ | **Название** |
|---|---|---|---|
| $Z$ | $\min\{a,b\}$ | $\max\{a,b\}$ | *правая граница пересечения и левая граница объединения по Фреше* (пересечение и объединение по Заде) |
| $0$ | $ab$ | $a+b-ab$ | *вероятностно-независимые границы пересечения и объединения* |
| $L$ | $\max\{0,a+b-1\}$ | $\min\{1,a+b\}$ | *левая граница пересечения и правая граница объединения по Фреше* (пересечение и объединение по Лукасевичу) |
| $F$ | $\begin{cases}(1-\varphi)T_0+\varphi T_Z, & \varphi\in[0,1],\\ (1+\varphi)T_0-\varphi T_L, & \varphi\in[-1,0].\end{cases}$ | $\begin{cases}(1-\varphi)S_0+\varphi S_Z, & \varphi\in[0,1],\\ (1+\varphi)S_0-\varphi S_L, & \varphi\in[-1,0].\end{cases}$ | *границы пересечения и объединения по Фреше* ($\varphi$ — коэффициент корреляции Фреше) |

Таблица 10.2. Эвентологическая модификация взаимно дополнительных бинарных операций из теории нечетких событий Заде.

$\min\{a,b\}$, $S_l(a,b)=\max\{a,b\}$. 2) *Левая граница пересечения и правая граница объединения по Фреше (пересечение и объединение по Лукасевичу)*: $T_l(a,b)=\max\{0,a+b-1\}$, $S_r(a,b)=\min\{1,a+b\}$. 3) *Вероятностно-независимое пересечение и объединение*: $T_0(a,b)=ab$, $S_0(a,b)=a+b-ab$.

Напомним кратко, как определяется *корреляция случайных событий по Фреше*, и заодно, чтобы облегчить употребление этого немного тяжеловесного термина, введем более компактный синоним: *Фреше-корреляция случайных событий*. Пусть $X\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathcal{F}$ — произвольное подмножество множества избранных событий $\mathfrak{X}$, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$. *Арной Фреше-корреляцией* подмножества событий $X\subseteq\mathfrak{X}$ называется величина

$$\mathsf{Kor}_X=\begin{cases}\mathsf{Kov}_X\,/F_X^+, & \mathsf{Kov}_X\geqslant 0,\\ \mathsf{Kov}_X\,/F_X^-, & \mathsf{Kov}_X\leqslant 0,\end{cases}$$

где $-F_X^-=-\min\left\{\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x),\ \prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)+\sum_{x\in X}\mathbf{P}(x^c)-1\right\}$ — *ле-*

*вая граница Фреше*, а $F_X^+ = -\min_{x\in X}\mathbf{P}(x) - \prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)$ — *правая граница Фреше* для арной ковариации $\mathsf{Kov}_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) - \prod_{x\in X}\mathbf{P}(x)$ того же подмножества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$. Итак, поскольку для произвольного $X \subseteq \mathfrak{X}$ $-F_X^- \leqslant \mathsf{Kov}_X \leqslant F_X^+$, то значения арной Фреше-корреляции произвольного подмножества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ всегда лежат в интервале $[-1,1]$: $-1 \leqslant \mathsf{Kor}_X \leqslant 1$. Непосредственно из определения Фреше-корреляции двух событий $x \in \mathfrak{X}$ и $y \in \mathfrak{X}$ следует, что если их вероятности фиксированы: $a = \mathbf{P}(x), \quad b = \mathbf{P}(y)$, то левая и правая Фреше-границы парной ковариации любых двух событий с такими же вероятностями одинаковы $-F_{xy}^- = \max\{0,\ a+b-1\} - ab, \quad F_{xy}^+ = \min\{a,b\} - ab$. Дополнительные бинарные операции пересечения и объединения по Фреше обобщают все три наиболее известные пары дополнительных бинарных операций, так как

$$T_F^\varphi = \begin{cases} T_Z, & \varphi = 1, \\ T_0, & \varphi = 0, \\ T_L, & \varphi = -1, \end{cases} \qquad S_F^\varphi = \begin{cases} S_L, & \varphi = 1, \\ S_0, & \varphi = 0, \\ S_Z, & \varphi = -1. \end{cases}$$

Популярность данных трех пар дополнительных бинарных операций в теории нечетких множеств Заде эвентологически объясняется тем, что каждой такой паре соответствует одна из трех основных эвентологических структур зависимостей событий: *вложенная, непересекающаяся и независимая*. Пересечения и объединения по Фреше для произвольного параметра $\varphi \in [-1,1]$ соответствуют эвентологическим структурам зависимости событий с коэффициентом парной корреляции Фреше, равным $\varphi$.

Лемма (о смысле параметра в операциях Фреше). *Параметр $\varphi$ в операциях Фреше $T_F^\varphi(a,b)$ и $S_F^\varphi(a,b)$ имеет смысл корреляции Фреше событий $x$ и $y$, вероятности которых равны $a$ и $b$ соответственно:* $\varphi = \mathsf{Kor}_{xy}$.

Доказательство проведем только для операции пересечения Фреше $T_F^\varphi$, потому что для операции объединения Фреше $S_F^\varphi$ оно полностью аналогично. Рассмотрим два события $x, y \in \mathcal{F}$, вероятности которых равны $a = \mathbf{P}(x)$ и $b = \mathbf{P}(y)$, а $\mathbf{P}(x \cap y) = T_F^\varphi(a,b)$ — вероятность пересечения определяется операцией пересечения Фреше с

параметром $\varphi$, т.е.

$$\mathbf{P}(x \cap y) = \begin{cases} (1-\varphi)T_0(a,b) + \varphi T_Z(a,b), & \varphi \in [0,1], \\ (1+\varphi)T_0(a,b) - \varphi T_L(a,b), & \varphi \in [-1,0]. \end{cases}$$

Заметим предварительно, что левая и правая границы Фреше для ковариации событий $x$ и $y$ выражаются через операции $T_Z, T_0$ и $T_L$ по формулам: $-F^-_{xy} = \max\{0,\ a+b-1\} - ab = T_L(a,b) - T_0(a,b)$, $F^+_{xy} = \min\{a,b\} - ab = T_Z(a,b) - T_0(a,b)$, а их парная ковариация по определению равна $\mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y) = = \mathbf{P}(x \cap y) - ab = \mathbf{P}(x \cap y) - T_0(a,b)$. Вычислим Фреше-корреляцию событий $x$ и $y$ в двух ситуациях. 1) Пусть $\varphi \in [0,1]$, тогда

$$\mathsf{Kor}_{xy} = \frac{\mathsf{Kov}_{xy}}{F^+_{xy}} = \frac{\mathbf{P}(x \cap y) - T_0(a,b)}{T_Z(a,b) - T_0(a,b)} =$$

$$= \frac{(1-\varphi)T_0(a,b) + \varphi T_Z(a,b) - T_0(a,b)}{T_Z(a,b) - T_0(a,b)} = \varphi.$$

2) Пусть $\varphi \in [-1,0]$, тогда

$$\mathsf{Kor}_{xy} = \frac{\mathsf{Kov}_{xy}}{F^-_{xy}} = \frac{\mathbf{P}(x \cap y) - T_0(a,b)}{-T_L(a,b) + T_0(a,b)} =$$

$$= \frac{(1+\varphi)T_0(a,b) - \varphi T_L(a,b) - T_0(a,b)}{-T_L(a,b) + T_0(a,b)} = \varphi.$$

Лемма доказана.

Еще раз подчеркнем, что в теории нечетких множеств Заде под нечетким событием понимается всего лишь функция принадлежности, заданная на пространстве элементарных событий и принимающая числовые значения из единичного отрезка. Поэтому тó, что в данной теории называется бинарной операцией над двумя нечеткими событиями, на самом деле представляет из себя бинарную операцию над значениями двух функций принадлежности, т.е. отображение вида: $\beta : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, которое каждой паре чисел $(a,b)$ из $[0,1] \times [0,1]$ сопоставляет число $\beta(a,b)$ из $[0,1]$: $\beta : (a,b) \to \beta(a,b)$. При помощи каждого отображения $\beta$ можно любой паре функций принадлежности $f : \Omega \to [0,1]$, $g : \Omega \to [0,1]$, сопоставить

третью функцию принадлежности $h \ : \ \Omega \to [0,1]$, которая называется результатом бинарной операции «$\beta$» и определяется формулой $h(\omega) = \beta\Big(f(\omega),\ g(\omega)\Big)$ для любого $\omega \in \Omega$.

### 10.2.3 Обобщенные операции Фреше в обозначениях теории Заде

Обобщенные бинарные операции Фреше. Если позволить параметру $\varphi$ зависеть от $a$ и $b$, т.е. быть произвольным полем

$$\varphi \ : \ [0,1] \times [0,1] \to [-1,1]$$

со значениями из $[-1,1]$, то получим обобщенные бинарные операции *пересечения и объединения по Фреше*:

$$T_F^{\Phi}(a,b) = \begin{cases} (1-\varphi_{ab})T_0(a,b) + \varphi_{ab}T_Z(a,b), & \varphi_{ab} \in [0,1], \\ \\ (1+\varphi_{ab})T_0(a,b) - \varphi_{ab}T_L(a,b), & \varphi_{ab} \in [-1,0], \end{cases}$$

$$S_F^{\Phi}(a,b) = \begin{cases} (1-\varphi_{ab})S_0(a,b) + \varphi_{ab}T_L(a,b), & \varphi_{ab} \in [0,1], \\ \\ (1+\varphi_{ab})S_0(a,b) - \varphi_{ab}S_Z(a,b), & \varphi_{ab} \in [-1,0], \end{cases}$$

каждая из которых определяется собственным *полем парных Фреше-корреляций* $\Phi = \Big\{\varphi_{ab},\ (a,b) \in [0,1] \times [0,1]\Big\}$.

Обобщенные арные операции Фреше. Если позволить $\varphi$ зависеть от произвольного подмножества параметров $A = \{a,b,\ldots,c\} \subseteq \mathcal{A} = \{a,b,\ \ldots,z\}$, т.е. быть произвольными полями

$$\varphi_A \ : \ \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{|A|} \to [-1,1]$$

со значениями из $[-1,1]$, то получим *обобщенные арные операции пересечения и объединения по Фреше*:

$$T_F^{\Phi}(A) = \begin{cases} (1-\varphi_A)T_0(A) + \varphi_A T_Z(A), & \varphi_A \in [0,1], \\ \\ (1+\varphi_A)T_0(A) - \varphi_A T_L(A), & \varphi_A \in [-1,0], \end{cases}$$

$$S_F^{\Phi}(A) = \begin{cases} (1-\varphi_A)S_0(A) + \varphi_A T_L(A), & \varphi_A \in [0,1], \\ (1+\varphi_A)S_0(A) - \varphi_A S_Z(A), & \varphi_A \in [-1,0], \end{cases}$$

каждая из которых определяется собственным *полем арных Фреше-корреляций* $\Phi = \left\{\varphi_A,\ A \subseteq \mathcal{A}\right\}$.

## 10.3 Нечеткие события в эвентологии

Для начала, чтобы при восхождении на вершину эвентологии[10], именуемую «нечеткие события», окидывать ее, приближающуюся, свежим и наивным взглядом, надо, отбросив все сомнения, покорно согласиться с тем, что в мире реального (материи) и идеального (разума) не существует ничего, кроме событий[11]: *«материя и разум — это всего лишь два удобных способа связывания событий в череду»*. Разум наблюдает существование материи в виде *череды событий* и сам существует как *череда событий*. Любая *частная материя*, как и любой *частный разум*, всякий раз определяется той или иной чередой событий, иными словами, тем или иным *множеством событий*, и следовательно, тем или иным *нечетким событием*.

### 10.3.1 Случайный и нечеткий эксперименты

Изложение стандартного университетского курса теории вероятностей начинается с понятия *случайного эксперимента*. Классическими примерами случайного эксперимента служат «подбрасывание монеты» и «бросание кости» (рис. 10.1).

В эвентологии *случайный эксперимент* заменяется *нечетким экспериментом*, чтобы начать с этого нового понятия изложение эвентологической теории нечетких событий. Классический пример *нечеткого эксперимента* — «создание кучи зерна» (рис. 10.2).

[10] Если эвентология — это вершина теории вероятностей, то нечеткое событие — это уникальный и неприступный до самого последнего времени пик эвентологии, заставляющий эвентологов вновь и вновь подниматься к его вершине отовсюду, где бы они ни находились.

[11] Любое событие всегда случайно и имеет вероятность, а достоверное событие — это всего лишь событие, наступающее с вероятностью единица. Поэтому привычный термин «случайное событие» явно избыточен и может обоснованно считаться тавтологией.

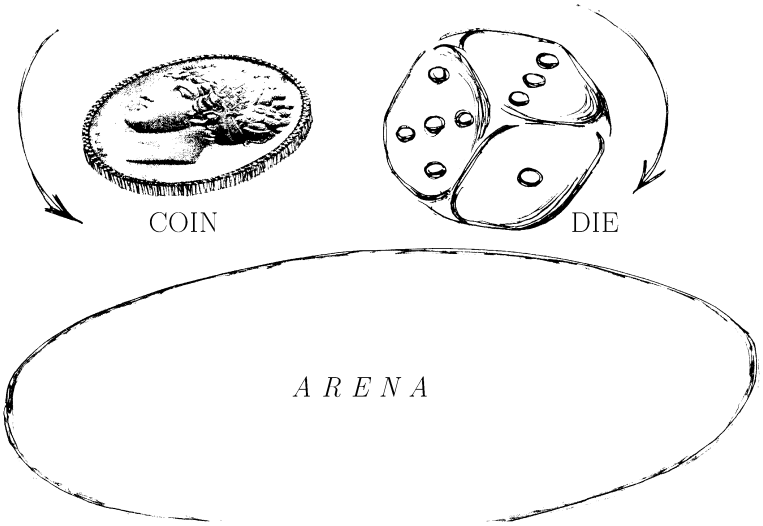



Рис. 10.1. Случайные эксперименты «подбрасывание монеты» и «бросание кости»

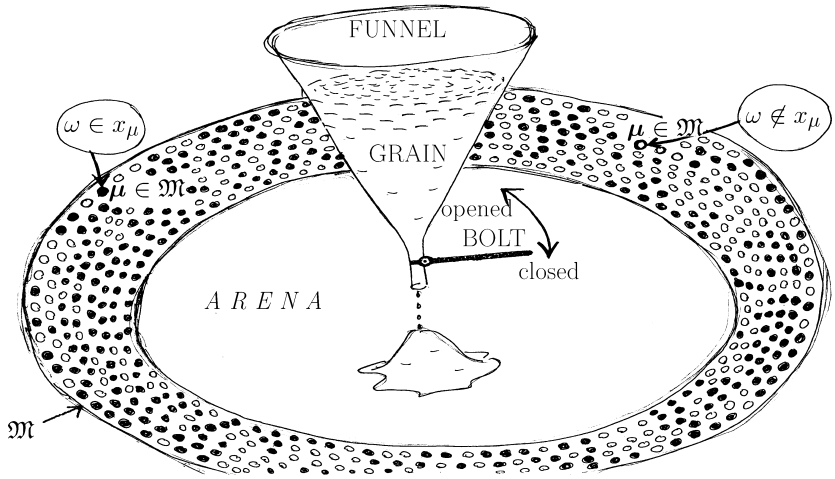



Рис. 10.2. Нечеткий эксперимент «создание кучи зерна»

Фундаментальное отличие между *нечетким экспериментом* и *случайным экспериментом* заключается в непосредственном участии в нечетком эксперименте множества индивидуальных разумов $\mathfrak{M}$. Для классического случайного эксперимента требуется только *монета (coin)* или *кость (die)*, *арена (arena)* и *ничего больше*. Исходы *случайного эксперимента* не зависят от точки зрения каких бы то ни было индивидуальных разумов. В то время как для определения нечеткого эксперимента «создание кучи зерна» и для его проведения требуется следующее:

- *воронка (a funnel)* с *зерном (grain)* и с *задвижкой (a bolt)*, которая может быть *закрытой (closed) или открытой (opened)*, давая или не давая возможность зерну высыпаться на *плоскую арену*;
- *индивидуальные разумы* $\mu \in \mathfrak{M}$, расположившиеся вокруг арены и наблюдающие за зерном, высыпающимся из воронки на арену, после того как задвижка в очередной раз была открыта.

Нечеткий эксперимент немыслим без участия множества индивидуальных разумов, составляющих неотъемлемую часть нечеткого эксперимента. Каждый индивидуальный разум — участник нечеткого эксперимента — имеет свое собственное мнение о том, *может ли высыпавшееся зерно рассматриваться как куча зерна или нет*. Все их мнения формируют *нечеткое событие* как исход нечеткого эксперимента.

Обозначим $x =$ «a heap of grain» — *имя нечеткого события «создание кучи зерна»*, которое наступает нечетко в результате нечеткого эксперимента, и пусть $x_\mu$ — это обычное колмогоровское событие, которое наступает, когда индивидуальный разум $\mu$ считает, что «куча зерна» высыпалась из воронки. Эвентология определяет *нечеткое событие «$x$ с волной»*:

$$\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$$

как множество обычных колмогоровских событий $x_\mu$, когда $\mu \in \mathfrak{M}$.

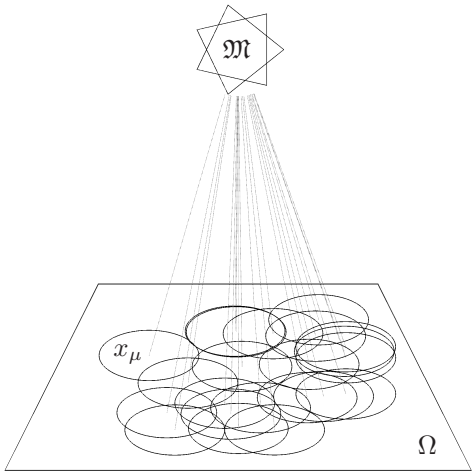



Рис. 10.3. Нечеткое событие $\widetilde{x} = \{x_\mu : \mu \in \mathfrak{M}\}$ как «расслоение» частной материи $x$ разумом $\mathfrak{M}$. Семиугольник — символическое изображение совокупного разума $\mathfrak{M}$, «светящего» сквозь частные разумы $\mu \in \mathfrak{M}$ — инструменты наблюдения за частной материей $x$, которую он наблюдает («осознает») как нечеткое событие $\widetilde{x} = x_{\mathfrak{M}}$. При этом каждый частный разум $\mu$ выбирает («освещает») свой слой частной материи $x$, наблюдая («осознавая») его как событие $x_\mu \subseteq \Omega$.

### 10.3.2 Определения и обозначения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство[12], а $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ — два конечных множества, природа элементов которых $x \in \mathfrak{X}$ и $\mu \in \mathfrak{M}$ нас пока не интересует.

#### Матрица избранных событий

При помощи двух конечных множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ определим *матрицу избранных случайных событий* как множество событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ , где $x_\mu \in \mathcal{F}$ — измеримые относительно алгебры $\mathcal{F}$ случайные события. Таким образом, каждая пара $(x, \mu) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$ определяет одно случайное событие $x_\mu \subseteq \Omega$. Введем также «естественные», на наш взгляд, обозначения для произвольных подмно-

[12]Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — эвентологическое пространство — описывает исходы вселенского эксперимента, именуемого «бытие», а каждое $\omega \in \Omega$ — состояние «бытия» в соответствующий момент времени.

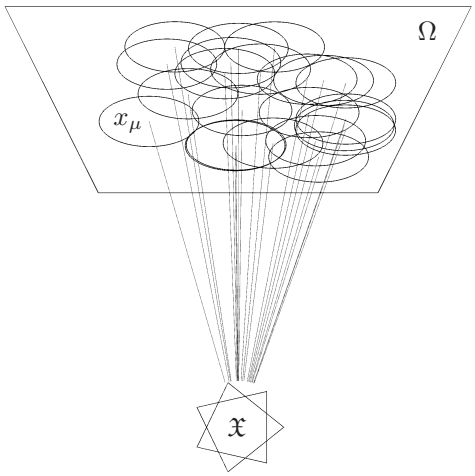



Рис. 10.4. Нечеткое событие $\widehat{\mu} = \{x_\mu : x \in \mathfrak{X}\}$ как «расслоение» частного разума $\mu$ материей $\mathfrak{X}$. Семиугольник — символическое изображение совокупной материи $\mathfrak{X}$, наблюдаемой («осознаваемой») частным разумом $\mu$ как нечетким событием $\widehat{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$. Частный разум $\mu$ наблюдает материю $\mathfrak{X}$, выбирая («освещая») в каждой частной материи $x \in \mathfrak{X}$ свой слой, который он наблюдает («осознает») в виде события $x_\mu \subseteq \Omega$.

жеств событий, образующих эту матрицу, иначе говоря, для произвольных «подматриц» этой «матрицы» $X_W = \{x_\mu,\ x \in X,\ \mu \in W\} \subseteq \mathfrak{X}_\mathfrak{M}$, где $X \subseteq \mathfrak{X},\ W \subseteq \mathfrak{M}$. К наиболее важным «подматрицам» относятся «строки» событий $x_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\} \subseteq \mathfrak{X}_\mathfrak{M}, \quad x \in \mathfrak{X}$, и «столбцы» событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\} \subseteq \mathfrak{X}_\mathfrak{M}, \quad \mu \in \mathfrak{M}$, а также «подстроки» событий $x_W = \{x_\mu,\ \mu \in W\} \subseteq x_\mathfrak{M}$ и «подстолбцы» событий $X_\mu = \{x_\mu,\ x \in X\} \subseteq \mathfrak{X}_\mu$.

### Операторы нечеткости — «создания множества событий»

Определим теперь операторы *«создания множества событий»*[13], которые также будем называть *операторами «создания нечеткости»*, или еще короче — *операторами нечеткости*. Даже краткий

[13]В последующих работах мы намерены попытаться определить обратные им операторы *«колла́пса множества событий» — «коллапсирования множества событий в одно событие». Колла́пс* (от лат. *collápsus — упавший*) *— обвал, обрушение*, а также *редукция, исчезновение*.

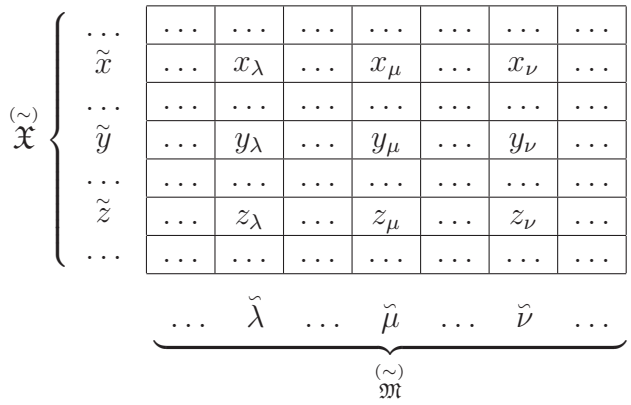



Рис. 10.5. *Матрица избранных событий* $\mathfrak{X}_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, множества элементов «строк» которой $x_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ определяют *нечеткие события* $\widetilde{x} = x_\mathfrak{M}$, образующие множество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$, а множества элементов «столбцов» $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$ — *нечеткие события* $\breve{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$, образующие множество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$.

опыт построения *начал теории нечетких случайных событий*[14] то там, то здесь, под самыми разными предлогами, раз за разом воскрешает из небытия одно и то же обозначение: $\widetilde{x}$, которое, хотя и возникает в разных обстоятельствах, имеет одну и ту же сущность. Это обозначение можно при определенной доле воображения принять за результат действия некоего оператора «$\sim$» на некое $x \in \mathfrak{X}$. Действие этого оператора «$\sim$» на $x$ *создает множество событий*

$$\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}, \tag{1}$$

образованное событиями $x_\mu \subseteq \Omega$, наступление которых те, кто имеют имена $\mu \in \mathfrak{M}$, «связывают» с тем, что имеет имя $x \in \mathfrak{X}$. Другим

[14] *Эвентологии — теории нечетких случайных событий* предназначена роль математического инструмента для изучения движения разума — разума, который вносит нечеткость во все, чего касается и над чем задумывается: *«разум возникает тогда и там, когда и где возникает способность нечеткого выбора»*, или еще отчетливее: *«как только где-то возникает способность нечеткого выбора, тотчас там возникает разум»*.

оператором «$\backsim$» (аналогичным оператору «$\sim$» во всем, кроме множества, его порождающего) можно пытаться воздействовать и на некое $\mu \in \mathfrak{M}$, чтобы *создать множество событий*

$$\breve{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}, \tag{2}$$

образованное событиями $x_\mu \subseteq \Omega$, наступление которых тот, кто имеет имя $\mu \in \mathfrak{M}$, «связывает» с теми, что имеют имена $x \in \mathfrak{X}$. Множества событий в соотношениях (1) и (2) существенно отличаются друг от друга: первое порождено множеством $\mathfrak{M}$, а второе — множеством $\mathfrak{X}$, а в терминологии матрицы избранных событий $\mathfrak{X}_\mathfrak{M}$: первое соответствует «строке» $x_\mathfrak{M} = \widetilde{x}$, а второе — «столбцу» $\mathfrak{X}_\mu = \breve{\mu}$ этой матрицы. Подчеркнем еще раз, что результат применения оператора «$\sim$» к $x \in \mathfrak{X}$ обозначается $\widetilde{x}$, а результат применения оператора «$\backsim$» к $\mu \in \mathfrak{M}$ обозначается $\breve{\mu}$. Оператор «$\sim$» называется $\mathfrak{M}$-*оператором*, а оператор «$\backsim$» — $\mathfrak{X}$-*оператором «создания множества событий»*. Для краткости оба этих оператора будем также называть *операторами $\mathfrak{M}$-нечеткости и $\mathfrak{X}$-нечеткости* соответственно.

Распространение действия операторов нечеткости с имени на множество имен. С технической точки зрения оказывается полезным распространить применение операторов нечеткости с отдельного имени события $x \in \mathfrak{X}$ или разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ на произвольное подмножество таких имен: $X \subseteq \mathfrak{X}$ или $W \subseteq \mathfrak{M}$ следующим стандартным образом:

$$\widetilde{X} = \{X_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\},$$

где $X_\mu = \{x_\mu,\ x \in X\}$, а $X \subseteq \mathfrak{X}$ — произвольное подмножество имен событий,

$$\breve{W} = \{W_x,\ x \in \mathfrak{X}\},$$

где $W_x = \{x_\mu,\ \mu \in W\}$, а $W \subseteq \mathfrak{M}$ — произвольное подмножество имен разумных субъектов.

В результате подобного расширенного толкования оператора нечеткости получаются *нечеткие множества событий* $\widetilde{X}$ и $\breve{W}$, определяемые соответствующими множествами имен $X \subseteq \mathfrak{X}$ и $W \subseteq \mathfrak{M}$, свойства которых полностью аналогичны свойствам нечетких событий $\widetilde{x}$ и $\breve{\mu}$ соответственно. Кроме того, смысл понятия нечеткого события без изменений переносится на понятие нечеткого множества событий. Действительно, оба нечетких множества событий $\widetilde{X}$ или $\breve{W}$

определяются как множество множеств событий $X_\mu$ или $W_x$, связанных с одним и тем же множеством имен $X$ или $W$ соответственно. При этом все множества $X_\mu$ или $W_x$, хотя и состоят из одного и того же количества событий, равного $|X|$ или $|W|$, отличаются друг от друга как равномощные множества, состоящие из *различных* событий.

В заключение заметим, что понятие *нечеткого множества событий* не следует путать с понятием *множества нечетких событий*, определение которого опирается на принцип Минковского и будет дано в следующем разделе.

### Операторы нечеткости по Минковскому — «создания множества событий по Минковскому»

Принцип Минковского позволяет превратить операторы «$\sim$» и «$\backsim$» в операторы «создания множества событий по Минковскому», обозначаемые «$(\sim)$» и «$(\backsim)$» соответственно, распространив действие этих операторов с элементов $x \in \mathfrak{X}$ или $\mu \in \mathfrak{M}$ на множества этих элементов $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{M}$, а также на их произвольные подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$ или $W \subseteq \mathfrak{M}$ стандартным образом: $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\tilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$, $\overset{(\sim)}{X} = \{\tilde{x},\ x \in X\}$, и $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\tilde{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, $\overset{(\backsim)}{W} = \{\tilde{\mu},\ \mu \in W\}$.

### «Игра» обозначений

Введение операторов «$\sim$», «$\backsim$» и «$(\sim)$», «$(\backsim)$», создающих для некоторых подмножеств матрицы избранных событий $\mathfrak{X}_\mathfrak{M}$ еще одно «параллельное» обозначение, открыло возможность «поиграть» в обозначения, в частности, для того, чтобы проверить техническую работоспособность всей вновь вводимой системы обозначений теории нечетких случайных событий. Строго говоря, то, что некоторое подмножество матрицы $\mathfrak{X}_\mathfrak{M}$ имеет два обозначения, — это совершенно тривиальное «микроутверждение», доказательство которого следует непосредственно из определения данных операторов. Рассмотрим основные из подобных «микроутверждений».

***Микроутверждение 1.*** $\widetilde{\mathfrak{X}} = \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$. ***Доказательство.*** $\widetilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \{\tilde{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$, так как для каждого фикси-

рованного $\mu \in \mathfrak{M}$ соответствующий «столбец» матрицы $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ имеет два обозначения $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\} = \breve{\mu}$ в силу определения $\breve{\mu}$ — действия на $\mu \in \mathfrak{M}$ оператора «$\backsim$».

***Микроутверждение 2.*** $\widetilde{\mathfrak{M}} = \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$. ***Доказательство.*** $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{x_{\mathfrak{M}},\ x \in \mathfrak{X}\} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\} = \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$, так как для каждого фиксированного $x \in \mathfrak{X}$ соответствующая «строка» матрицы $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ имеет два обозначения $x_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \widetilde{x}$ в силу определения $\widetilde{x}$ — действия на $x \in \mathfrak{X}$ оператора «$\sim$».

***Микроутверждение 3.*** $X \subseteq \mathfrak{X} \implies \overset{(\sim)}{X} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ и $W \subseteq \mathfrak{M} \implies \overset{(\backsim)}{W} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$. ***Доказательство.*** Если $X \subseteq \mathfrak{X}$, то $\overset{(\sim)}{X} = \{\widetilde{x},\ x \in X\} \subseteq \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\} = \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$. Если $W \subseteq \mathfrak{M}$, то $\overset{(\backsim)}{W} = \{\breve{\mu},\ \mu \in W\} \subseteq \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$.

***Микроутверждение 4.*** $X \subseteq \mathfrak{X} \implies \widetilde{X}\ (\subseteq)\ \widetilde{\mathfrak{X}}$ и $W \subseteq \mathfrak{M} \Longrightarrow \breve{W}\ (\subseteq)\ \widetilde{\mathfrak{M}}$. ***Доказательство.*** Если $X \subseteq \mathfrak{X}$, то $\widetilde{X} = \{X_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}\ (\subseteq\ )\ \{\mathfrak{X}_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \widetilde{\mathfrak{X}}$, так как $X_\mu = \{x_\mu,\ x \in X\} \subseteq \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\} = \mathfrak{X}_\mu$ для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$. Если $W \subseteq \mathfrak{M}$, то $\breve{W} = \{x_W,\ x \in \mathfrak{X}\}\ (\subseteq)\ \{x_{\mathfrak{M}},\ x \in \mathfrak{X}\} = \widetilde{\mathfrak{M}}$, так как $x_W = \{x_\mu,\ \mu \in W\} \subseteq \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\} = x_{\mathfrak{M}}$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$.

### 10.3.3 Разновидности событий-террасок

В эвентологическом описании нечетких случайных событий фигурируют два вида событий-террасок — подмножеств $\Omega$.

#### События-терраски первого вида

При фиксированном $\mu \in \mathfrak{M}$ множество событий[15] $\breve{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$ порождает *события-терраски первого вида*

$$\mathrm{ter}_\mu(X) = \bigcap_{x \in X} x_\mu \bigcap_{x \in X^c} x_\mu^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где $x_\mu^c = \Omega - x_\mu, \quad X^c = \mathfrak{X} - X$ — дополнение события $x_\mu \subseteq \Omega$ до $\Omega$ и дополнение множества $X \subseteq \mathfrak{X}$ до $\mathfrak{X}$. События-терраски первого

[15] $\breve{\mu}$ — *$\mathfrak{X}$-нечеткое событие (индивидуальный разум).*

вида для каждого фиксированного $\mu \in \mathfrak{M}$ попарно не пересекаются: $\mathrm{ter}_\mu(X) \cap \mathrm{ter}_\mu(X') = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad X \neq X'$ и образуют разбиение пространства элементарных событий $\Omega = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \mathrm{ter}_\mu(X)$.

**События-терраски второго вида**

*События-терраски второго вида* — это события-терраски

$$\mathrm{ter}_x(W) = \bigcap_{\mu \in W} x_\mu \bigcap_{\mu \in W^c} x_\mu^c, \quad W \subseteq \mathfrak{M},$$

порожденные при фиксированном $x \in \mathfrak{X}$ множеством событий[16] $\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, где $x_\mu^c = \Omega - x_\mu$, $\quad W^c = \mathfrak{M} - W$ — дополнение события $x_\mu \subseteq \Omega$ до $\Omega$ и дополнение множества $W \subseteq \mathfrak{M}$ до $\mathfrak{M}$. События-терраски второго вида для каждого фиксированного $x \in \mathfrak{X}$ попарно не пересекаются: $\mathrm{ter}_x(W) \cap \mathrm{ter}_x(W') = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad W \neq W'$ и образуют разбиение пространства элементарных событий $\Omega = \sum_{W \subseteq \mathfrak{M}} \mathrm{ter}_x(W)$.

### 10.3.4 Разновидности нечетких событий-террасок

Эвентология нечетких случайных событий, разумеется, имеет дело и с нечеткими событиями-террасками. При этом нечеткие события-терраски также могут быть двух видов, которые отличаются друг от друга множествами, порождающими «нечеткость» событий-террасок. «Нечеткость» событий-террасок первого вида порождается множеством $\mathfrak{M}$, а второго вида — множеством $\mathfrak{X}$.

**$\mathfrak{M}$-нечеткие события-терраски первого вида**

*События-терраски первого вида* $\mathrm{ter}_\mu(X)$, порождаемые соответственно множествами событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$ — нечеткими событиями (разумами) $\widetilde{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$, все вместе, когда $\mu \in \mathfrak{M}$, образуют множество событий

$$\widetilde{\mathrm{ter}}(X) = \Big\{ \mathrm{ter}_\mu(X),\ \mu \in \mathfrak{M} \Big\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

которое называется *нечетким событием-терраской первого вида*, или $\mathfrak{M}$-*нечетким событием-терраской*. Нечеткие события-терраски

[16] $\widetilde{x}$ — $\mathfrak{M}$-*нечеткое событие*.

первого вида попарно не пересекаются по Минковскому

$$\widetilde{\text{ter}}(X)\ (\cap)\ \widetilde{\text{ter}}(X') = \widetilde{\emptyset}_{\mathfrak{M}} \iff X \neq X'$$

и образуют *разбиение по Минковскому* достоверного $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{\Omega} = (\sum)_{X\subseteq\mathfrak{X}} \widetilde{\text{ter}}(X)$, потому что $\Omega = \sum_{X\subseteq\mathfrak{X}} \text{ter}_\mu(X)$ — для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ разбиение достоверного события $\Omega$ образуют обычные события-терраски. Сет-операции по Минковскому позволяют стандартным образом записать следующую формулу для $\mathfrak{M}$-нечетких событий-террасок:

$$\widetilde{\text{ter}}(X) = \Big(\bigcap_{x\in X}\Big)\, \widetilde{x}\, \Big(\bigcap_{x\in X^c}\Big)\, \widetilde{x}^{(c)},$$

где $X \subseteq \mathfrak{X}$ — обычное подмножество $\mathfrak{X}$, $X^c = \mathfrak{X} - X$ — обычное дополнение до $\mathfrak{X}$, $\widetilde{x}^{(c)} = \widetilde{\Omega}\ (-)\ \widetilde{x}$ — дополнение $\widetilde{x}$ по Минковскому до $\widetilde{\Omega}$, а $(\bigcap)$ — пересечение множеств событий по Минковскому. Заметим также, что на $\mathfrak{M}$-нечеткие события-терраски можно взглянуть как на события-терраски, порожденные множеством нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$, и записать их в иной, хотя и корректной, но более громоздкой форме:

$$\text{ter}(\overset{(\sim)}{X}) = \Big(\bigcap_{\widetilde{x}\in\overset{(\sim)}{X}}\Big)\, \widetilde{x}\ \ \Big(\bigcap_{\widetilde{x}\in(\overset{(\sim)}{X})^c}\Big)\ \ \widetilde{x}^{(c)} = \widetilde{\text{ter}}(X),$$

где $\overset{(\sim)}{X} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ — обычное подмножество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$, $(\overset{(\sim)}{X})^c = \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} - \overset{(\sim)}{X}$ — обычное дополнение до $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$.

### $\mathfrak{X}$-нечеткие события-терраски второго вида

*События-терраски второго вида* $\text{ter}_\mu(X)$, порождаемые соответственно множествами событий $x_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ — нечеткими событиями $\widetilde{x} = x_{\mathfrak{M}}$, все вместе, когда $x \in \mathfrak{X}$, образуют множество событий

$$\widetilde{\text{ter}}(W) = \Big\{\, \text{ter}_x(W),\ x \in \mathfrak{X}\Big\}, \quad W \subseteq \mathfrak{M},$$

которое называется *нечетким событием-терраской второго вида*, или $\mathfrak{X}$-*нечетким событием-терраской*. Нечеткие события-терраски

второго вида попарно не пересекаются по Минковскому

$$\breve{\mathrm{ter}}(W)\ (\cap)\ \breve{\mathrm{ter}}(W') = \breve{\tilde{\emptyset}}_{\mathfrak{X}} \iff W \neq W'$$

и образуют *разбиение по Минковскому* достоверного $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\breve{\Omega} = (\sum)_{W\subseteq\mathfrak{M}}\,\breve{\mathrm{ter}}(W)$, потому что $\Omega = \sum_{W\subseteq\mathfrak{M}}\,\mathrm{ter}_x(W)$ — для каждого $x \in \mathfrak{X}$ разбиение достоверного события $\Omega$ образуют обычные события-терраски. Сет-операции по Минковскому позволяют стандартным образом записать следующую формулу для $\mathfrak{X}$-нечетких событий-террасок:

$$\breve{\mathrm{ter}}(W) = \Big(\bigcap_{\mu\in W}\Big)\,\breve{\mu}\,\Big(\bigcap_{\mu\in W^c}\Big)\,\breve{\mu}^{(c)},$$

где $W \subseteq \mathfrak{M}$ — обычное подмножество $\mathfrak{M}$, $W^c = \mathfrak{M} - W$ — обычное дополнение до $\mathfrak{M}$, а $\breve{\mu}^{(c)} = \breve{\Omega}\ (-)\ \breve{\mu}$ — дополнение $\breve{\mu}$ по Минковскому до $\breve{\Omega}$, а $(\bigcap)$ — пересечение множеств событий по Минковскому. Заметим также, что на $\mathfrak{X}$-нечеткие события-терраски можно взглянуть как на события-терраски, порожденные множеством нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$, и записать их в иной, хотя и корректной, но более громоздкой форме:

$$\mathrm{ter}(\overset{(\backsim)}{W}) = \Big(\bigcap_{\breve{\mu}\in\overset{(\backsim)}{W}}\Big)\,\tilde{x}\ \ \Big(\bigcap_{\breve{\mu}\in(\overset{(\backsim)}{W})^c}\Big)\ \ \breve{\mu}^{(c)} = \breve{\mathrm{ter}}(W),$$

где $\overset{(\backsim)}{W} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$ — обычное подмножество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$, $(\overset{(\backsim)}{W})^c = \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} - \overset{(\backsim)}{W}$ — обычное дополнение до $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$.

### Нечеткие элементарные события

Речь пойдет о трех видах нечетких событий, которые будут называться *нечеткими элементарными событиями (нечеткими э-событиями)* и которые составлены из фрагментов тех или иных разбиений пространства элементарных событий (э-событий) $\Omega$, порождаемых тремя видами множеств событий: «строками»

$$x_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}, \quad x \in \mathfrak{X},$$

«столбцами»

$$\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}, \quad \mu \in \mathfrak{M},$$

«матрицы» избранных событий, а также всей «матрицей»

$$\mathfrak{X}_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\}.$$

Напомним, что «строки» $x_\mathfrak{M}$ и «столбцы» $\mathfrak{X}_\mu$ имеют еще одно название: «строки» называются $\mathfrak{M}$-*нечеткими событиями* $\widetilde{x} = x_\mathfrak{M}$, а «столбцы» — $\mathfrak{X}$-*нечеткими событиями* $\breve{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$. С формально-эвентологической точки зрения «матрицу» избранных событий, как множество событий $\mathfrak{X}_\mathfrak{M}$, также можно рассматривать в качестве одного-единственного $(\mathfrak{X}, \mathfrak{M})$-*нечеткого события*

$$\{\breve{\sim}\} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \mathfrak{X}_\mathfrak{M},$$

содержащего в себе в качестве своих подмножеств и все $\mathfrak{M}$-нечеткие, и все $\mathfrak{X}$-нечеткие события[17]:

$$\{\breve{\sim}\} = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \widetilde{x} = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \breve{\mu}.$$

Представим себе подмножество нечеткого события $\{\breve{\sim}\}$, состоящее из таких событий $x_\mu \in \mathfrak{X}_\mathfrak{M}$, которые наступают тогда, когда наступает э-событие $\omega \in \Omega$, и введем для него специальное обозначение

$$\{\breve{\sim}\}(\omega) = \{x_\mu \in \mathfrak{X}_\mathfrak{M} :\ \omega \in x_\mu\} \subseteq \{\breve{\sim}\}.$$

Введем также специальные обозначения для подмножеств нечетких событий $\widetilde{x}$ и $\breve{\mu}$, наступающих при наступлении э-события $\omega \in \Omega$. Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ обозначим

$$\widetilde{x}(\omega) = \{x_\mu \in \widetilde{x} :\ \omega \in x_\mu\} \subseteq \widetilde{x},$$

$$\widetilde{x}^c(\omega) = \{x_\mu \in \widetilde{x} :\ \omega \in x_\mu^c\} = \widetilde{x} - \widetilde{x}(\omega) \subseteq \widetilde{x}$$

— соответствующие подмножества $\widetilde{x}$. Для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ обозначим

$$\breve{\mu}(\omega) = \{x_\mu \in \breve{\mu} :\ \omega \in x_\mu\} \subseteq \breve{\mu},$$

[17] Знак «$\sum$» обозначает здесь сет-операцию объединения непересекающихся множеств событий.

$$\breve{\mu}^c(\omega) = \{x_\mu \in \breve{\mu} :\ \omega \in x_\mu^c\} = \breve{\mu} - \breve{\mu}(\omega) \subseteq \breve{\mu}$$

— соответствующие подмножества $\breve{\mu}$. Введем также специальные «параллельные» обозначения для подмножеств $\mu$- или $x$-имен событий $x_\mu$, принадлежащих соответственно нечетким событиям $\tilde{x}$ или $\breve{\mu}$ и наступающих при наступлении э-события $\omega \in \Omega$. Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ обозначим

$$W_x(\omega) = \{\mu \in \mathfrak{M} :\ \omega \in x_\mu\} \subseteq \mathfrak{M},$$

$$W_x^c(\omega) = \{\mu \in \mathfrak{M} :\ \omega \in x_\mu^c\} = \mathfrak{M} - W_x u(\omega) \subseteq \mathfrak{M}$$

— соответствующие подмножества $\mu$-имен. Для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ обозначим

$$X_\mu(\omega) = \{x \in \mathfrak{X} :\ \omega \in x_\mu\} \subseteq \mathfrak{X},$$

$$X_\mu^c(\omega) = \{x \in \mathfrak{X} :\ \omega \in x_\mu^c\} = \mathfrak{X} - X_\mu(\omega) \subseteq \mathfrak{X}.$$

— соответствующие подмножества $x$-имен. В только что введенных обозначениях для каждого $\omega \in \Omega$ справедливы, например, следующие очевидные представления:

$$\tilde{x}(\omega) = \{x_\mu,\ \mu \in W_x(\omega)\}, \qquad \breve{\mu}(\omega) = \{x_\mu,\ x \in X_\mu(\omega)\}.$$

1) «Квази-нечеткое» э-событие. Множество событий $\mathfrak{X}_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, или, что то же, нечеткое событие $\{\backsim\} = \mathfrak{X}_\mathfrak{M}$, разбивает пространство э-событий $\Omega$ на события-терраски, «занумерованные» его произвольными подмножествами $X_W \subseteq \mathfrak{X}_\mathfrak{M}$ и определяемые соответствующими террасными формулами

$$\mathrm{ter}(X_W) = \bigcap_{x_\mu \in X_W} x_\mu \bigcap_{x_\mu \in X_W^c} x_\mu^c.$$

Если зафиксировать $\omega \in \Omega$ и для удобства иначе обозначить

$$X_W(\omega) = \{x_\mu \in \mathfrak{X}_\mathfrak{M} :\ \omega \in x_\mu\} = \{\backsim\}(\omega)$$

— одно-единственное из этих подмножеств, составленное из событий, которые наступают «одновременно» с наступлением $\omega \in \Omega$, — то «в целом» нечеткое событие $\{\backsim\}$ при наступлении данного $\omega \in \Omega$ «не способно уразуметь», что наступило *именно это* э-событие $\omega \in \Omega$, и

«понимает» только то, что наступило *какое-то* э-событие, принадлежащее событию-терраске[18] $\mathrm{ter}(X_W(\omega))$. Данное событие-терраска называется $\{\tilde{}\}$-*э-событием* и имеет два специальных обозначения

$$\omega_{\{\tilde{}\}} = \mathrm{ter}(X_W(\omega)) = \omega_{\mathfrak{x}_{\mathfrak{M}}}.$$

Из него одного-единственного формально образуется моноплет — так называемое *«квази-нечеткое» э-событие*

$$\tilde{\tilde{\omega}} = \Big\{\omega_{\{\tilde{}\}}\Big\} = \Big\{\omega_{\mathfrak{x}_{\mathfrak{M}}}\Big\}.$$

2) $\mathfrak{X}$-нечеткие э-события. Каждое множество событий $x_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$, $x \in \mathfrak{X}$, или, что то же, $\mathfrak{M}$-нечеткое событие $\widetilde{x} = x_{\mathfrak{M}}$ разбивает пространство э-событий $\Omega$ на события-терраски, «занумерованные» подмножествами $\mu$-имен $W_x \subseteq \mathfrak{M}$ и определяемые соответствующими террасными формулами

$$\mathrm{ter}_x(W_x) = \bigcap_{\mu\in W_x} x_\mu \bigcap_{\mu\in W_x^c} x_\mu^c, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Если зафиксировать $\omega \in \Omega$ и обозначить

$$W_x(\omega) = \{\mu \in \mathfrak{M} :\ \omega \in x_\mu\} \subseteq \mathfrak{M}$$

— одно-единственное из этих подмножеств, составленное из $\mu$-имен событий $x_\mu \in \widetilde{x}$, которые наступают «одновременно» с наступлением $\omega \in \Omega$, то «в целом» нечеткое событие $\widetilde{x}$ при наступлении данного $\omega \in \Omega$ «не способно уразуметь», что наступило *именно это* э-событие $\omega \in \Omega$, и «понимает» только то, что наступило *какое-то* э-событие, принадлежащее событию-терраске[19] $\mathrm{ter}_x(W_x(\omega))$. Данное событие-терраска называется $x$-*э-событием* и имеет специальное обозначение

$$\omega_x = \mathrm{ter}_x(W_x(\omega)),$$

[18] $\{\tilde{}\}$-э-события $\omega_{\mathfrak{x}_{\mathfrak{M}}}$ ограничивают «разрешающую способность» нечеткого события $\{\tilde{}\}$ отличать элементарные события $\omega \in \Omega$ одно от другого: элементарные события, попадающие в одно $\{\tilde{}\}$-э-событие $\omega_{\mathfrak{x}_{\mathfrak{M}}}$, для нечеткого события $\{\tilde{}\}$ оказываются эквивалентными.

[19] $x$-э-события $\omega_x$ ограничивают «разрешающую способность» нечеткого события $\widetilde{x}$ отличать элементарные события $\omega \in \Omega$ одно от другого: элементарные события, попадающие в одно $x$-э-событие $\omega_x$, для нечеткого события $\widetilde{x}$ оказываются эквивалентными.

а вместе взятые они образуют так называемое $\mathfrak{X}$-*нечеткое э-событие*

$$\breve{\omega} = \{\omega_x,\ x \in \mathfrak{X}\}.$$

3) $\mathfrak{M}$-нечеткие э-события. Каждое множество событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\},\ \mu \in \mathfrak{M}$, или, что то же, $\mathfrak{X}$-нечеткое событие $\breve{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$, разбивает пространство э-событий $\Omega$ на события-терраски, «занумерованные» подмножествами $x$-имен $X_\mu \subseteq \mathfrak{X}$ и определяемые соответствующими террасными формулами

$$\mathrm{ter}_\mu(X_\mu) = \bigcap_{x \in X_\mu} x_\mu \bigcap_{x \in X_\mu^c} x_\mu^c, \quad \mu \in \mathfrak{M}.$$

Если зафиксировать $\omega \in \Omega$ и обозначить

$$X_\mu(\omega) = \{x \in \mathfrak{X} :\ \omega \in x_\mu\} \subseteq \mathfrak{X}$$

— одно-единственное из этих подмножеств, составленное из $x$-имен событий $x_\mu \in \breve{\mu}$, которые наступают «одновременно» с наступлением $\omega \in \Omega$, то «в целом» нечеткое событие $\breve{\mu}$ при наступлении данного $\omega \in \Omega$ «не способно уразуметь», что наступило *именно это* э-событие $\omega \in \Omega$, и «понимает» только то, что наступило *какое-то* э-событие, принадлежащее событию-терраске[20] $\mathrm{ter}_\mu(X_\mu(\omega))$. Данное событие-терраска называется $\mu$-*э-событием* и имеет специальное обозначение

$$\omega_\mu = \mathrm{ter}_\mu(X_\mu(\omega)),$$

а вместе взятые они образуют $\mathfrak{M}$-*нечеткое э-событие*

$$\widetilde{\omega} = \{\omega_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}.$$

Теорема (о нечетких э-событиях). *Пусть* $\breve{\widetilde{\omega}} = \left\{\omega_{\{\breve{\sim}\}}\right\} = \left\{\omega_{\mathfrak{X}_\mathfrak{M}}\right\}$ *— квази-нечеткое э-событие,* $\widetilde{\omega} = \{\omega_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ *—* $\mathfrak{M}$*-нечеткое э-событие,* $\breve{\omega} = \{\omega_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$ *—* $\mathfrak{X}$*-нечеткое э-событие. Тогда*

$$\omega_{\mathfrak{X}_\mathfrak{M}} = \bigcap_{\mu \in \mathfrak{M}} \omega_\mu = \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \omega_x,$$

[20] $\mu$-э-события $\omega_\mu$ ограничивают «разрешающую способность» нечеткого события $\breve{\mu}$ отличать элементарные события $\omega \in \Omega$ одно от другого: элементарные события, попадающие в одно $\mu$-э-событие $\omega_\mu$, для нечеткого события $\breve{\mu}$ оказываются эквивалентными.

*или иначе:*

$$\omega_{\{\widetilde{\sim}\}} = \bigcap_{\omega_\mu \in \widetilde{\omega}} \omega_\mu = \bigcap_{\omega_x \in \widetilde{\omega}} \omega_x.$$

Доказательство следует из определений нечетких э-событий.

### «Стенография» колмогоровской аксиоматики определения вероятности в эвентологии нечетких событий

Приведем в «стенографическом» стиле перечень основных определений колмогоровской аксиоматики, перенесенных по аналогии в эвентологию нечетких событий, совершенно не углубляясь в детали и свойства вновь вводимых эвентологических понятий, поскольку они совершенно аналогичны классическим колмогоровским, за исключением того, что место сет-операций над событиями занимают *сет-операции по Минковскому над нечеткими событиями* — множествами обычных событий. Так, например, *алгебра нечетких событий* определяется как множество замкнутых относительно сет-операций по Минковскому нечетких событий, которое содержит невозможное нечеткое событие, а *вероятность, определяемая на алгебре нечетких событий,* обладает привычным свойством аддитивности, но относительно сет-операций по Минковскому.

В «матрице» избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M},\ x \in \mathfrak{X}\}$ мы различаем нечеткие события двух видов: «строки» $\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ называются $\mathfrak{M}$-*нечеткими событиями*, а «столбцы» $\widetilde{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$ — $\mathfrak{X}$-*нечеткими событиями (разумами)*. Хотя определения колмогоровской аксиоматики для нечетких событий этих двух видов совершенно друг другу аналогичны, приведем и те, и другие, чтобы читатель, сравнивая, смог обратить внимание на детали.

#### «Стенография» определений $\mathfrak{M}$-нечетких событий

***Определение 1-$\mathfrak{M}$.*** *$\mathfrak{M}$-нечеткое элементарное событие (э-событие)* — это $|\mathfrak{M}|$-множество $\widetilde{\omega} = \{\omega_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, состоящее из $\mathcal{F}$-измеримых событий $\omega_\mu \subseteq \Omega$, каждое из которых наступает, когда наступает $\omega \in \Omega$, и представляет собой одно из событий-террасок,

порожденных множеством событий $\overset{\frown}{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$:

$$\omega_\mu = \begin{cases} \mathrm{ter}_\mu(\emptyset), & \omega \in \mathrm{ter}_\mu(\emptyset), \\ \dots, & \dots, \\ \mathrm{ter}_\mu(X_\mu), & \omega \in \mathrm{ter}_\mu(X_\mu),\ \emptyset \subset X_\mu \subset \mathfrak{X}, \\ \dots, & \dots, \\ \mathrm{ter}_\mu(\mathfrak{X}), & \omega \in \mathrm{ter}_\mu(\mathfrak{X}), \end{cases}$$

в которое попадает наступившее $\omega \in \Omega$.

***Определение 2-$\mathfrak{M}$.*** *Пространство элементарных $\mathfrak{M}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{M}|$-множество $\widetilde{\Omega} = \{\Omega,\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \{\underbrace{\Omega, \dots, \Omega}_{|\mathfrak{M}|}\}$, состоящее из одного и того же пространства элементарных событий $\Omega$. ***Определение 3-$\mathfrak{M}$.*** *$\mathfrak{M}$-нечеткое событие* — это $|\mathfrak{M}|$-множество, состоящее из $\widetilde{\mathcal{F}}$-измеримых событий: $\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, где $x_\mu \subseteq \Omega$. ***Определение 4-$\mathfrak{M}$.*** *Достоверное $\mathfrak{M}$-нечеткое событие* — это $|\mathfrak{M}|$-множество $\widetilde{\Omega} = \{\Omega,\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \{\underbrace{\Omega, \dots, \Omega}_{|\mathfrak{M}|}\}$, состоящее из одного и того же достоверного события $\Omega$. ***Определение 5-$\mathfrak{M}$.*** *Невозможное $\mathfrak{M}$-нечеткое событие* — это $|\mathfrak{M}|$-множество $\widetilde{\emptyset} = \{\emptyset,\ \mu \in \mathfrak{M}\} = \{\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{|\mathfrak{M}|}\}$, состоящее из одного и того же невозможного события $\emptyset$. ***Определение 6-$\mathfrak{M}$.*** *Алгебра $\mathfrak{M}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{M}|$-множество $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, состоящее из алгебр обычных событий. ***Определение 7-$\mathfrak{M}$.*** *Измеримое пространство $\mathfrak{M}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{M}|$-множество $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_\mu),\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, состоящее из измеримых пространств событий. ***Определение 8-$\mathfrak{M}$.*** *Вероятность $\widetilde{\mathcal{F}}$-измеримого $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{x}$ $(\in)$ $\widetilde{\mathcal{F}}$* определяется по формуле:

$$\mathbf{P}(\widetilde{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(x_\mu).$$

***Определение 9-$\mathfrak{M}$.*** *Вероятностное пространство $\mathfrak{M}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{M}|$-множество

$$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mathbf{P}),\ \mu \in \mathfrak{M}\},$$

состоящее из вероятностных пространств обычных событий, отличающихся только алгебрами событий $\mathcal{F}_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}$.

**«Стенография» определений $\mathfrak{X}$-нечетких событий**

***Определение 1-$\mathfrak{X}$.*** *$\mathfrak{X}$-нечеткое элементарное событие (э-событие)* — это $|\mathfrak{X}|$-множество $\tilde{\omega} = \{\omega_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$, состоящее из $\mathcal{F}$-измеримых событий $\omega_x \subseteq \Omega$, каждое из которых наступает, когда наступает $\omega \in \Omega$, и представляет собой одно из событий-террасок, порожденных множеством событий $\tilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$:

$$\omega_x = \begin{cases} \mathrm{ter}_x(\emptyset), & \omega \in \mathrm{ter}_x(\emptyset), \\ \dots, & \dots, \\ \mathrm{ter}_x(W_x), & \omega \in \mathrm{ter}_x(W_x),\ \emptyset \subset W_x \subset \mathfrak{M}, \\ \dots, & \dots, \\ \mathrm{ter}_x(\mathfrak{M}), & \omega \in \mathrm{ter}_x(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

в которое попадает наступившее $\omega \in \Omega$.

***Определение 2-$\mathfrak{X}$.*** *Пространство элементарных $\mathfrak{X}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{X}|$-множество $\tilde{\Omega} = \{\Omega,\ x \in \mathfrak{X}\} = \{\underbrace{\Omega, \dots, \Omega}_{|\mathfrak{X}|}\}$, состоящее из одного и того же пространства элементарных событий $\Omega$.

***Определение 3-$\mathfrak{X}$.*** *$\mathfrak{X}$-нечеткое событие* — это $|\mathfrak{X}|$-множество, состоящее из $\tilde{\mathcal{F}}$-измеримых событий: $\tilde{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$, где $x_\mu \subseteq \Omega$.

***Определение 4-$\mathfrak{X}$.*** *Достоверное $\mathfrak{X}$-нечеткое событие* — это $|\mathfrak{X}|$-множество $\tilde{\Omega} = \{\Omega,\ x \in \mathfrak{X}\} = \{\underbrace{\Omega, \dots, \Omega}_{|\mathfrak{X}|}\}$, состоящее из одного и того же достоверного события $\Omega$.

***Определение 5-$\mathfrak{X}$.*** *Невозможное $\mathfrak{X}$-нечеткое событие* — это $|\mathfrak{X}|$-множество $\tilde{\emptyset} = \{\emptyset,\ x \in \mathfrak{X}\} = \{\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{|\mathfrak{X}|}\}$, состоящее из одного и того же невозможного события $\emptyset$.

***Определение 6-$\mathfrak{X}$.*** *Алгебра $\mathfrak{X}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{X}|$-множество $\tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$, состоящее из алгебр обычных событий.

***Определение 7-$\mathfrak{X}$.*** *Измеримое пространство $\mathfrak{X}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{X}|$-множество $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_\mu),\ x \in \mathfrak{X}\}$, состоящее из измеримых пространств событий.

***Определение 8-$\mathfrak{X}$.*** *Вероятность $\tilde{\mathcal{F}}$-измеримого*

$\mathfrak{X}$-*нечеткого события* $\tilde{\mu}$ $(\in)$ $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ определяется по формуле:

$$\mathbf{P}(\tilde{\mu}) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|} \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(x_\mu).$$

***Определение 9-$\mathfrak{X}$.*** *Вероятностное пространство $\mathfrak{X}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{X}|$-множество

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_x, \mathbf{P}),\ x \in \mathfrak{X}\},$$

состоящее из вероятностных пространств обычных событий, отличающихся только алгебрами событий $\mathcal{F}_x,\ x \in \mathfrak{X}$.

### 10.3.5 Классическая вероятность

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^{\cdot})$, где $\Omega$ — конечное пространство элементарных событий — исходов «случайного эксперимента», а $\mathbf{P}^{\cdot}$ — *классическая вероятность*, определяемая для каждого $\mathcal{F}$-измеримого события $x \in \mathcal{F}$ как «отношение числа исходов, благоприятствующих $x$, к общему числу исходов в $\Omega$», иначе говоря, как $\mathbf{P}^{\cdot}(x) = |x|/|\Omega|$ — *отношение мощности*[21] *события $x$ к мощности $\Omega$*. Поскольку классическая вероятность определяется как отношение мощностей, то она всегда определена для любого события из алгебры конечного пространства э-событий. Для ее определения не надо никаких дополнительных предположений и не требуется никакой другой информации, кроме информации о событии. Как только определено событие, сразу же определена и его классическая вероятность.

Посмотрим на классическую вероятность $\mathbf{P}^{\cdot}$, как на еще одну характеристику события. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^{\cdot})$ называется *классическим вероятностным пространством*, а в наименованиях всех характеристик $\mathcal{F}$-измеримых событий и функций, определенных на классическом вероятностном пространстве, также будет

[21] Пока $\Omega$ более чем конечное не требуется. Если же возникнет необходимость в бесконечном $\Omega$, то *классическую вероятность* на алгебре его событий вполне можно определить как геометрическую вероятность, т.е. как отношение некоей *равномерной меры* (например, меры Лебега) события $x$ и всего $\Omega$, где под равномерной мерой понимается мера, инвариантная относительно взаимнооднозначных отображений $\mathcal{F}$-измеримых событий.

фигурировать термин *классический*. Например, классическая вероятность события $x \in \mathcal{F}$ — это не что иное, как *классическое ожидание*[22] его индикатора:

$$\mathbf{P}^{\cdot}(x) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^{\cdot}}\mathbf{1}_x = \sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{1}_x(\omega)\mathbf{P}^{\cdot}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{1}_x(\omega) = \frac{|x|}{|\Omega|}.$$

Введение еще одной «параллельной» характеристики события приводит к тому, что к «стенографии» колмогоровской аксиоматики для нечетких событий каждого из двух видов добавляются по два определения. ***Определение 8-$\mathfrak{M}/\mathbf{P}^{\cdot}$.*** *Классическая вероятность $\widetilde{\mathcal{F}}$-измеримого $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\tilde{x}$ $(\in)$ $\widetilde{\mathcal{F}}$* определяется формулой:

$$\mathbf{P}^{\cdot}(\tilde{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\mathbf{P}^{\cdot}(x_\mu).$$

***Определение 9-$\mathfrak{M}/\mathbf{P}^{\cdot}$.*** *Классическое вероятностное пространство $\mathfrak{M}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{M}|$-множество

$$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}^{\cdot}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mathbf{P}^{\cdot}),\ \mu \in \mathfrak{M}\},$$

состоящее из классических вероятностных пространств обычных событий, отличающихся только алгебрами событий $\mathcal{F}_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}$. ***Определение 8-$\mathfrak{X}/\mathbf{P}^{\cdot}$.*** *Классическая вероятность $\widetilde{\mathcal{F}}$-измеримого $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\tilde{\mu}$ $(\in)$ $\widetilde{\mathcal{F}}$* определяется формулой:

$$\mathbf{P}^{\cdot}(\tilde{\mu}) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\mathbf{P}^{\cdot}(x_\mu).$$

***Определение 9-$\mathfrak{X}/\mathbf{P}^{\cdot}$.*** *Классическое вероятностное пространство $\mathfrak{X}$-нечетких событий* — это $|\mathfrak{X}|$-множество

$$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}^{\cdot}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_x, \mathbf{P}^{\cdot}),\ x \in \mathfrak{X}\},$$

состоящее из классических вероятностных пространств обычных событий, отличающихся только алгебрами событий $\mathcal{F}_x,\ x \in \mathfrak{X}$.

[22] *Классическое ожидание* — математическое ожидание относительно классической вероятности.

### 10.3.6 Эвентологическая функция степени принадлежности э-события нечеткому событию — это его индикатор

Рассмотрим «матрицу» избранных «обычных» колмогоровских событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M},\ x \in \mathfrak{X}\}$. Каждому событию $x_\mu \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$, как подмножеству $\Omega$, взаимно-однозначно соответствует его собственный индикатор

$$\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in x_\mu, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

— $\mathcal{F}$-измеримая функция на $\Omega$, которая, определяя своими значениями *принадлежность* каждого э-события $\omega \in \Omega$ событию $x_\mu$, полностью определяет последнее. А поскольку речь идет об «обычном» событии $x_\mu$, то для каждого э-события $\omega \in \Omega$ возможны лишь два исхода: $\omega$ либо принадлежит $x_\mu$, либо нет, в полном взаимно-однозначном соответствии со значениями его индикатора $\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$, который равен 1, когда $\omega \in x_\mu$, и нулю в противном случае. По вполне понятным соображениям о значениях индикатора события $x_\mu$ можно говорить как о степенях принадлежности э-событий этому событию, а сам индикатор, как функцию на $\Omega$, естественно называть *функцией степени принадлежности* э-событий «обычному» событию $x_\mu$.

$\mathfrak{M}$-нечеткое событие $\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ и $\mathfrak{X}$-нечеткое событие $\breve{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$ эвентологически определяются как соответствующие множества $\mathcal{F}$-измеримых событий — подмножеств пространства э-событий $\Omega$, выбранных из исходной «матрицы» «обычных» событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$. Рассмотрим арифметические средние индикаторов «обычных» событий, которые составляют множества событий $\widetilde{x}$ и $\breve{\mu}$, введем для них специальные обозначения:

$$\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega),\ x \in \mathfrak{X}, \quad \mathbf{1}_{\breve{\mu}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega), \quad \mu \in \mathfrak{M},$$

и будем называть *индикатором $\mathfrak{M}$-нечеткого события* $\widetilde{x}$ и *индикатором $\mathfrak{X}$-нечеткого события* $\breve{\mu}$ соответственно.

Теорема (представление индикаторов нечетких событий). *Индикатор $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{x}$ и индикатор $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\breve{\mu}$*

*могут быть представлены в виде*:

$$\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \mathrm{ter}_x(\emptyset_x), \\ \dots, & \dots, \\ |W_x|/|\mathfrak{M}|, & \omega \in \mathrm{ter}_x(W_x),\ W_x \subseteq \mathfrak{M}, \\ \dots, & \dots, \\ 1, & \omega \in \mathrm{ter}_x(\mathfrak{M}_x), \end{cases}$$

$$\mathbf{1}_{\widehat{\mu}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \mathrm{ter}_\mu(\emptyset_\mu), \\ \dots, & \dots, \\ |X_\mu|/|\mathfrak{X}|, & \omega \in \mathrm{ter}_\mu(X_\mu),\ X_\mu \subseteq \mathfrak{X}, \\ \dots, & \dots, \\ 1, & \omega \in \mathrm{ter}_\mu(\mathfrak{X}_\mu), \end{cases}$$

*где* $\emptyset_x = \emptyset \subseteq \mathfrak{M}$ *— пустое,* $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ *— полное подмножество* $\mathfrak{M}$*, и, наконец,*

$$\mathrm{ter}_x(W_x) = \bigcap_{\mu \in W_x} x_\mu \bigcap_{\mu \in W_x^c} x_\mu^c, \quad W_x \subseteq \mathfrak{M},$$

$$\mathrm{ter}_\mu(X_\mu) = \bigcap_{x \in X_\mu} x_\mu \bigcap_{x \in X_\mu^c} x_\mu^c, \quad X_\mu \subseteq \mathfrak{X},$$

*— соответствующие события-террраски двух видов, каждый набор которых одного вида, как уже известно, образует собственное разбиение пространства э-событий* $\Omega$:

$$\Omega = \sum_{W_x \subseteq \mathfrak{M}} \mathrm{ter}_x(W_x) = \sum_{X_\mu \subseteq \mathfrak{X}} \mathrm{ter}_\mu(X_\mu).$$

Доказательство почти очевидно, так как, например, выполнение отношения принадлежности: $\omega \in \mathrm{ter}_x(W_x)$ означает, что $\omega$ принадлежит ровно $|W_x|$ событиям $x_\mu$ из $|\mathfrak{M}|$ событий, образующих множество событий $\widetilde{x}$. Следовательно, $\sum_{\mu \in W_x} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega) = |W_x|$ для $\omega \in \mathrm{ter}_x(W_x)$, а индикатор $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{x}$ на этом $\omega$ равен требуемой величине: $\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega) = |W_x|/|\mathfrak{M}|$. Для $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\widehat{\mu}$ доказательство аналогично.

Замечание (индикатор нечеткого события не определяет его). Между «обычными» событиями и их индикаторами существует взаимнооднозначное соответствие, которое означает, что и событие определяет свой индикатор, и индикатор — событие. Этого не скажешь об индикаторах нечетких событий. Хотя, конечно, $\mathfrak{M}$-нечеткое событие $\widetilde{x}$ полностью определяет свой индикатор $\mathbf{1}_{\widetilde{x}}$ как функцию на $\Omega$, но обратное утверждение неверно. Если на $\Omega$ задан индикатор $\mathbf{1}_{\widetilde{x}}$, то по его значениям невозможно однозначно восстановить множество событий $\widetilde{x}$, т.е. то нечеткое событие $\widetilde{x}$, индикатором которого он является. Можно лишь сказать, что индикатор каждого нечеткого события служит индикатором целого множества нечетких событий, индикаторы которых совпадают. То же, разумеется, относится и к индикаторам $\mathfrak{X}$-нечетких событий. Что касается единственного нечеткого события

$$\{\backsim\} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}, x \in \mathfrak{X}\},$$

определяемого всей «матрицей» избранных событий $\mathfrak{X}_\mathfrak{M}$, то его индикатор определяется аналогично как арифметическое среднее индикаторов «обычных» событий, образующих это множество:

$$\mathbf{1}_{\{\backsim\}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{X}||\mathfrak{M}|} \sum_{x\in\mathfrak{X}} \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega).$$

Этот индикатор обладает всеми преимуществами и недостатками только что рассмотренных индикаторов $\mathfrak{M}$-нечетких и $\mathfrak{X}$-нечетких событий. Так же как и эти индикаторы, индикатор $\mathbf{1}_{\{\backsim\}}$ не определяет однозначно нечеткое событие $\{\backsim\}$ и служит индикатором для целого множества различных «матриц» избранных событий, имеющих совпадающие индикаторы. Для индикатора нечеткого события $\{\backsim\}$, конечно, выполнена аналогичная теореме о представлении индикаторов нечетких событий (стр. 228) собственная

Теорема (два представления индикатора нечеткого события $\{\backsim\}$). *Индикатор нечеткого события* $\{\backsim\}$ *может быть представлен в*

*двух эквивалентных видах*:

$$\mathbf{1}_{\{\tilde{\supset}\}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathrm{ter}_x(\emptyset_x), \\ \dots, & \dots, \\ \dfrac{1}{|\mathfrak{M}||\mathfrak{X}|}\sum\limits_{x\in\mathfrak{X}} |W_x|, & \omega \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathrm{ter}_x(W_x), \quad W_x \subseteq \mathfrak{M},\ x \in \mathfrak{X}, \\ \dots, & \dots, \\ 1, & \omega \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathrm{ter}_x(\mathfrak{M}_x), \end{cases}$$

$$\mathbf{1}_{\{\tilde{\supset}\}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \bigcap\limits_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathrm{ter}_\mu(\emptyset_\mu), \\ \dots, & \\ \dfrac{1}{|\mathfrak{M}||\mathfrak{X}|}\sum\limits_{\mu\in\mathfrak{M}} |X_\mu|, & \omega \in \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathrm{ter}_x(W_x), \quad X_\mu \subseteq \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}, \\ \dots, & \\ 1, & \omega \in \bigcap\limits_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathrm{ter}_\mu(\mathfrak{X}_\mu). \end{cases}$$

Доказательство трудностей не представляет и следует, например, из теоремы о нечетких э-событиях (стр. 222).

Интерпретация значений только что введенных индикаторов нечетких событий достаточно проста, каждый из них как функция на $\Omega$ принимает на э-событии $\omega \in \Omega$ значение, равное доле тех «обычных» событий из множеств, определяющих эти нечеткие события, которые наступают при наступлении данного э-события $\omega \in \Omega$. Такая очевидная интерпретация оправдывает еще одно название для рассматриваемых индикаторов нечетких событий: все три индикатора называются также *эвентологическими функциями степени принадлежности* э-событий нечеткому событию. Как функции на $\Omega$ вновь введенные *эвентологические функции степени принадлежности* ничем не отличаются от *функции степени принадлежности*, которая определяется в теории нечетких множеств Заде. Единственное, но принципиальное отличие заключается в формулах, определяющих эти функции и связывающих их с индикаторами «обычных»

событий:

$$\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega),\ x\in\mathfrak{X},\quad \mathbf{1}_{\widecheck{\mu}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega),\ \mu\in\mathfrak{M},$$

$$\mathbf{1}_{\{\widecheck{\sim}\}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{X}||\mathfrak{M}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega).$$

Таких формул нет и никогда не было в классической теории нечетких множеств Заде. Именно эти формулы позволили доказать основную эвентологическую теорему о нечетких событиях, с помощью которой единственным образом определяется эвентологическая функция степени принадлежности произвольной сет-операции над множеством нечетких событий. Из-за отсутствия подобной теоремы в теории нечетких множеств Заде до сих пор используется множество вариантов функции степени принадлежности для одной и той же сет-операции: фактически, к каждой конкретной задаче подбирается свой вариант функции степени принадлежности для той или иной сет-операции. Этого существенного недостатка удалось избежать в предлагаемой нами эвентологической теории нечетких событий.

Кроме того, эвентологическая теория указывает, что причиной множественности вариантов функции степени принадлежности в теории нечетких множеств Заде служат структуры зависимостей «обычных» событий, из которых складываются нечеткие события, как множества «обычных» событий. Именно структуры зависимостей событий определяют вид эвентологической функции степени принадлежности. А множественность вариантов в классической теории объясняется тем, что надо опираться не только на функции степени принадлежности, которые не несут всей информации о нечетких событиях, а на все Э-распределение множества событий, которые составляют данное нечеткое событие, и на Э-распределение множества нечетких событий, как это и принято делать в новой эвентологической теории нечетких событий.

### 10.3.7 Эвентологическое распределение множества нечетких событий

И множество $\mathfrak{M}$-нечетких, и множество $\mathfrak{X}$-нечетких событий, каждое из них определяется своим *эвентологическим распределением*

*(Э-распределением)*. Подробно займемся только определением эвентологического распределения множества $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$, разбивающих пространство элементарных $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\widetilde{\Omega} = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \widetilde{\text{ter}}(X)$ на нечеткие события-террраски первого вида

$$\widetilde{\text{ter}}(X) = \left(\bigcap_{x \in X}\right) \widetilde{x} \left(\bigcap_{x \in X^c}\right) \widetilde{x}^{(c)}, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

которые есть не что иное, как $\mathfrak{M}$-нечеткие события

$$\widetilde{\text{ter}}(X) = \{\text{ter}_\mu(X),\ \mu \in \mathfrak{M}\},$$

где $\text{ter}_\mu(X),\ \mu \in \mathfrak{M}$ — обычные события-террраски, подмножества $\Omega$, первого вида. *Эвентологическим распределением (Э-распределением) множества $\mathfrak{M}$-нечетких событий* $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ называется множество вероятностей $\mathfrak{M}$-нечетких событий-террасок (первого вида)

$$\widetilde{p}(X) = \mathbf{P}\left(\widetilde{\text{ter}}(X)\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{\text{ter}}(X)\right) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}\left(\text{ter}_\mu(X)\right) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} p_\mu(X),$$

а $p_\mu(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ — эвентологическое распределение множества обычных событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$, которое есть не что иное, как нечеткое событие (разум) $\breve{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$. Э-распределение множества $\mathfrak{M}$-нечетких событий обладает всеми свойствами Э-распределений множеств обычных событий. Очевидно, что, например, $\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \widetilde{p}(X) = 1$. Так что с Э-распределением $\widetilde{p}(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ можно обращаться точно так же, как с Э-распределением $p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ множества обычных событий, подмножеств $\Omega$. Аналогично *эвентологическим распределением (Э-распределением) множества $\mathfrak{X}$-нечетких событий* $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$ называется множество вероятностей $\mathfrak{X}$-нечетких событий-террасок (второго вида)

$$\breve{p}(W) = \mathbf{P}\left(\breve{\text{ter}}(W)\right), \quad W \subseteq \mathfrak{M},$$

где

$$\mathbf{P}\left(\overset{\smile}{\mathrm{ter}}(W)\right) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\mathbf{P}\left(\mathrm{ter}_x(W)\right) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}p_x(W),$$

а $p_x(W),\ W \subseteq \mathfrak{M}$ — эвентологическое распределение множества обычных событий $x_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, которое есть не что иное, как нечеткое событие $\widetilde{x} = x_{\mathfrak{M}}$.

### Формулы обращения Мебиуса–Минковского

Как и множества обычных событий, множества нечетких событий любого из двух видов могут быть эквивалентным образом определены Э-распределениями разного рода, среди которых наиболее употребительны шесть, соответствующие аналогичным Э-распределениям множеств обычных событий: $p(X),\ p_X,\ p^X,\ u(X),\ u_X$ и $u^X,\ X \subseteq \mathfrak{X}$. Так же как и различного рода Э-распределения множеств обычных событий попарно связаны *формулами обращения Мебиуса*, различного рода Э-распределения множеств нечетких событий попарно связаны *формулами*, которые следует назвать *формулами обращения Мебиуса–Минковского* и которые имеют естественную аналогию с классическими *формулами обращения Мебиуса*. Внешне формулы обращения Мебиуса–Минковского ничем не отличаются от своих классических аналогов. Например, пара формул, связывающая Э-распределения множества нечетких событий $\widetilde{p}(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ и $\widetilde{p}_X,\ X \subseteq \mathfrak{X}$, имеет вид

$$\widetilde{p}_X = \sum_{X\subseteq Y}\widetilde{p}(Y), \quad \widetilde{p}(X) = \sum_{X\subseteq Y}(-1)^{|Y|-|X|}\widetilde{p}_Y, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

а связывающая Э-распределения $\breve{p}(W),\ W \subseteq \mathfrak{M}$ и $\breve{p}_W,\ W \subseteq \mathfrak{M}$, имеет вид

$$\breve{p}_W = \sum_{W\subseteq V}\breve{p}(V), \quad \breve{p}(W) = \sum_{W\subseteq V}(-1)^{|V|-|W|}\breve{p}_V, \quad W \subseteq \mathfrak{M},$$

точно такой же, как и соответствующая пара классических формул обращения Мебиуса, связывающая Э-распределения множества обычных событий $p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ и $p_X,\ X \subseteq \mathfrak{X}$. Подчеркнем, что *формулы обращения Мебиуса–Минковского* — это те же формулы

обращения Мебиуса, но для функций, определенных на структурах множеств, частично-упорядоченных не относительно обычного отношения включения множеств, а относительно их отношения включения по Минковскому. Действительно, стоит вспомнить, что нечеткие события-терраски обоих видов записываются в другой эквивалентной форме:

$$\tilde{\mathrm{ter}}(X) = \mathrm{ter}(\overset{(\sim)}{X}), \quad \breve{\mathrm{ter}}(W) = \mathrm{ter}(\overset{(\smile)}{W}),$$

«занумерованными» не подмножествами $X \subseteq \mathfrak{X}$ или $W \subseteq \mathfrak{M}$, а соответствующими им подмножествами $\mathfrak{M}$-нечетких или $\mathfrak{X}$-нечетких событий: $\overset{(\sim)}{X} = \{\tilde{x},\ x \in X\}$ или $\overset{(\smile)}{W} = \{\breve{\mu},\ \mu \in W\}$. Отсюда получаем эквивалентную запись для вероятностей нечетких событий-террасок:

$$p(\overset{(\sim)}{X}) = \tilde{p}(X), \quad p(\overset{(\smile)}{W}) = \breve{p}(W),$$

в которой формулы обращения Мебиуса–Минковского остаются вполне корректными, но становятся весьма громоздкими:

$$p_{\overset{(\sim)}{X}} = \sum_{\overset{(\sim)}{X} (\subseteq) \overset{(\sim)}{Y}} p(\overset{(\sim)}{Y}), \quad p(\overset{(\sim)}{X}) = \sum_{\overset{(\sim)}{X} (\subseteq) \overset{(\sim)}{Y}} (-1)^{|\overset{(\sim)}{Y}|-|\overset{(\sim)}{X}|} p_{\overset{(\sim)}{Y}}, \quad \overset{(\sim)}{X} (\subseteq) \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}},$$

$$p_{\overset{(\smile)}{W}} = \sum_{\overset{(\smile)}{W} (\subseteq) \overset{(\smile)}{V}} p(\overset{(\smile)}{V}), \quad p(\overset{(\smile)}{W}) = \sum_{\overset{(\smile)}{W} (\subseteq) \overset{(\smile)}{V}} (-1)^{|\overset{(\smile)}{V}|-|\overset{(\smile)}{W}|} p_{\overset{(\smile)}{V}}, \quad \overset{(\smile)}{W} (\subseteq) \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}},$$

хотя и явно указывают на то, что рассматриваемая структура множеств частично упорядочена относительно включения по Минковскому.

### 10.3.8 Зависимость нечетких событий

О нечетких событиях $\tilde{x}\ (\subseteq)\ \tilde{\Omega}$ и $\breve{\mu}\ (\subseteq)\ \breve{\Omega}$, как и о событиях — подмножествах $\Omega$, вполне можно говорить, что они *«независимы», «притягиваются» или «отталкиваются» относительно вероятности* $\mathbf{P}$ в вероятностных пространствах нечетких событий $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$ и $(\breve{\Omega}, \breve{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$ соответственно. Более того, так как на алгебре нечетких событий «автоматически» определена еще одна числовая функция — *классическая вероятность* $\mathbf{P}^{\cdot}$, — то можно в том же самом смысле говорить

о событиях, *«независимых», «притягивающихся» или «отталкивающихся» относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{:}$ в классических вероятностных пространствах $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}^{:})$ и $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}^{:})$ соответственно.

### Вероятностная зависимость

Вероятностная зависимость $\mathfrak{M}$-нечетких событий. Два $\mathfrak{M}$-нечетких события $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ называются *попарно независимыми относительно вероятности* $\mathbf{P}$, если для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ пара событий $x_\mu$ и $y_\mu$ независима. Иными словами, если два $\mathfrak{M}$-нечетких события $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ *попарно независимы относительно вероятности* $\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P}(\widetilde{x}(\cap)\widetilde{y}) = \mathbf{P}^{i}(\widetilde{x}(\cap)\widetilde{y}),$$

где

$$\mathbf{P}^{i}(\widetilde{x}(\cap)\widetilde{y}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\mathbf{P}(x_\mu)\mathbf{P}(y_\mu).$$

Обратное утверждение, очевидно, неверно. Множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{X} = \{\widetilde{x},\ x \in X\}$ называется $|X|$*-арно независимым относительно вероятности* $\mathbf{P}$, если для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ множество событий $X_\mu = \{x_\mu,\ x \in X\}$ $|X|$-арно независимо. Иными словами, если множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{X} = \{\widetilde{x},\ x \in X\}$ $|X|$*-арно независимо относительно вероятности* $\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right) = \mathbf{P}^{i}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right),$$

где

$$\mathbf{P}^{i}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\prod_{x\in X}\mathbf{P}(x_\mu).$$

Обратное утверждение неверно. Множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$ называется *независимым в совокупности относительно вероятности* $\mathbf{P}$, если для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ независимы в совокупности множества событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$. Иными словами, если

множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\tilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$ *независимо в совокупности относительно вероятности* $\mathbf{P}$, то $|X|$-арно независимы все подмножества $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{X} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$.

Вероятностная зависимость $\mathfrak{X}$-нечетких событий. Два $\mathfrak{X}$-нечетких события $\breve{\mu}$ и $\breve{\nu}$ называются *попарно независимыми относительно вероятности* $\mathbf{P}$, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ пара событий $x_\mu$ и $y_\nu$ независима. Иными словами, если два $\mathfrak{X}$-нечетких события $\breve{\mu}$ и $\breve{\nu}$ *попарно независимы относительно вероятности* $\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P}(\breve{\mu}(\cap)\breve{\nu}) = \mathbf{P}^i(\breve{\mu}(\cap)\breve{\nu}),$$

где

$$\mathbf{P}^i(\breve{\mu}(\cap)\breve{\nu}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\mathbf{P}(x_\mu)\mathbf{P}(y_\mu).$$

Обратное утверждение, очевидно, неверно. Множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\smile)}{W} = \{\breve{\mu},\ \mu \in W\}$ называется $|W|$-*арно независимым относительно вероятности* $\mathbf{P}$, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ множество событий $W_x = \{x_\mu,\ \mu \in W\}$ $|W|$-арно независимо. Иными словами, если множество $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\smile)}{W} = \{\breve{\mu},\ \mu \in W\}$ $|W|$-*арно независимо относительно вероятности* $\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\breve{\mu}\right) = \mathbf{P}^i\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\breve{\mu}\right),$$

где

$$\mathbf{P}^i\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\breve{\mu}\right) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\prod_{\mu\in W}\mathbf{P}(x_\mu).$$

Обратное утверждение неверно. Множество $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ называется *независимым в совокупности относительно вероятности* $\mathbf{P}$, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ независимы в совокупности множества событий $\mathfrak{M}_x = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$. Иными словами, если множество $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ *независимо в совокупности относительно вероятности* $\mathbf{P}$, то $|W|$-арно независимы все подмножества $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\smile)}{W} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$.

### Классическая вероятностная зависимость

Классическая вероятностная зависимость $\mathfrak{M}$-нечетких событий. Два $\mathfrak{M}$-нечетких события $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ называются *попарно независимыми относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, если для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ пара событий $x_\mu$ и $y_\mu$ независима. Иными словами, если два $\mathfrak{M}$-нечетких события $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ *попарно независимы относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, то

$$\mathbf{P}^{\cdot}(\widetilde{x}(\cap)\widetilde{y}) = \mathbf{P}^{\cdot i}(\widetilde{x}(\cap)\widetilde{y}),$$

где

$$\mathbf{P}^{\cdot i}(\widetilde{x}(\cap)\widetilde{y}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\mathbf{P}^{\cdot}(x_\mu)\mathbf{P}^{\cdot}(y_\mu).$$

Обратное утверждение, очевидно, неверно. Множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{X} = \{\widetilde{x},\ x \in X\}$ называется $|X|$-*арно независимым относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, если для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ множество событий $X_\mu = \{x_\mu,\ x \in X\}$ $|X|$-арно независимо. Иными словами, если множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{X} = \{\widetilde{x},\ x \in X\}$ $|X|$-*арно независимо относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, то

$$\mathbf{P}^{\cdot}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right) = \mathbf{P}^{\cdot i}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right),$$

где

$$\mathbf{P}^{\cdot i}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\prod_{x\in X}\mathbf{P}^{\cdot}(x_\mu).$$

Обратное утверждение неверно. Множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$ называется *независимым в совокупности относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, если для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ независимы в совокупности множества событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$. Иными словами, если множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$ *независимо в совокупности относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, то $|X|$-арно независимы все подмножества $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{X} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$.

Классическая вероятностная зависимость $\mathfrak{X}$-нечетких событий. Два $\mathfrak{X}$-нечетких события $\breve{\mu}$ и $\breve{\nu}$ называются *попарно независимыми относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ пара событий $x_\mu$ и $y_\nu$ независима. Иными словами, если два $\mathfrak{X}$-нечетких события $\breve{\mu}$ и $\breve{\nu}$ *попарно независимы относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, то

$$\mathbf{P}^{\cdot}(\breve{\mu}(\cap)\breve{\nu}) = \mathbf{P}^{\cdot i}(\breve{\mu}(\cap)\breve{\nu}),$$

где

$$\mathbf{P}^{\cdot i}(\breve{\mu}(\cap)\breve{\nu}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\mathbf{P}^{\cdot}(x_\mu)\mathbf{P}^{\cdot}(y_\mu).$$

Обратное утверждение, очевидно неверно. Множество $\mathfrak{M}$-нечетких событий $\overset{(\smile)}{W} = \{\breve{\mu},\ \mu \in W\}$ называется $|W|$-*арно независимым относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ множество событий $W_x = \{x_\mu,\ \mu \in W\}$ $|W|$-арно независимо. Иными словами, если множество $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\smile)}{W} = \{\breve{\mu},\ \mu \in W\}$ $|W|$-*арно независимо относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, то

$$\mathbf{P}^{\cdot}\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\breve{\mu}\right) = \mathbf{P}^{\cdot i}\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\breve{\mu}\right),$$

где

$$\mathbf{P}^{\cdot i}\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\breve{\mu}\right) = \frac{1}{|\mathfrak{X}|}\sum_{x\in\mathfrak{X}}\prod_{\mu\in W}\mathbf{P}^{\cdot}(x_\mu).$$

Обратное утверждение неверно. Множество $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ называется *независимым в совокупности относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$ независимы в совокупности множества событий $\mathfrak{M}_x = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$. Иными словами, если множество $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ *независимо в совокупности относительно классической вероятности* $\mathbf{P}^{\cdot}$, то $|W|$-арно независимы все подмножества $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\smile)}{W} \subseteq \overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}$.

### Меры зависимостей: ковариация и классическая ковариация множеств нечетких событий

Любые случайные события — подмножества $\Omega$, в которые тем или иным образом вмешивается разум, становятся нечеткими. Поэтому, как только разум включается в предмет исследования математической теории[23], теория вынуждена иметь дело не просто со случайными событиями, а со *случайными нечеткими событиями* и, следовательно, иметь возможность измерять их зависимость прежде всего *относительно вероятности* и *относительно классической вероятности*, а также и *относительно их комбинаций*, которые до сих пор ускользали от внимания исследователей, использующих математические теории для изучения событий. Мерой зависимости «обычных»[24] событий служит *ковариация событий*, введенная в [**?**] для множества событий[25] $X \subseteq \mathfrak{X}$ как разность

$$\mathsf{Kov}_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x\right) - \mathbf{P}^i\left(\bigcap_{x\in X} x\right)$$

между вероятностью их пересечения в общей и независимой ситуации, где

$$\mathbf{P}^i\left(\bigcap_{x\in X} x\right) = \prod_{x\in X} \mathbf{P}(x)$$

— вероятность пересечения множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ в ситуации, когда события из множества $X$ независимы относительно вероятности $\mathbf{P}$. Поскольку для $\mathfrak{M}$-нечетких и $\mathfrak{X}$-нечетких событий уже определена вероятность, то аналогичным образом можно определить так

[23] В эвентологии это происходит, когда *конечное множество* $\mathfrak{M}$ определяется и включается в круг основных понятий теории в качестве *множества индивидуальных разумов*.

[24] Прилагательное «обычный» здесь маловыразительно, однако оно настойчиво предлагает себя каждый раз, когда речь заходит о случайных событиях — подмножествах $\Omega$, которые служат традиционным предметом исследования колмогоровской теории вероятностей и в определении которых нет упоминания о разуме, наблюдающем, участвующем, вмешивающемся или даже управляющем событиями.

[25] Ковариация множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ называется также $|X|$-*арной ковариацией*.

называемые *арные ковариации множеств нечетких событий* относительно вероятности $\mathbf{P}$:

$$\widetilde{\mathsf{Kov}}_X = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right) - \mathbf{P}^i\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

$$\widecheck{\mathsf{Kov}}_W = \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\widecheck{\mu}\right) - \mathbf{P}^i\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\widecheck{\mu}\right), \quad W \subseteq \mathfrak{M},$$

и относительно классической вероятности $\mathbf{P}^{:}$:

$$\widetilde{\mathsf{Kov}}^{:}_X = \mathbf{P}^{:}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right) - \mathbf{P}^{:i}\left(\left(\bigcap_{x\in X}\right)\widetilde{x}\right), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

$$\widecheck{\mathsf{Kov}}^{:}_W = \mathbf{P}^{:}\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\widecheck{\mu}\right) - \mathbf{P}^{:i}\left(\left(\bigcap_{\mu\in W}\right)\widecheck{\mu}\right), \quad W \subseteq \mathfrak{M}.$$

Детальное рассмотрение свойств *арных ковариаций множеств нечетких событий* дается в [66].

### 10.3.9 О сет-операциях над множеством событий

Напомним в нескольких словах о *произвольных сет-операциях*[26] над множеством событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ — произвольная совокупность подмножеств множества $\mathfrak{X}$, где $2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств множества $\mathfrak{X}$. Под $\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, понимаются события-терраски, образующие разбиение пространства элементарных событий $\Omega = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} \mathrm{ter}(X)$. *Произвольной сет-операцией над множеством событий* $\mathfrak{X}$ называется $|\mathfrak{X}|$-местная сет-операция $\mathcal{O} : \underbrace{\mathcal{F}\times\ldots\times\mathcal{F}}_{|\mathfrak{X}|} \to \mathcal{F}$, порождаемая произвольной со-

[26] *сет-операция* — краткий синоним термина «теоретико-множественная операция».

вокупностью подмножеств $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ как $\mathcal{F}$-измеримое событие

$$\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{x\in\mathfrak{X}} x = \sum_{X\in\mathcal{O}} \mathrm{ter}(X) \qquad (\star)$$

— непересекающееся объединение событий-террасок $\mathrm{ter}(X)$ по подмножествам $X$ из порождающей совокупности $\mathcal{O}$. Каждой совокупности подмножеств событий $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ взаимно-однозначно соответствует сет-операция над множеством событий $\mathfrak{X}$, которая для удобства обозначается $\mathcal{O}$ — так же, как и порождающая ее совокупность подмножеств событий. Таким образом, общее число различных сет-операций, которые можно осуществить над множеством событий $\mathfrak{X}$, равно числу подмножеств множества $2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $2^{2^{|\mathfrak{X}|}}$. Среди произвольных сет-операций, определяемых формулой $(\star)$, есть две константы: $\emptyset$ и $\Omega$, а также, разумеется, все популярные сет-операции — пересечение, объединение и симметрическая разность:

$$\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{x\in\mathfrak{X}} x = \begin{cases} \emptyset, & \mathcal{O} = \emptyset, \\ \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} x, & \mathcal{O} = \{\mathfrak{X}\}, \\ \triangle\limits_{x\in\mathfrak{X}} x, & \mathcal{O} = \{X \in 2^{\mathfrak{X}} :\ |X| = 1 \pmod 2\}, \\ \bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}} x, & \mathcal{O} = 2^{\mathfrak{X}} - \{\emptyset\}, \\ \Omega, & \mathcal{O} = 2^{\mathfrak{X}}. \end{cases}$$

Кроме того, например,

$$\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{x\in\mathfrak{X}} x = \begin{cases} y, & \mathcal{O} = \{X \in 2^{\mathfrak{X}} :\ y \in X\}, \\ y \cap z, & \mathcal{O} = \{X \in 2^{\mathfrak{X}} :\ \{y, z\} \subseteq X\}, \\ \mathrm{ter}(X), & \mathcal{O} = \{X\}, \\ \mathrm{ter}(X) + \mathrm{ter}(Y), & \mathcal{O} = \{X, Y\}. \end{cases}$$

### 10.3.10 Сет-операции по Минковскому над множеством нечетких событий

Сет-операциям над множеством событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, соответствуют *сет-операции по Минковскому*[27] *над множеством нечетких событий* $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\tilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$, порожденным множеством $\mathfrak{X}$. Множество нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ выбрано из алгебры нечетких событий $\breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}$ вероятностного пространства $(\breve{\Omega}_{\mathfrak{M}}, \breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}, \mathbf{P})$, где вероятность $\mathbf{P}$ нечеткого события $\tilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\} \in \breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}$ индуцируется на $\hat{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}$ вероятностью $\mathbf{P}$ по формуле $\mathbf{P}(\tilde{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{P}(x_\mu)$. Напомним, что пересечение по Минковскому двух нечетких событий $\tilde{x},\ \tilde{y} \in \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ определяется как нечеткое событие $\tilde{x}(\cap)\tilde{y} = \{x_\mu \cap y_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$. Пусть $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ — произвольная совокупность подмножеств множества $\mathfrak{X}$, где $2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств множества $\mathfrak{X}$. Под $\tilde{\text{ter}}(X) = (\bigcap)_{x\in X}\tilde{x}\,(\bigcap)_{x\in X^c}\tilde{x}^c$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ понимаются нечеткие события-террраски $\tilde{\text{ter}}(X) = \Big\{\text{ter}_\mu(X),\ \mu \in \mathfrak{M}\Big\}$, где для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$ события $\text{ter}_\mu(X) = \bigcap_{x\in X} x_\mu \bigcap_{x\in X^c} x_\mu^c$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ — это обычные события-террраски, образующие разбиение пространства элементарных событий $\Omega = \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} \text{ter}_\mu(X),\ \mu \in \mathfrak{M}$. Сказанное эквивалентно утверждению, что нечеткие события-террраски попарно не *пересекаются по Минковскому* $\tilde{\text{ter}}(X)\ (\cap)\ \tilde{\text{ter}}(Y) = \tilde{\emptyset} \iff X \neq Y$ и образуют *разбиение по Минковскому* нечеткого достоверного события $\tilde{\Omega} = (\sum)_{X\in 2^{\mathfrak{X}}} \tilde{\text{ter}}(X)$.

*Произвольной сет-операцией по Минковскому над множеством нечетких событий* $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ называется $|\mathfrak{X}|$-местная сет-операция по Минковскому $\Big(\mathcal{O}\Big) : \underbrace{\breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}} \times \ldots \times \breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}}_{|\mathfrak{X}|} \to \breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}$, порождаемая произвольной совокупностью подмножеств $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ как $\breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}$-измеримое нечеткое событие

$$\Big(\mathcal{O}\Big)_{x\in\mathfrak{X}} \tilde{x} = \Big(\sum_{X\in\mathcal{O}}\Big) \tilde{\text{ter}}(X) \qquad (\star\star)$$

[27] *Минковский, Герман (Minkowski, Hermann, 1864–1909)* — немецкий математик и физик родом из России. Основные труды по геометрии, теории чисел, математической физике и теории относительности.

— *непересекающееся по Минковскому объединение* нечетких событий-террасок $\widetilde{\mathrm{ter}}(X)$ по подмножествам $X$ из порождающей совокупности $\mathcal{O}$. Заметим, что сет-операцию по Минковскому можно определить эквивалентным образом как нечеткое событие

$$\Big(\bigcirc\Big)_{x\in\mathfrak{X}}\widetilde{x}=\left\{\bigcirc_{x\in\mathfrak{X}}x_\mu,\ \mu\in\mathfrak{M}\right\}=\left\{\sum_{X\in\mathcal{O}}\mathrm{ter}_\mu(X),\ \mu\in\mathfrak{M}\right\},\qquad(\star\star')$$

составленное из сет-операций $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_\mu)=\bigcirc_{x\in\mathfrak{X}}x_\mu,\quad \mu\in\mathfrak{M}$ над соответствующими множествами обычных событий $\mathfrak{X}_\mu=\{x_\mu,\ x\in\mathfrak{X}\},\quad \mu\in\mathfrak{M}$.

Каждой совокупности подмножеств событий $\mathcal{O}\subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ взаимнооднозначно соответствует сет-операция $(\mathcal{O})$ над множеством нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$. Таким образом, общее число различных сет-операций, которые можно осуществить над множеством нечетких событий $\mathfrak{X}$, равно числу подмножеств множества $2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $2^{2^{|\mathfrak{X}|}}$. Среди произвольных сет-операций, определяемых формулой $(\star\star)$, есть две константы: $\breve{\emptyset}_{\mathfrak{M}}=\{\underbrace{\emptyset,\dots\emptyset}_{|\mathfrak{M}|}\},\quad \breve{\Omega}_{\mathfrak{M}}=\{\underbrace{\Omega,\dots\Omega}_{|\mathfrak{M}|}\}$ а также, разумеется, все популярные сет-операции — пересечение, объединение и симметрическая разность по Минковскому:

$$\Big(\bigcirc\Big)_{x\in\mathfrak{X}}\widetilde{x}=\begin{cases}\breve{\emptyset}_{\mathfrak{M}}, & \mathcal{O}=\emptyset,\\ \Big(\bigcap\Big)_{x\in\mathfrak{X}}\widetilde{x}, & \mathcal{O}=\{\mathfrak{X}\},\\ (\triangle)_{x\in\mathfrak{X}}\widetilde{x}, & \mathcal{O}=\{X\in 2^{\mathfrak{X}}:\ |X|=1\ (\mathrm{mod}\ 2)\},\\ \Big(\bigcup\Big)_{x\in\mathfrak{X}}\widetilde{x}, & \mathcal{O}=2^{\mathfrak{X}}-\{\emptyset\},\\ \breve{\Omega}_{\mathfrak{M}}, & \mathcal{O}=2^{\mathfrak{X}}.\end{cases}$$

Кроме того, например,

$$\Big(\bigcirc\Big)_{x\in\mathfrak{X}}\widetilde{x} = \begin{cases} \widetilde{y}, & \mathcal{O} = \{X \in 2^{\mathfrak{X}} : \ y \in X\}, \\ \widetilde{y}(\cap)\widetilde{z}, & \mathcal{O} = \{X \in 2^{\mathfrak{X}} : \ \{y,z\} \subseteq X\}, \\ \widetilde{\mathrm{ter}}(X), & \mathcal{O} = \{X\}, \\ \widetilde{\mathrm{ter}}(X) + \widetilde{\mathrm{ter}}(Y), & \mathcal{O} = \{X, Y\}. \end{cases}$$

### 10.3.11 Индикаторы сет-операций

Поскольку результат произвольной сет-операции $\mathcal{O}$ над множеством событий $\mathfrak{X}$ — это $\mathcal{F}$-измеримое событие $\mathcal{O}(\mathfrak{X}) = \bigcirc_{x\in\mathfrak{X}} x \in \mathcal{F}$, то имеет смысл говорить о его индикаторе $\mathbf{1}_{\mathcal{O}(\mathfrak{X})}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \mathcal{O}(\mathfrak{X}), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ По определению сет-операции $\mathcal{O}(\mathfrak{X}) = \bigcirc\limits_{x\in\mathfrak{X}} x = \sum\limits_{X\in\mathcal{O}} \mathrm{ter}(X)$. Так как события-террасы $\mathrm{ter}(X)$ не пересекаются, то $\mathbf{1}_{\mathcal{O}(\mathfrak{X})}(\omega) = \sum_{X\in\mathcal{O}} \mathbf{1}_{\mathrm{ter}(X)}(\omega)$ — индикатор сет-операции $\mathcal{O}(\mathfrak{X})$ равен сумме индикаторов тех событий-террасок, которым соответствуют подмножества событий $X \in \mathcal{O}$. Но индикатор события-террасы $\mathrm{ter}(X)$ очевидно равен

$$\mathbf{1}_{\mathrm{ter}(X)}(\omega) = \prod_{x\in X} \mathbf{1}_x(\omega) \prod_{x\in X^c} \mathbf{1}_{x^c}(\omega) = \prod_{x\in X} \mathbf{1}_x(\omega) \prod_{x\in X^c} (1 - \mathbf{1}_x(\omega)).$$

В итоге получаем формулу

$$\mathbf{1}_{\mathcal{O}(\mathfrak{X})}(\omega) = \sum_{X\in\mathcal{O}} \left( \prod_{x\in X} \mathbf{1}_x(\omega) \prod_{x\in X^c} (1 - \mathbf{1}_x(\omega)) \right),$$

связывающую индикатор сет-операции над множеством событий с индикаторами событий из этого множества.

## 10.4 Основная эвентологическая теорема о нечетких событиях

Основная эвентологическая теорема о нечетких событиях предлагает формулу для вычисления индикатора произвольной сет-операции

над множеством нечетких событий, того самого индикатора, который играет в эвентологии нечетких событий ту же роль, что и *функции степени принадлежности* в теории нечетких множеств Заде, является ее эвентологическим обобщением и называется *эвентологической функцией степени принадлежности*. Подойдем к формулировке и доказательству этой теоремы путем, возможно, не самым коротким, но позволяющим шаг за шагом детально прояснить и смысл самой теоремы, и метод ее доказательства.

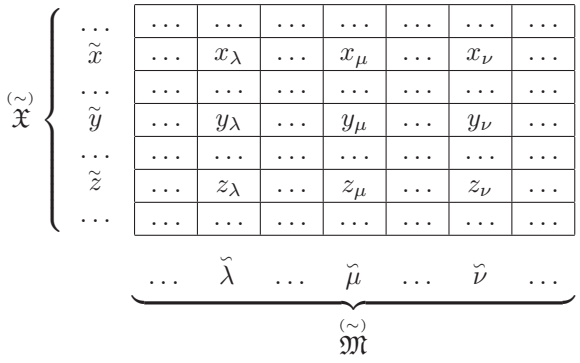



Рис. 10.6. *Матрица избранных событий* $\mathfrak{X}_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, составленная из $\mathcal{F}$-измеримых событий $x_\mu \subseteq \Omega$, «строки» которой $x_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ определяют *нечеткие события* $\widetilde{x} = x_\mathfrak{M}$, образующие множество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$, а «столбцы» $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$ — *нечеткие разумы* $\breve{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$, образующие множество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$.

Рассмотрим $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $\mathfrak{X}_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ — *матрицу избранных $\mathcal{F}$-измеримых событий* $x_\mu \subseteq \Omega$, «строки» которой $x_\mathfrak{M} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ определяют *нечеткие события* $\widetilde{x} = x_\mathfrak{M}$, образующие множество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$, а «столбцы» $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$ — *нечеткие разумы* $\breve{\mu} = \mathfrak{X}_\mu$, образующие множество $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\breve{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ (рис. 10.6).

1. Разбиение пространства элементарных событий нечетким событием. Напомним, что любое конечное множество $\mathcal{F}$-измеримых событий разбивает пространство элементарных событий на события-

терраски, порожденные этим множеством. Это относится и к каждому нечеткому событию, которое по определению есть конечное множество событий

$$\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}.$$

Если договориться обозначать $W_x$ — произвольное подмножество $\mathfrak{M}$, $W_x^c = \mathfrak{M} - W_x$ — его дополнение, а

$$\mathrm{ter}_x(W_x) = \bigcap_{\mu \in W_x} x_\mu \bigcap_{\mu \in W_x^c} x_\mu^c$$

— события-терраски, порожденные нечетким событием $\widetilde{x}$, то $\Omega = \sum_{W_x \subseteq \mathfrak{M}} \mathrm{ter}_x(W_x)$ — каждое нечеткое событие $\widetilde{x} \in \overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ разбивает пространство элементарных событий $\Omega$ на соответствующие порождаемые им события-терраски: $\mathrm{ter}_x(W_x),\ W_x \subseteq \mathfrak{M}$.

2. Разбиение пространства элементарных событий множеством нечетких событий. Нетрудно догадаться, что множество всех представляющих для нас интерес нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x \in \mathfrak{X}\}$ разбивает $\Omega$ на еще более мелкие так называемые *субсобытия-терраски*:

$$\Omega = \sum_{\breve{W} \in \underbrace{2^{\mathfrak{M}} \times \ldots \times 2^{\mathfrak{M}}}_{|\mathfrak{X}|}} \mathrm{ter}(\breve{W}),$$

каждое из которых имеет вид пересечения событий-террасок:

$$\mathrm{ter}(\breve{W}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{X}} \mathrm{ter}_x(W_x).$$

Здесь использован символ «$\sim$» оператора «расслоения по $\mathfrak{X}$» для обозначения

$$\breve{W} = \{W_x,\ x \in \mathfrak{X}\} \in \underbrace{2^{\mathfrak{M}} \times \ldots \times 2^{\mathfrak{M}}}_{|\mathfrak{X}|}$$

— произвольного $|\mathfrak{X}|$-множества подмножеств $\mathfrak{M}$.

3. Произвольная сет-операция над множеством нечетких событий. Произвольная сет-операция

$$\big(\mathcal{O}\big) : \underbrace{\breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}} \times \ldots \times \breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}}_{|\mathfrak{X}|} \to \breve{\mathcal{F}}_{\mathfrak{M}}$$

над множеством $\mathcal{F}$-измеримых нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ определяется соответствующей произвольной совокупностью подмножеств $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$ как нечеткое событие

$$\Big(\underset{x\in\mathfrak{X}}{\mathcal{O}}\Big)\,\tilde{x} = \Big(\sum_{X\in\mathcal{O}}\Big)\,\tilde{\mathrm{ter}}(X) = \Big\{\underset{x\in\mathfrak{X}}{\mathcal{O}}\, x_\mu \ : \mu \in \mathfrak{M}\Big\},$$

где

$$\underset{x\in\mathfrak{X}}{\mathcal{O}}\, x_\mu = \sum_{X\in\mathcal{O}} \mathrm{ter}_\mu(X) = \sum_{X\in\mathcal{O}} \bigcap_{x\in X} x_\mu \bigcap_{x\in X^c} x_\mu^c$$

— соответствующая произвольная сет-операция над множеством $\mathcal{F}$-измеримых событий $\breve{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$, определяемая той же совокупностью $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$.

4. Индикатор произвольной сет-операции над множеством нечетких событий — кусочно-постоянная функция на $\Omega$. Легко понять, что индикатор любой сет-операции $\Big(\mathcal{O}\Big)$ над множеством нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}}$ — это кусочно-постоянная функция на $\Omega$, которая если и может меняться, то лишь от одного субсобытия-терраски к другому, оставаясь для всех $\omega$ в пределах каждого субсобытия-терраски $\mathrm{ter}(\breve{W}) = \bigcap\limits_{x\in\mathfrak{X}} \mathrm{ter}_x(W_x)$ постоянной.

5. Индуцирование сет-операций. Если каждому $x \in \mathfrak{X}$ сопоставляется некоторое произвольное подмножество $W_x \subseteq \mathfrak{M}$, то все вместе они образуют $|\mathfrak{X}|$-множество произвольных подмножеств $\mathfrak{M}$: $\breve{W} = \{W_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$. Так действует оператор $\sim :\ W \ \to\ \breve{W}$, который «расслаивает» имя «$W$ — произвольное подмножество $\mathfrak{M}$» при помощи множества $\mathfrak{X}$. Имеем два равномощных множества $|\mathfrak{X}| = |\breve{W}|$, между которыми установлено взаимно-однозначное соответствие: $x \ \to\ W_x,\quad x \in \mathfrak{X}$, или $x \ \leftarrow\ W_x,\quad W_x \in \breve{W}$. Вольно говоря, элементы $\breve{W}$ «занумерованы» элементами $\mathfrak{X}$. Причем элементами первого множества служат подмножества $\Omega$, а элементами второго — подмножества $\mathfrak{M}$. Совершенно очевидно, что произвольную операцию $\mathcal{O}$ над множеством $\mathfrak{X}$ подмножеств $\Omega$, определяемую совокупностью подмножеств $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathfrak{X}}$, можно применить и к множеству $\breve{W}$ подмножеств $\mathfrak{M}$, *индуцируя новую сет-операцию на множестве подмножеств* $\mathfrak{M}$

по аналогичной формуле

$$\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} W_x = \sum_{X\subseteq\mathcal{O}} \operatorname{ter}_{\widehat{W}}(X) \subseteq \mathfrak{M}, \qquad (*)$$

где для $X \subseteq \mathfrak{X}$

$$\operatorname{ter}_{\widehat{W}}(X) = \bigcap_{x\in X} W_x \bigcap_{x\in X^c} W_x^c \subseteq \mathfrak{M}$$

— терраска-подмножество $\mathfrak{M}$, *индуцированная* терраской-подмножеством $\Omega$:

$$\operatorname{ter}_{\mathfrak{X}}(X) = \operatorname{ter}(X) = \bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c \subseteq \Omega.$$

*Таким образом произвольная сет-операция над одним множеством подмножеств* $(\mathfrak{X})$ *индуцирует формулой* $(*)$ *новую сет-операцию на другом множестве подмножеств* $(\check{W})$*, если между ними установлено взаимно-однозначное соответствие, т.е. если подмножества второго множества «занумерованы» подмножествами первого.*

Готовы все обозначения, чтобы записать формулу для индикатора произвольной сет-операции над множеством $\mathfrak{M}$-нечетких событий. Итак, справедлива

Теорема (формула для индикатора произвольной сет-операции над множеством $\mathfrak{M}$-нечетких событий). *Пусть*

$$(\mathcal{O})(\mathfrak{X}) = \Big(\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcup_{x\in\mathfrak{X}}\Big)\,\widetilde{x} = \left\{ \bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} x_\mu,\ \mu\in\mathfrak{M} \right\}$$

— *произвольная сет-операция над множеством* $\mathfrak{M}$*-нечетких событий* $\overset{(\sim)}{\mathfrak{X}} = \{\widetilde{x},\ x\in\mathfrak{X}\}$*, определяемая совокупностью подмножеств* $\mathcal{O}\subseteq 2^{\mathfrak{X}}$*. Тогда ее индикатор вычисляется по формуле:*

$$\mathbf{1}_{(\mathcal{O})(\mathfrak{X})}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathfrak{M}|}\left|\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \emptyset_x\right|, & \omega\in\operatorname{ter}(\check{\emptyset}_{\mathfrak{M}}), \\ \dots, & \dots, \\ \dfrac{1}{|\mathfrak{M}|}\left|\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} W_x\right|, & \omega\in\operatorname{ter}(\check{W}), \\ \dots, & \dots, \\ \dfrac{1}{|\mathfrak{M}|}\left|\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \mathfrak{M}_x\right|, & \omega\in\operatorname{ter}(\widetilde{\mathfrak{M}}), \end{cases}$$

*где* $\breve{W} = \{W_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$ *— произвольное* $|\mathfrak{X}|$*-множество подмножеств* $\mathfrak{M}$*, а* $\breve{\emptyset}_{\mathfrak{M}} = \underbrace{\{\emptyset, \ldots, \emptyset\}}_{|\mathfrak{X}|}$, $\breve{\mathfrak{M}} = \underbrace{\{\mathfrak{M}, \ldots, \mathfrak{M}\}}_{|\mathfrak{X}|}$ *—* $|\mathfrak{X}|$*-множества пустых и полных подмножеств* $\mathfrak{M}$ *соответственно.*

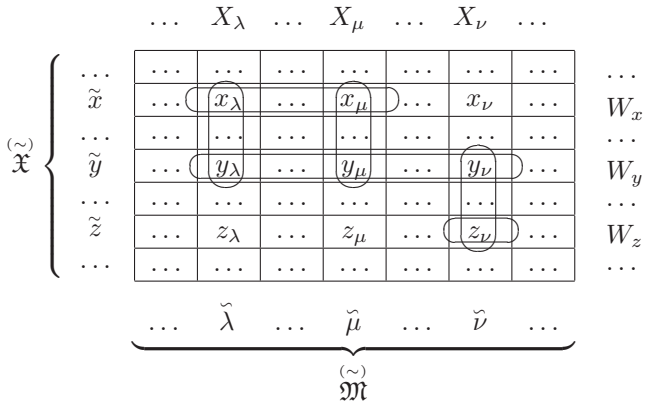



Рис. 10.7. *Двойственные наборы подмножеств* $X_\mu = \{x : \mu \in W_x\},\ \mu \in \mathfrak{M}$ множества $\mathfrak{X}$ и подмножеств $W_x = \{\mu\ :\ x \in X_\mu\},\ x \in \mathfrak{X}$ множества $\mathfrak{M}$, порожденные подмножеством $X_W = \bigcup\limits_{\mu\in\mathfrak{M}} \bigcup\limits_{x\in X_\mu} x_\mu = \bigcup\limits_{x\in\mathfrak{X}} \bigcup\limits_{\mu\in W_x} x_\mu$ элементов матрицы избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$

6. Двойственные наборы подмножеств, порождаемые произвольным подмножеством матрицы избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$. Выберем из матрицы избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ произвольное подмножество элементов $X_W \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ и представим его двумя способами, сначала в виде объединения его элементов, входящих в «столбцы», а затем элементов, входящих в «строки» этой матрицы. Сначала заметим, что всю матрицу избранных событий можно представить двумя способами в виде объединения «столбцов», которыми служат множества $\breve{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$, и «строк», которыми служат множества $\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$:

$$\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\mu\in\mathfrak{M}} \breve{\mu} = \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} \widetilde{x}.$$

Такими же двумя способами можно представить и произвольное под-

множество элементов этой матрицы:

$$X_W = \bigcup_{\mu\in\mathfrak{M}} (X_W \cap \check{\mu}) = \bigcup_{x\in\mathfrak{X}} (X_W \cap \tilde{x}).$$

Заметим, что

$$X_W \cap \check{\mu} = \bigcup_{x\in X_\mu} x_\mu, \quad X_W \cap \tilde{x} = \bigcup_{\mu\in W_x} x_\mu,$$

где

$$X_\mu = \{x : x_\mu \in X_W \cap \check{\mu}\} \subseteq \mathfrak{X}, \quad \mu \in \mathfrak{M},$$
$$W_x = \{\mu : x_\mu \in X_W \cap \tilde{x}\} \subseteq \mathfrak{M}, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Наборы подмножеств $\{X_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ и $\{W_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$, определяемые подмножеством $\mathfrak{X}_\mathfrak{M}$, связаны очевидными взаимно-обратными соотношениями $X_\mu = \{x : \mu \in W_x\} \subseteq \mathfrak{X}, \quad \mu \in \mathfrak{M}$ и $W_x = \{\mu : x \in X_\mu\} \subseteq \mathfrak{M}, \quad x \in \mathfrak{X}$.

Все готово, чтобы записать формулу для индикатора произвольной сет-операции над множеством $\mathfrak{X}$-нечетких событий. Итак, справедлива двойственная

Теорема (формула для индикатора произвольной сет-операции над множеством $\mathfrak{X}$-нечетких событий). *Пусть*

$$(\mathcal{O})(\mathfrak{M}) = \Big(\bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc\Big)_{\mu\in\mathfrak{M}} \check{\mu} = \left\{ \bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{\mu\in\mathfrak{M}} x_\mu,\ x \in \mathfrak{X} \right\}$$

*— произвольная сет-операция над множеством $\mathfrak{X}$-нечетких событий $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}} = \{\check{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, определяемая совокупностью подмножеств $\mathcal{O} \subseteq 2^\mathfrak{M}$. Тогда ее индикатор вычисляется по формуле:*

$$\mathbf{1}_{(\mathcal{O})(\mathfrak{M})}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathfrak{X}|} \left| \bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{\mu\in\mathfrak{M}} \emptyset_\mu \right|, & \omega \in \mathrm{ter}(\check{\emptyset}_\mathfrak{M}), \\ \dots, & \dots, \\ \dfrac{1}{|\mathfrak{X}|} \left| \bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{\mu\in\mathfrak{M}} X_\mu \right|, & \omega \in \mathrm{ter}(\widetilde{X}), \\ \dots, & \dots, \\ \dfrac{1}{|\mathfrak{X}|} \left| \bigcirc\!\!\!\!\!\!\bigcirc_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathfrak{X}_\mu \right|, & \omega \in \mathrm{ter}(\widetilde{\mathfrak{M}}), \end{cases}$$

*где* $\widetilde{X} = \{X_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ *— произвольное* $|\mathfrak{M}|$*-множество подмножеств* $\mathfrak{X}$*, а* $\widetilde{\emptyset}_{\mathfrak{X}} = \underbrace{\{\emptyset, \ldots, \emptyset\}}_{|\mathfrak{M}|}$, $\widetilde{\mathfrak{X}} = \underbrace{\{\mathfrak{X}, \ldots, \mathfrak{X}\}}_{|\mathfrak{M}|}$ *—* $|\mathfrak{M}|$*-множества пустых и полных подмножеств* $\mathfrak{X}$ *соответственно.*

### 10.4.1 Следствие из основной эвентологической теоремы

Из основной эвентологическая теоремы о нечетких событиях с очевидностью, не требующей дополнительных доказательств, вытекает одно очень важное свойство индикатора сет-операции над множеством нечетких событий, который иначе называется *эвентологической функцией степени принадлежности* э-событий нечеткому событию — результату данной сет-операции, и является единственным эвентологически корректным обобщением «обычных» функций степени принадлежности сет-операциям над нечеткими событиями, используемых во множестве различных эмпирических вариантов в теории нечетких множеств Заде (см. таблицу на стр. 200).

Предложенная в этой главе (стр. 202) «косметическая» эвентологическая модификация формул для операций над функциями степени принадлежности классической теории нечетких множеств Заде сводит все многообразие эмпирически используемых в этой теории операций к одной общей *операции Фреше*, зависящей от параметра, интерпретируемого как *Фреше-корреляция* нечетких событий (см. таблицу на стр. 203). Введенная эвентологами *операция Фреше* выгодно отличается от множества эмпирических вариантов классических операций тем, что всегда удовлетворяет неравенствам Фреше, чего нельзя сказать о некоторых классических операциях теории Заде (например, о дельта-операции).

Основная эвентологическая теорема идет существенно дальше «косметической» модификации классических формул Заде и полностью закрывает проблему выбора формул для сет-операций над нечеткими событиями. *Она предлагает одну-единственную общую эвентологически корректную формулу для индикатора произвольной сет-операции над любым множеством нечетких событий, иначе говоря — формулу для эвентологической функции степени принадлежности э-события результату данной сет-операции.* Основная теорема имеет общий характер, так как в качестве произволь-

ной сет-операции могут выступать привычные объединение, пересечение и симметрическая разность, а также любая другая возможная сет-операция над множеством нечетких событий. Важнейшим следствием основной эвентологической теоремы является замечательный факт: эвентологические функции степени принадлежности э-события пересечению и объединению множества нечетких событий, предлагаемые этой теоремой, всегда удовлетворяют неравенствам Фреше.

Приведем неравенства Фреше для функции степени принадлежности э-событий пересечению и объединению нечетких событий в двух вариантах: сначала для сет-операции над двумя нечеткими событиями, а затем — над произвольным множеством нечетких событий. Пусть $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ — два произвольных нечетких события, $x, y \in \mathfrak{X}$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ — любое подмножество $\mathfrak{X}$, а $\omega \in \Omega$ — любое э-событие из пространства э-событий $\Omega$.

1) Пересечение и объединение двух нечетких событий $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$:

$$\max\left\{0,\ \mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega)+\mathbf{1}_{\widetilde{y}}(\omega)-1\right\} \leqslant \mathbf{1}_{\widetilde{x}\ (\cap)\ \widetilde{y}}(\omega) \leqslant \min\left\{\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega),\ \mathbf{1}_{\widetilde{y}}(\omega)\right\},$$

$$\max\left\{\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega),\ \mathbf{1}_{\widetilde{y}}(\omega)\right\} \leqslant \mathbf{1}_{\widetilde{x}\ (\cup)\ \widetilde{y}}(\omega) \leqslant \min\left\{1,\ \mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega)+\mathbf{1}_{\widetilde{y}}(\omega)\right\}.$$

2) Пересечение и объединение множества нечетких событий $\{\widetilde{x},\ x \in X\}$:

$$\max\left\{0,\ 1-\sum_{x\in X}\left(1-\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega)\right)\right\} \leqslant \mathbf{1}_{\left(\bigcap\right)_{x\in X}\widetilde{x}}(\omega) \leqslant \min_{x\in X}\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega),$$

$$\max_{x\in X}\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega) \leqslant \mathbf{1}_{\left(\bigcup\right)_{x\in X}\widetilde{x}}(\omega) \leqslant \min\left\{1,\ \sum_{x\in X}\mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega)\right\}.$$

## 10.5 Случайные нечеткие события

$\mathfrak{M}$-нечеткое событие

$$\widetilde{x} = \{x_\mu \in \mathcal{F} :\ \mu \in \mathfrak{M}\}, \quad x \in \mathfrak{X},$$

— это множество из $|\mathfrak{M}|$ $\mathcal{F}$-измеримых событий $x_\mu \subseteq \Omega$. При наступлении э-события $\omega \in \Omega$ некоторые события из $\widetilde{x}$ наступают, а некоторые нет — в соответствии с тем, попадает или не попадает в них

э-событие $\omega$. События из $\widetilde{x}$, наступающие при наступлении э-события $\omega \in \Omega$, образуют подмножество событий

$$\widetilde{K}_x(\omega) = \{x_\mu \in \widetilde{x} : \ \omega \in x_\mu\} \subseteq \widetilde{x}$$

— одно из возможных значений случайного множества событий

$$\widetilde{K}_x : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\widetilde{x}}, 2^{2^{\widetilde{x}}}\right),$$

которое называется *случайным $\mathfrak{M}$-нечетким событием*. Аналогично определяется *случайное $\mathfrak{X}$-нечеткое событие*

$$\breve{K}_\mu : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\breve{\mu}}, 2^{2^{\breve{\mu}}}\right)$$

со значениями

$$\breve{K}_\mu(\omega) = \{x_\mu \in \breve{\mu} : \ \omega \in x_\mu\} \subseteq \breve{\mu}$$

— подмножествами $\mathfrak{X}$-нечеткого события

$$\breve{\mu} = \{x_\mu \in \mathcal{F} : \ x \in \mathfrak{X}\}, \quad \mu \in \mathfrak{M}.$$

### 10.5.1 Мощность нечеткого события

$\mathfrak{M}$-нечеткое событие $\widetilde{x} = \{x_\mu \in \mathcal{F} : \ \mu \in \mathfrak{M}\}$ — это множество, состоящее из $|\mathfrak{M}|$ событий $x_\mu \subseteq \Omega$. *Мощностью $\mathfrak{M}$-нечеткого события* $\widetilde{x}$ называется целое число $|\mathfrak{M}|$, равное мощности множества событий, которым оно определяется:

$$|\widetilde{x}|_{\mathfrak{M}} = \left|\{x_\mu \in \mathcal{F} : \ \mu \in \mathfrak{M}\}\right| = |\mathfrak{M}|.$$

*Мощность случайного $\mathfrak{M}$-нечеткого события* $\widetilde{K}_x$ определяется как с.в. $|\widetilde{K}_x|_{\mathfrak{M}}$, значениями которой при $\omega \in \Omega$ служат

$$|\widetilde{K}_x(\omega)|_{\mathfrak{M}} = \left|\{x_\mu \in \widetilde{x} : \ \omega \in x_\mu\}\right|$$

— мощности соответствующих значений случайного множества событий $\widetilde{K}_x$, принадлежащие множеству $\{0, 1, \ldots, |\mathfrak{M}|\}$. Средняя мощность случайного $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{K}_x$ определяется как математическое ожидание с.в. $|\widetilde{K}_x|_{\mathfrak{M}}$ и может быть вычислена по известной теореме Роббинса

$$\mathbf{E}|\widetilde{K}_x|_{\mathfrak{M}} = \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{P}(x_\mu). \qquad (*)$$

Напомним, что вероятность $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{x}$ определяется как математическое ожидание его индикатора:

$$\mathbf{P}(\widetilde{x}) = \mathbf{E}\mathbf{1}_{\widetilde{x}} = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega)\mathbf{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)\mathbf{P}(\omega) =$$

$$= \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}\mathbf{1}_{x_\mu} = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{P}(x_\mu).$$

Из $(*)$ следует, что вероятность $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{x}$ связана со средней мощностью случайного $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{K}_x$ формулой:

$$\mathbf{P}(\widetilde{x}) = \frac{\mathbf{E}|\widetilde{K}_x|_{\mathfrak{M}}}{|\widetilde{x}|_{\mathfrak{M}}} = \frac{\mathbf{E}|\widetilde{K}_x|_{\mathfrak{M}}}{|\mathfrak{M}|}, \quad x \in \mathfrak{X},$$

как отношение среднего числа наступающих событий к общему числу событий в $\widetilde{x}$, $x \in \mathfrak{X}$. Аналогично определяется *мощность $\mathfrak{X}$-нечеткого события*

$$|\breve{\mu}|_{\mathfrak{X}} = \Big|\{x_\mu \in \mathcal{F} : \ x \in \mathfrak{X}\}\Big| = |\mathfrak{X}|$$

и мощность $|\breve{K}_\mu|_{\mathfrak{X}}$ случайного $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\breve{K}_\mu$, принимающая значения

$$|\breve{K}_\mu(\omega)|_{\mathfrak{X}} = \Big|\{x_\mu \in \breve{\mu} : \ \omega \in x_\mu\}\Big|$$

из $\{0, 1, \ldots, |\mathfrak{X}|\}$. Средняя мощность случайного $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\breve{K}_\mu$ определяется как математическое ожидание с.в. $|\breve{K}_\mu|_{\mathfrak{X}}$ и может быть вычислена по теореме Роббинса:

$$\mathbf{E}|\breve{K}_\mu|_{\mathfrak{X}} = \sum_{x\in\mathfrak{X}} \mathbf{P}(x_\mu). \qquad (**)$$

Вероятность $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\widehat{\mu}$ связана со средней мощностью случайного $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\widehat{K}_\mu$ формулой:

$$\mathbf{P}(\widehat{\mu}) = \frac{\mathbf{E}|\widehat{K}_\mu|_{\mathfrak{X}}}{|\widehat{\mu}|_{\mathfrak{X}}} = \frac{\mathbf{E}|\widehat{K}_\mu|_{\mathfrak{X}}}{|\mathfrak{X}|}, \quad \mu \in \mathfrak{M},$$

как отношение среднего числа наступающих событий к общему числу событий в $\widehat{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}$.

### 10.5.2 Эвентологические сет-средние нечетких событий

*Эвентологическими сет-средними (Э-сет-средними)* нечетких событий служат обычные события, определяемые как срезы их индикаторов на определенных уровнях. *Эвентологической сет-медианой (Э-сет-медианой)* $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{x}$ и $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\widehat{\mu}$ называются соответственно события

$$\operatorname{Med}\widetilde{x} = \{\omega \in \Omega :\ \mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega) \geqslant 1/2\} \subseteq \Omega, \quad x \in \mathfrak{X},$$

$$\operatorname{Med}\widehat{\mu} = \{\omega \in \Omega :\ \mathbf{1}_{\widehat{\mu}}(\omega) \geqslant 1/2\} \subseteq \Omega, \quad \mu \in \mathfrak{M}.$$

*Эвентологическим сет-ожиданием (Э-сет-ожиданием)* $\mathfrak{M}$-нечеткого события $\widetilde{x}$ и $\mathfrak{X}$-нечеткого события $\widehat{\mu}$ называются соответственно события

$$\mathcal{E}\widetilde{x} = \{\omega \in \Omega :\ \mathbf{1}_{\widetilde{x}}(\omega) \geqslant \mathbf{P}(\widetilde{x})\} \subseteq \Omega, \quad x \in \mathfrak{X},$$

$$\mathcal{E}\widehat{\mu} = \{\omega \in \Omega :\ \mathbf{1}_{\widehat{\mu}}(\omega) \geqslant \mathbf{P}(\widehat{\mu})\} \subseteq \Omega, \quad \mu \in \mathfrak{M}.$$

Нетрудно установить, что Э-сет-средние $\mathcal{F}$-измеримы, т.е.

$$\operatorname{Med}\widetilde{x} \in \mathcal{F}, \quad \operatorname{Med}\widehat{\mu} \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{E}\widetilde{x} \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{E}\widehat{\mu} \in \mathcal{F}.$$

Этот факт следует из того, что индикаторы нечетких событий постоянны в пределах событий-террасок, ими порожденных. Из $\mathcal{F}$-измеримости Э-сет-средних следует два факта. Во-первых, для каждого Э-сет-среднего как $\mathcal{F}$-измеримого события определена его вероятность:

$$\mathbf{P}(\operatorname{Med}\widetilde{x}), \quad \mathbf{P}(\operatorname{Med}\widehat{\mu}), \quad \mathbf{P}(\mathcal{E}\widetilde{x}), \quad \mathbf{P}(\mathcal{E}\widehat{\mu}).$$

Во-вторых, каждое Э-сет-среднее — это результат вполне определенной обобщенной сет-операции над множествами событий $\widetilde{x}$ и $\widehat{\mu}$ соответственно:

$$\operatorname{Med}\widetilde{x} = \operatorname*{Med}_{\mu\in\mathfrak{M}} x_\mu = \sum_{W_x\in\operatorname{Med}_x} \operatorname{ter}_x(W_x),$$

$$\operatorname{Med}\widehat{\mu} = \operatorname*{Med}_{x\in\mathfrak{X}} x_\mu = \sum_{X_\mu\in\operatorname{Med}_\mu} \operatorname{ter}_\mu(X_\mu),$$

$$\mathcal{E}\widetilde{x} = \mathcal{E}_{\mu\in\mathfrak{M}} x_\mu = \sum_{W_x\in\mathcal{E}_x} \operatorname{ter}_x(W_x),$$

$$\mathcal{E}\widehat{\mu} = \mathcal{E}_{x\in\mathfrak{X}} x_\mu = \sum_{X_\mu\in\mathcal{E}_\mu} \operatorname{ter}_\mu(X_\mu),$$

где $\operatorname{Med}_x, \mathcal{E}_x \subseteq 2^{\widetilde{x}}$, $\operatorname{Med}_\mu, \mathcal{E}_\mu \subseteq 2^{\widehat{\mu}}$ — это подмножества множеств $2^{\widetilde{x}}$ и $2^{\widehat{\mu}}$ всех подмножеств множеств $\widetilde{x}$ и $\widehat{\mu}$ соответственно, определяющие обобщенные сет-операции $\operatorname{Med}_x$, $\operatorname{Med}_\mu$, $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_\mu$.

## 10.6 Эвентологическое обоснование существующих теорий неопределенности

### 10.6.1 Эвентологическое обоснование теория нечеткости Заде

В эвентологии нечеткое событие $\tilde{x} = \{x_\mu : \mu \in \mathfrak{M}\}$ определяется как множество «обычных» событий $x_\mu \subseteq \Omega$. Индикатор нечеткого события — среднее индикаторов событий, его составляющих: $\mathbf{1}_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$, называется *эвентологической функцией принадлежности* нечеткого события (рис. 10.8).

В теории нечетких множеств Заде нечеткое событие определяется функцией принадлежности на $\Omega$, вид которой не может быть выведен теоретически из более простых понятий, а задается в каждой задаче, исходя из внешних по отношению к теории соображений (рис. 10.9).

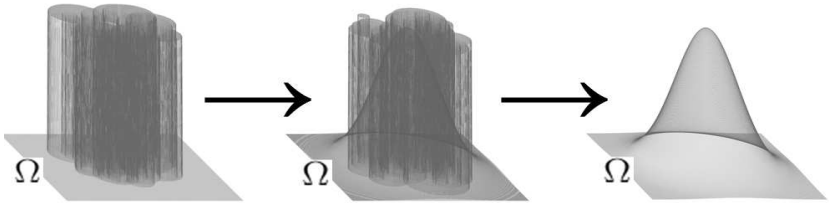



Рис. 10.8. Эвентология определяет нечеткое событие как множество «обычных» колмогоровских событий и предлагает метод построения Э-функции принадлежности нечеткого события как среднего индикаторов событий, его составляющих.

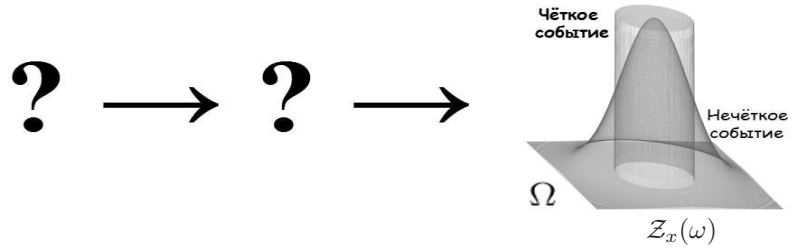



Рис. 10.9. В теории нечетких множеств Заде нечеткое событие $x$ отождествляется с функцией принадлежности $\mathcal{Z}_x(\omega)$ на $\Omega$, вид которой в любой задаче всегда должен быть задан изначально на основе дополнительных предположений, выходящих за рамки теории.

### 10.6.2 Теория возможностей Заде — частный случай эвентологической теории нечеткости для вложенных событий

**Классический текст** [256]. «Если мы знаем, что $\omega \in x \subseteq \Omega$, то

- событие $a$ возможно, если $a \cap x \neq \emptyset$, а

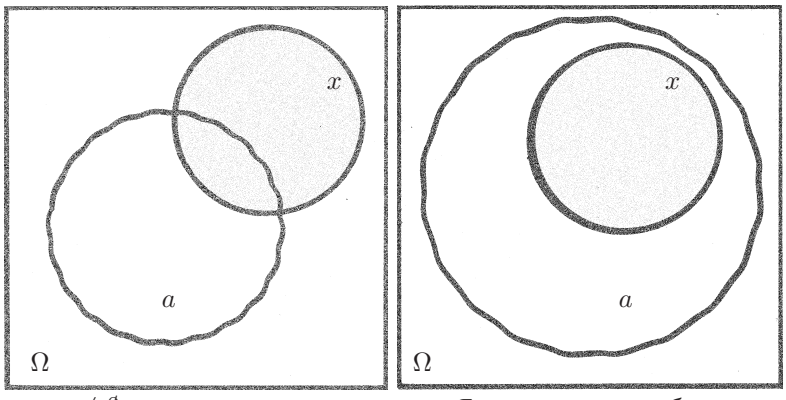
$$\mathsf{Pos}(a) = \max_{\omega \in a} \mathsf{Pos}(\omega)$$

  — это степень возможности того, что $\omega \in a$;

- событие $a$ необходимо, если $x \subseteq a$, а

$$\mathsf{Nec}(a) = 1 - \mathsf{Pos}(a^c)$$

— это степень необходимости того, что $\omega \in a$»[28].




$a \cap x \neq \emptyset \iff a$ — возможно $\qquad x \subseteq a \iff a$ — необходимо

$$\mathsf{Pos}(a) = \max_{\omega \in a} \mathsf{Pos}(\omega) \qquad \mathsf{Nec}(a) = \min_{\omega \in a} \mathsf{Nec}(\omega)$$

Рис. 10.10. Классическое определение сет-функций теории возможностей: возможность Pos (Possibility) и необходимость Nec (Necessity).

**Эвентологический «перевод»**. «Если мы знаем, что $x \in X$, то

- случайное множество событий $K$ *возможно относительно множества событий* $X$, если

$$K \cap X \neq \emptyset.$$

*Степень возможности* $K$ относительно множества событий $X$:

$$\mathbf{P}\left(K \cap X \neq \emptyset\right) \;=\; \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) = u_X = \mathsf{Pos}(K, X).$$

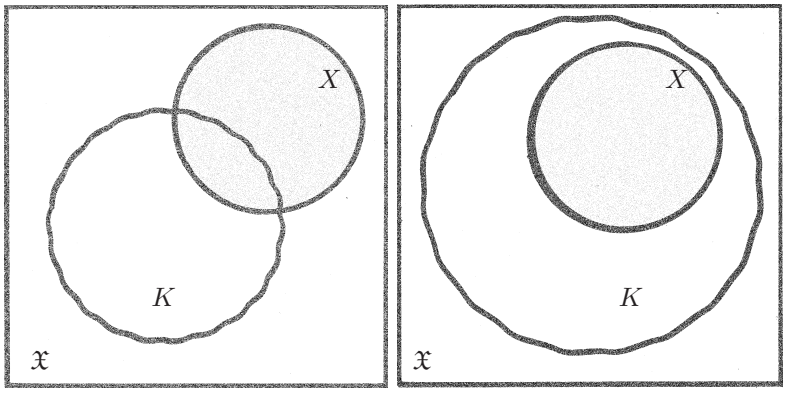
[28]Здесь Pos — функция возможности (possibility), Nec — функция необходимости (necessity).

- случайное множество событий $K$ *необходимо относительно множества событий*, если

$$X \subseteq K.$$

*Степень необходимости* $K$ относительно множества событий $X$»:

$$\mathbf{P}\,(X \subseteq K) \;\; = \;\; \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = p_X = \mathsf{Nec}(K, X).$$




$K \cap X \neq \emptyset \iff K$ — возможно, $X \subseteq K \iff K$ — необходимо.

$$\mathsf{Pos}(K, X) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) =$$

$$= \max_{x \in X} \mathbf{P}(x) = \max_{x \in X} \mathsf{Pos}(K, \{x\})$$

$$\mathsf{Nec}(K, X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) =$$

$$= \min_{x \in X} \mathbf{P}(x) = \min_{x \in X} \mathsf{Nec}(K, \{x\})$$

Рис. 10.11. Эвентологическое обоснование сет-функций теории возможностей: возможность (Pos) и необходимость (Nec).

В теории возможностей возможность и необходимость удовлетворяют характеристическим равенствам:

$$\mathsf{Pos}(K, X) = \max_{x \in X} \mathsf{Pos}(K, \{x\}),$$

$$\mathsf{Nec}(K,X)=\min_{x\in X}\mathsf{Nec}(K,\{x\}).$$

С эвентологической точки зрения эти характеристические равенства справедливы только в случае, когда множество событий имеет *вложенную структуру зависимостей*, т.е. когда $x\cap y=\begin{cases}x,\\ y.\end{cases}$ для $x,y\in\mathfrak{X}$. Для вложенной структуры зависимостей эти характеристические равенства следуют из своего Э-определения:

$$\mathsf{Pos}(K,X)=\mathbf{P}(K\cap X\neq\emptyset)=u_X=\mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in X}x\right)=$$

$$=\max_{x\in X}\mathbf{P}(x)=\max_{x\in X}\mathsf{Pos}(K,\{x\}),$$

$$\mathsf{Nec}(K,X)=\mathbf{P}(X\subseteq K)=p_X=\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X}x\right)=$$

$$=\min_{x\in X}\mathbf{P}(x)=\min_{x\in X}\mathsf{Nec}(K,\{x\}).$$

Кроме того, эвентологические возможность $\mathsf{Pos}(K,X)$ и необходимость $\mathsf{Nec}(K,X)$ связаны между собой формулами обращения Мебиуса:

$$\begin{cases}1-u_X=\sum\limits_{Y\subseteq X}(-1)^{|Y|}p_Y;\\ \\ p_X=\sum\limits_{Y\subseteq X}(-1)^{|Y|}(1-u_Y).\end{cases}$$

### 10.6.3 Теория свидетельств Демпстера-Шафера обобщается эвентологией

Теория Демпстера-Шафера [214] — это математическая теория свидетельств, основанная на *функции уверенности* $\mathsf{Bel}$ *(belief function)* и *функции правдоподобности* $\mathsf{Pl}$ *(plausibility function)*, которые *эвентологически* имеют вид:

$$\mathsf{Bel}(K,X)=\mathbf{P}(X\subseteq K)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X}x\right)=p_X$$

— *Э-функция уверенности (belief E-function)*,

$$\mathsf{Pl}(K,X) = \mathbf{P}(K \cap X \neq \emptyset) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) = u_X$$

— *Э-функция правдоподобности (plausibility E-function)*, и связаны обращением Мебиуса:

$$\begin{cases} 1 - u_X = \sum\limits_{Y \subseteq X} (-1)^{|Y|} p_Y, \\ p_X = \sum\limits_{Y \subseteq X} (-1)^{|Y|} (1 - u_Y). \end{cases}$$

### 10.6.4 Пары Э-распределений, порождающие новые версии теории неопределенности

Эвентология не только предлагает теоретическое обоснование теории возможностей Заде [256] и теории свидетельств Демпстера-Шафера [214], но и способна предложить еще три варианта пар функций, на основе которых можно было бы при желании развить новые версии теории нечеткости (см. табл. 10.12).

**1-я версия (классическая)** — теория свидетельств (Демпстер-Шафер) и теория возможностей (Заде):

$$\begin{aligned} \{p_X, u_X\} &= \{\mathsf{Bel}(K,X), \mathsf{Pl}(K,X)\} \\ &= \{\mathsf{Nec}(K,X), \mathsf{Pos}(K,X)\}. \end{aligned}$$

**2-я версия:**

$$\begin{aligned} \{p^X, u^X\} &= \{\mathsf{Bel}_1(K,X), \mathsf{Pl}_1(K,X)\} \\ &= \{\mathsf{Nec}_1(K,X), \mathsf{Pos}_1(K,X)\}. \end{aligned}$$

**3-я версия:**

$$\begin{aligned} \{\overline{p}_X, \overline{u}_X\} &= \{\mathsf{Bel}(K^c,X), \mathsf{Pl}(K^c,X)\} \\ &= \{\mathsf{Nec}(K^c,X), \mathsf{Pos}(K^c,X)\}. \end{aligned}$$

**4-я версия:**

$$\begin{aligned} \{\overline{p}_X, \overline{u}_X\} &= \{\mathsf{Bel}_1(K^c,X), \mathsf{Pl}_1(K^c,X)\} \\ &= \{\mathsf{Nec}_1(K^c,X), \mathsf{Pos}_1(K^c,X)\}. \end{aligned}$$

Эвентология убедительно обосновывает возвращение существующих теорий неопределенности в пределы колмогоровской теории вероятностей, а эвентологическая интерпретация теории нечетких множеств и теории возможностей Заде, теории свидетельств Демпстера-Шафера и др., не только позволяет взглянуть на них с единых *событийных* позиций, но и предлагает новые *событийные* версии теории нечеткости, которые могут оказаться полезными и более приемлемыми в тех или иных прикладных областях.

## 10.7 Вместо заключения

*Эвентология*, изучающая *движение случайных нечетких событий*, под которым понимается *динамика эвентологических распределений*, пока еще выглядит далекой от завершения теорией. Заложены прочные основы эвентологии, доказаны важные утверждения о случайных нечетких событиях, такие как основная эвентологическая теорема. Стало уже очевидным, что *эвентология нечетких событий*, как более общая теория, поглотила давно известную, хорошо себя зарекомендовавшую, но частную и недостаточно теоретически обоснованную теорию нечетких множеств Заде. Однако в эвентологии все еще остаются неясными многие теоретические и практические вопросы. Поэтому вместо заключения мы предлагаем ряд замечаний, содержащих, правда, больше вопросов, чем ответов, надеясь, что в обозримом будущем в следующих наших работах будут и найдены ответы на вопросы, и поставлены новые эвентологические задачи. Эвентология развивается, на наших глазах стремительно превращаясь в *универсальный эвентологический язык*, на котором с одинаковым успехом можно ставить, обсуждать и решать проблемы, связанные *и с материей, и с разумом*.

### 10.7.1 Виды нечеткости

**Нечеткость и случайность**

Эвентология имеет дело с нечеткими событиями двух видов, которые отличаются друг от друга множествами, порождающими нечеткость: первый вид нечеткости порождается множеством $\mathfrak{M}$, а второй — множеством $\mathfrak{X}$. Эвентологическая интерпретация этих нечеткостей

различна, но пока до конца не выяснена. Возможно, что нечеткость события $\widetilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, порождаемая множеством $\mathfrak{M}$ и «измеряемая» принадлежностью, объясняется несходством представлений различных индивидуальных разумов $\mu \in \mathfrak{M}$ о наступлении каждого избранного события $x \in \mathfrak{X}$, а нечеткость события $\widecheck{\mu} = \{x_\mu,\ x \in \mathfrak{X}\}$, порождаемая множеством $\mathfrak{X}$ и измеряемая вероятностью, следует из способности каждого индивидуального разума $\mu \in \mathfrak{M}$ (который определяется собственной чередой событий, содержащей и множество событий $\widecheck{\mu}$) делать в пределах собственной череды событий вероятностный выбор. Вполне может оказаться, что нечеткость второго вида, вызываемая множеством $\mathfrak{X}$ в поведении индивидуального разума $\mu$ — это «вероятностная нечеткость», имя которой «случайность». Таким образом, нечеткость порождается множеством $\mathfrak{M}$ — разумом — и «измеряется» принадлежностью, а «случайность» порождается множеством $\mathfrak{X}$ — материей — и «измеряется» вероятностью. Такие аналогии представляются мне верными, но выглядят, на первый взгляд, все же парадоксально и потому требуют дополнительных размышлений и оправданий. Пока же ограничимся тем, что будем просто различать два вида нечеткости и говорить о $\mathfrak{M}$-нечетком событии $\widetilde{x}$ и $\mathfrak{X}$-нечетком событии $\widecheck{\mu}$.

### Индивидуальная и совокупная нечеткость

**Совокупная нечеткость.** Множество разумных субъектов $\mathfrak{M}$ порождает нечеткость «со-бытия» $x \in \mathfrak{X}$ в виде множества колмогоровских событий — нечеткого события

$$\tilde{x} = \{x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M}\},$$

характеризующего $\mathfrak{M}$-совокупную нечеткость восприятия или создания «со-бытия» $x \in \mathfrak{X}$ множеством разумных субъектов $\mathfrak{M}$. Это нечеткость, порождаемая совокупностью разумных субъектов $\mathfrak{M}$, — $\mathfrak{M}$-*совокупная нечеткость.*

**Индивидуальная нечеткость.** Находясь в разные моменты времени в разных собственных состояниях $s \in \$$, разумный субъект $\mu$ воспринимает или создает одно и то же «со-бытие» $x \in \mathfrak{X}$ в виде различных колмогоровских событий $x^s_\mu \subseteq \Omega$. Эти колмогоровские события образуют нечеткое событие

$$\tilde{x}_\mu = \{x^s_\mu,\ s \in \$\},$$

которое характеризует $\mu$-индивидуальную нечеткость восприятия или создания «со-бытия» $x \in \mathfrak{X}$ разумным субъектом $\mu$. Это нечеткость «со-бытия», порождаемая разумным субъектом $\mu$, — *$\mu$-индивидуальная нечеткость*. В соответствии с общими эвентологическими принципами разумный субъект обречен на индивидуальную нечеткость — его способ существования, его «со-бытие».

**Виды статистики нечеткости.** Индивидуальная и совокупная нечеткость прямым образом соответствуют тому, чему в теории случайных процессов, статистической механике и математической статистике соответствует усреднение по времени и по пространству. Статистическая процедура усреднения по времени имеет дело с временными рядами данных, характеризующих один объект, а усреднения по пространству — с множеством однотипных объектов, взятых в один и тот же момент времени в различных точках пространства. Разумный субъект $\mu$ представляет собой временной ряд колмогоровских событий, а множество однотипных разумных субъектов $\mathfrak{M}$ различные одномоментные колмогоровские события, характеризующие данный тип разумных субъектов. Отсюда статистические эвентологические наблюдения за определенным типом разумных субъектов можно проводить двумя эквивалентными[29] способами, наблюдая либо много раз за «со-бытием» одного разумного субъекта в течение некоторого временного интервала, либо один раз за множеством «событий» однотипных разумных субъектов.

### 10.7.2 Разум и события

*Осознать* наступление события, *понять*, что оно наступило, *воспринять* его разум может только либо вспомнив имя события, либо дав имя событию, до сих пор безымянному. Событие без имени остается за пределами сознания, в бессознательном, до поры до времени, пока разум не вызовет его из своих бессознательных глубин, дав ему имя. Осознавать наступление событий, понимать, что они наступают, воспринимать их — это для разума то же, что *существовать, быть*. Так же и события *существуют*, пока их осознает, понимает, воспринимает разум. Разум и события не могут существовать друг

[29] В статистической эвентологии также справедлив эргодическая гипотеза об эквивалентности событийных средних по времени и по пространству разумных субъектов.

без друга. *Бытие разума* — восприятие событий, *бытие событий* — восприятие разумом.

### 10.7.3 Принадлежность и бытие

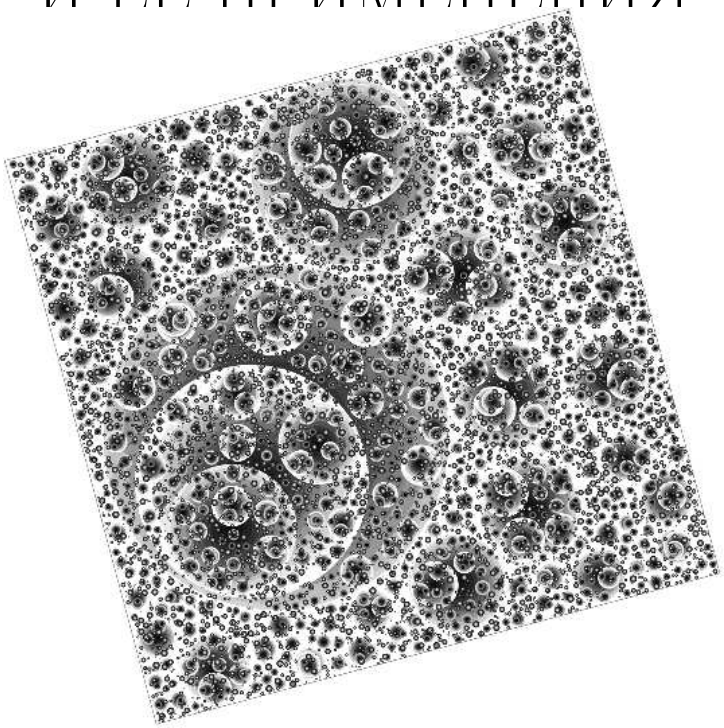
В теории Заде нечеткое событие отождествляется с функцией степени принадлежности, заданной на $\Omega$, иными словами, с некоторой с.в. со значениями из отрезка $[0, 1]$. Степень принадлежности — ключевое понятие теории нечетких множеств. Однако в теории вероятностей принадлежность э-события $\omega \in \Omega$ тому или иному событию означает наступление последнего. Поэтому, когда речь идет о степени принадлежности э-события нечеткому событию, эвентологически корректнее говорить о степени наступления нечеткого события «в умах множества разумных субъектов» при наступлении э-события $\omega \in \Omega$. В связи с этим в эвентологии нечетких событий вместо ключевого для теории нечетких множеств термина «принадлежность» уместнее ввести эквивалентный, но совершенно новый и, мне кажется, «революционный» для этой теории термин, на место которого имеется, правда, несколько претендентов: «осознавание», «понимание», «восприятие», «существование», «бытие». Это позволит говорить не о степени принадлежности э-события нечеткому событию, а о «степени осознавания, понимания, восприятия» разумом нечеткого события, или о «степени существования, бытия *разума в нечетком событии*», или о «степени существования, бытия *нечеткого события в разуме*».

| Э-распределения | Дополнительные Э-распределения |
|---|---|
| $p(X) = \mathbf{P}(K = X)$ (1) | $\overline{u}(X) = \mathbf{P}(K^c \neq X^c)$ (7) |
| $p_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$ $= \mathbf{P}(X \subseteq K)$ $= \begin{cases} \mathsf{Bel}(K, X) \\ \mathsf{Nec}(K, X) \end{cases}$ (2) | $\overline{u}_X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x^c\right)$ $= \mathbf{P}(K^c \cap X \neq \emptyset)$ $= \begin{cases} \mathsf{Pl}(K^c, X) \\ \mathsf{Pos}(K^c, X) \end{cases}$ (8) |
| $p^X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$ $= \mathbf{P}(K \subseteq X)$ $= \begin{cases} \mathsf{Bel}_1(K, X) \\ \mathsf{Nec}_1(K, X) \end{cases}$ (3) | $\overline{u}^X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X^c} x\right)$ $= \mathbf{P}(X^c \not\subseteq K^c)$ $= \begin{cases} \mathsf{Pl}_1(K^c, X) \\ \mathsf{Pos}_1(K^c, X) \end{cases}$ (9) |
| $u_X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right)$ $= \mathbf{P}(K \cap X \neq \emptyset)$ $= \begin{cases} \mathsf{Pl}(K, X) \\ \mathsf{Pos}(K, X) \end{cases}$ (4) | $\overline{p}_X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x^c\right)$ $= \mathbf{P}(X \subseteq K^c)$ $= \begin{cases} \mathsf{Bel}(K^c, X) \\ \mathsf{Nec}(K^c, X) \end{cases}$ (10) |
| $u^X = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X^c} x^c\right)$ $= \mathbf{P}(X^c \not\subseteq K)$ $= \begin{cases} \mathsf{Pl}_1(K, X) \\ \mathsf{Pos}_1(K, X) \end{cases}$ (5) | $\overline{p}^X = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X^c} x\right)$ $= \mathbf{P}(K^c \subseteq X)$ $= \begin{cases} \mathsf{Bel}_1(K^c, X) \\ \mathsf{Nec}_1(K^c, X) \end{cases}$ (11) |
| $u(X) = \mathbf{P}(K^c \neq X^c)$ (6) | $\overline{p}(X) = \mathbf{P}(K^c = X)$ (12) |

Рис. 10.12. Эвентологическая «Таблица Менделеева», «открывшая» Э-распределения, порождающие новые версии теории нечеткости.

Часть третья

# ЭВЕНТОЛОГИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ



# Глава 11
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЙ ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Предлагается *эвентологически* сформулировать, решить и интерпретировать классическую портфельную задачу Марковица о распределении ресурсов а также ее новый обратный вариант, не имеющий аналогов в существующей портфельной теории. Освоение эвентологией портфельного анализа множества случайных событий и нового понятия оптимального портфеля событий несомненно способствует развитию эвентологической теории. Кроме того, портфельные методы решения прямых и обратных эвентологических задач расширяют область эвентологических приложений: распределение и заполнение ресурсов, управление персоналом и пр.

## 11.1 Введение

Глава посвящена основам *эвентологического портфельного анализа*, включающим простейшие постановки прямой и обратной эвентологических задач Марковица[1] [26, 35, 71], методы и примеры их решения. Фактически излагается буквальный «эвентологический пе-

[1] *Марковиц, Гарри Макс (Markowitz, Harry Max, 1927)* — выдающийся американский экономист (Калифорнийский университет, Сан-Диего); основоположник современной портфельной теории; известен пионерской работой, в которой предложил новый подход к исследованию эффектов риска распределения инвестиций, корреляции и диверсификации ожидаемых инвестиционных доходов; лауреат Нобелевской премии (1990) «за работы по теории финансовой экономики».

ревод» классического портфельного анализа [187], дополненный оригинальной постановкой обратной эвентологической задачи Марковица. Аналог обратной задачи в классическом варианте портфельной теории отсутствует, а ее эвентологическая постановка вообще появилась на свет лишь в результате осмысления новых возможностей, открытых эвентологическим подходом к портфельному анализу.

## 11.2 Эвентологическая задача Марковица

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и конечное множество событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий с *эвентологическим распределением (Э-распределением)* $\boldsymbol{p} = \{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$, где

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

— вероятность одновременного наступления событий из $X \subseteq \mathfrak{X}$ и ненаступления событий из $X^c = \mathfrak{X} - X$, а $x^c = \Omega - x$. С каждым событием $x \in \mathfrak{X}$ взаимно однозначно связан его индикатор

$$\mathbf{1}_x(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in x, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

среднее значение которого есть вероятность: $\mathbf{E}\mathbf{1}_x(\omega) = \mathbf{P}(x)$, а среднеквадратичное отклонение равно: $\sigma^2(\mathbf{1}_x(\omega)) = \mathbf{P}(x)\ (1 - \mathbf{P}(x))$. Из того, что и среднее значение, и среднеквадратичное отклонение индикатора события определяются его вероятностью, следует характерная особенность *эвентологической задачи (Э-задачи)* Марковица, отличающая ее от классического варианта. Положения вырожденных портфелей событий, имеющих «крайние» свойства (когда только одно событие $x \in \mathfrak{X}$ имеет единичный вес, а веса остальных равны нулю), на плоскости «среднеквадратичное отклонение»–«среднее значение» определяются только вероятностями событий:

$$\Big(\sigma(\mathbf{1}_x(\omega)),\ \mathbf{E}\mathbf{1}_x(\omega)\Big) = \Big(\sqrt{\mathbf{P}(x)(1 - \mathbf{P}(x))},\ \mathbf{P}(x)\Big)$$

и лежат на положительной полуокружности радиуса $1/2$ с центром в $(0, 1/2)$. Итак, множеству событий $\mathfrak{X}$ взаимно однозначно соответ-

ствует случайный вектор $\{\mathbf{1}_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$, составленный из их индикаторов. Ковариационная матрица этого случайного вектора состоит из парных ковариаций событий $x, y \in \mathfrak{X}$ с соответствующими дисперсиями на главной диагонали: $\mathsf{Kov}_{xx} = \sigma^2(\mathbf{1}_x(\omega)),\ x \in \mathfrak{X}$, так как $\mathsf{Cov}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y) = \mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$.

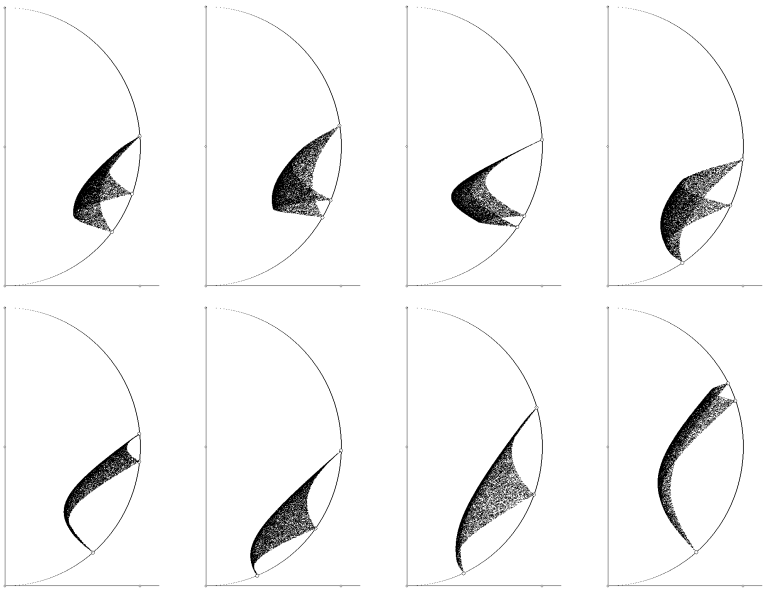


Рис. 11.1. Эвентологические пули Марковица портфелей из трех событий, имеющих различные Э-распределения второго порядка. Вырожденные эвентологические портфели (единичный вес сосредоточен в одном событии) на плоскости «среднеквадратичное отклонение» (горизонтальная ось) — «среднее значение» (вертикальная ось) всегда располагаются на полуокружности радиуса $1/2$ с центром в точке $(0, 1/2)$.

## 11.3 Постановка задачи поиска оптимального портфеля событий

Начнем с частной эвентологической постановки задачи поиска *оптимального портфеля событий*, формально копирующей классическую задачу Марковица. Затем приведем интерпретацию этой эвен-

тологической копии портфельной задачи на примере, взятом из области управления персоналом. Эта интерпретация привлекается и в качестве иллюстрации, и как вспомогательный инструмент, облегчающий эвентологический перевод классического варианта портфельной задачи. И, наконец, сформулируем так называемую *прямую эвентологическую задачу Марковица* в общем виде.

**Эвентологическая копия задачи Марковица**. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Задачу поиска *оптимальноого портфеля из множества событий* $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ можно пытаться ставить формально точно так же, как это делается в классическом портфельном анализе. Иначе говоря, можно ставить задачу поиска оптимального портфеля событий из $\mathfrak{X}$, считая, что

1) под *портфелем событий* понимается распределение $\boldsymbol{a} = \{a(x), x \in \mathfrak{X}\}$ между событиями из $\mathfrak{X}$ некоего «единичного веса» $1 = \sum_{x\in\mathfrak{X}} a(x)$, играющего роль единичного капитала из классической постановки задачи Марковица для фондового рынка;

2) *оптимальный портфель событий* взаимно однозначно определяется распределением $\boldsymbol{a}^* = \{a^*(x),\ x \in \mathfrak{X}\}$, минимизирующим дисперсию $\boldsymbol{a}$-взвешенной суммы индикаторов событий:

$$\mathbf{D}\left(\sum_{x\in\mathfrak{X}} a^*(x)\mathbf{1}_x(\omega)\right) = \min_{\boldsymbol{a}} \mathbf{D}\left(\sum_{x\in\mathfrak{X}} a(x)\mathbf{1}_x(\omega)\right)$$

при фиксированном уровне $\langle a\rangle$ среднего значения этой суммы

$$\mathbf{E}\left(\sum_{x\in\mathfrak{X}} a^*(x)\mathbf{1}_x(\omega)\right) = \sum_{x\in\mathfrak{X}} a^*(x)\mathbf{P}(x) = \langle a\rangle\,.$$

Заметим, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{x\in\mathfrak{X}} a(x)\mathbf{1}_x(\omega)\right) = \sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{y\in\mathfrak{X}} a(x)a(y)\,\mathsf{Kov}_{xy},$$

где $\mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$ — парные ковариации событий $x, y \in \mathfrak{X}$, которые при $x = y$ превращаются в дисперсию события $x \in \mathfrak{X}$: $\mathsf{Kov}_{xx} = \mathbf{D}_x = \mathbf{P}(x)(1 - \mathbf{P}(x))$. Таким образом, в эвентологической копии задачи Марковица *Э-распределение множества*

*событий* $\mathfrak{X}$ участвует только своими моментами вплоть до второго порядка включительно.

**Одна интерпретация прямой Э-задачи Марковица: оптимальное поощрение персонала фирмы**. Руководство фирмы может быть удовлетворено или нет результатами производственной деятельности каждого сотрудника фирмы. На поощрение персонала фирмы по результатам работы выделяется единичный капитал. Перед руководством фирмы встает задача, как распределить этот единичный капитал на поощрение персонала, если каждый сотрудник характеризуется вероятностью того, что руководство фирмы удовлетворено результатами его производственной деятельности. Причем каждый раз премия выдается только тем сотрудникам, которые достигли удовлетворительных, с точки зрения руководства фирмы, результатов, а остальные сотрудники премии не получают. Иначе говоря, в качестве премий выплачивается не весь единичный капитал поощрения, а лишь его часть, соответствующая удовлетворительно работающим в настоящее время сотрудникам. Более того, руководство фирмы не склонно постоянно выплачивать весь единичный капитал поощрения, справедливо полагая, что поощрение нужно рассматривать как награду, а наград не могут быть достойны все сразу. Однако выплата поощрений зависит от случая: от того, как на сей раз удастся выполнить свои обязанности работникам фирмы. Поэтому доля, которую составят от единичного капитала выплачиваемые поощрения, — это случайная величина, и руководству ничего не остается делать, как зафиксировать на некоем оптимальном (с точки зрения самого руководства) уровне среднее значение этой доли. Оптимальная средняя доля выплачиваемых поощрений, с одной стороны, не может быть слишком высокой, чтобы не «развратить» персонал, с другой стороны, — слишком низкой, чтобы не перестать оказывать стимулирующее воздействие на сотрудников. Кроме того, колебания реальной суммы выплаченных поощрений вокруг оптимальной средней доли, по мнению руководства, должны быть, по возможности, минимальны из тех же соображений. В рамках этих довольно естественных ограничений руководству требуется решить следующую задачу: определить для каждого сотрудника его собственную долю в единичном капитале поощрения, на которую он может рассчитывать в случае удовлетворительной работы.

Свяжем с каждым работником фирмы по одному событию. Взятые все вместе, эти события образуют конечное множество событий $\mathfrak{X}$, мощность которого равна численности персонала фирмы $N = |\mathfrak{X}|$. Так что под $\mathfrak{X}$ можно также понимать и множество всех сотрудников фирмы, хотя сотрудники здесь нас интересуют только с точки зрения удовлетворительного выполнения своих производственных обязанностей, т.е. с точки зрения наступления или ненаступления соответствующих им событий из $\mathfrak{X}$. Пренебрегая этими деталями, будем понимать под $\mathfrak{X}$ и множество событий, и множество соответствующих им сотрудников.

Наступление события $x \in \mathfrak{X}$ означает, что в данный момент соответствующий сотрудник достиг, с точки зрения руководства фирмы, удовлетворительных результатов. Одновременное наступление событий, образующих подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$, означает, что в данный момент соответствующее подмножество сотрудников фирмы работает удовлетворительно, а оставшиеся сотрудники — неудовлетворительно. Причем, если сотруднику $x \in \mathfrak{X}$ назначена премия в размере $a(x)$, то доля единичного капитала, выплаченная подмножеству «удовлетворительных» сотрудников $X \subseteq \mathfrak{X}$, разумеется, равна $a(X) = \sum_{x\in X} a(x)$ — одному из возможных значений случайной величины $\xi(\omega) = \sum_{x\in\mathfrak{X}} a(x)\mathbf{1}_x(\omega)$ — *доли выплаченных поощрений*. Средняя доля выплаченных поощрений равна математическому ожиданию этой случайной величины: $\mathbf{E}\xi(\omega) = \sum_{x\in\mathfrak{X}} a(x)\mathbf{P}(x)$, где $\mathbf{P}(x)$ — вероятность события $x \in \mathfrak{X}$.

Решение Э-задачи Марковица позволяет руководству фирмы найти оптимальное распределение единичного капитала на поощрение персонала $\boldsymbol{a}^* = \{a^*(x),\ x \in \mathfrak{X}\}$, которое минимизирует дисперсию доли выплачиваемых поощрений: $\mathbf{D}\xi(\omega) \to \min_{\boldsymbol{a}}$ при фиксированной средней доле: $\mathbf{E}\xi(\omega) = \langle a\rangle$.

## 11.4 Обратная эвентологическая задача Марковица

*1) Прямая Э-задача Марковица*, которую символически можно обозначить как $\boldsymbol{p} \implies \boldsymbol{a}$, заключается в поиске распределения весов $\boldsymbol{a} = \{a(x),\ x \in \mathfrak{X}\}$ в портфеле (множестве) событий $\mathfrak{X}$, имеющих заданное Э-распределение $\boldsymbol{p} = \{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Подробнее: требу-

ется найти распределение весов $\boldsymbol{a}$ в портфеле событий $\mathfrak{X}$, имеющих заданный средний вес

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}} a(x)\mathbf{P}(x) = \langle a\rangle \tag{1}$$

и

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{y\in\mathfrak{X}} a(x)a(y)\,\mathsf{Kov}_{xy} \to \min_{\boldsymbol{a}} \tag{2}$$

— минимизирующих дисперсию случайного веса события из портфеля $\mathfrak{X}$.

*2) Обратная Э-задача Марковица*, которую естественно обозначить $\boldsymbol{a} \implies \boldsymbol{p}$, заключается [35] в поиске Э-распределения $\boldsymbol{p}$ портфеля (множества) событий $\mathfrak{X}$, обеспечивающего заданные веса событий $\boldsymbol{a}$. Подробнее: требуется найти Э-распределение $\boldsymbol{p}$ портфеля событий $\mathfrak{X}$, имеющих заданный средний вес

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}} a(x)\mathbf{P}(x) = \langle a\rangle\,, \tag{1'}$$

и

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{y\in\mathfrak{X}} a(x)a(y)\,\mathsf{Kov}_{xy} \to \min_{\boldsymbol{p}} \tag{2'}$$

— минимизирующих дисперсию случайного веса события из портфеля событий $\mathfrak{X}$, управляемых искомым Э-распределением $\boldsymbol{p}$.

## 11.5 О методах решения обратной Э-задачи Марковица

Итак, требуется найти Э-распределение $\boldsymbol{p}$ портфеля событий $\mathfrak{X}$, имеющих заданный средний вес $\langle a\rangle$ и минимизирующих дисперсию портфеля.

Замечание. Дисперсия портфеля событий, которую минимизируют в обратной Э-задаче и считают мерой риска портфеля, задается матрицей парных ковариаций событий $\|\,\mathsf{Kov}_{xy}\,\|_{x\in\mathfrak{X},y\in\mathfrak{X}}$, в свою очередь полностью определяемых Э-распределением $\boldsymbol{p}$ по известным формулам

$$\mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x\cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y), \quad x\in\mathfrak{X},\ y\in\mathfrak{X},$$

где

$$\mathbf{P}(x) = \sum_{x \in X} p(X), \quad x \in \mathfrak{X},\ \mathbf{P}(x \cap y) = \sum_{\{x,y\} \subseteq X} p(X)$$

для $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$.

Фактически в поставленной обратной Э-задаче ищется такое Э-распределение, что вероятности событий $\mathbf{P}(x)$, $x \in \mathfrak{X}$ и вероятности их парных пересечений $\mathbf{P}(x \cap y)$, $x \in \mathfrak{X},\ y \in \mathfrak{X}$ удовлетворяют ограничению на средний вес событий $(1')$ и минимизируют дисперсию портфеля событий $\mathfrak{X}$ $(2')$. Но как известно [26], Э-распределений множества событий с одинаковыми вероятностями событий и вероятностями их парных пересечений много: они образуют вполне определенное семейство. Поэтому решением обратной Э-задачи Марковица служит некое *оптимальное семейство Э-распределений*, каждое из которых удовлетворяет ограничению на средний вес событий $(1')$ и минимизирует дисперсию портфеля событий $(2')$. Практически это означает, что решение обратной Э-задачи Марковица сводится к поиску хотя бы одного Э-распределения из указанного *оптимального семейства*.

В обратной задаче Марковица $2^{|\mathfrak{X}|}$ «спиц зонтика Марковица» — это $2^{|\mathfrak{X}|}$ образов вырожденных Э-распределений (вершин Э-симплекса) при «зонтичном» отображении:

$$\sigma^2 = \mathbf{D} = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{y \in \mathfrak{X}} a(x)a(y)\, \mathsf{Kov}_{xy},$$

$$\mathbf{E} = \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x)\mathbf{P}(x).$$

«Спицы зонтика» расположены на вертикальной оси плоскости «среднеквадратичное отклонение» — «среднее значение» в $2^{|\mathfrak{X}|}$ точках с координатами

$$a(X) = \sum_{x \in X} a(x), \quad X \subseteq \mathfrak{X}.$$

Эти $2^{|\mathfrak{X}|}$ точек полностью определяют «зонтик Марковица» (образ всего Э-симплекса при «зонтичном» отображении), который ограничен полуокружностями, соединяющими каждую пару «спиц зонтика Марковица».

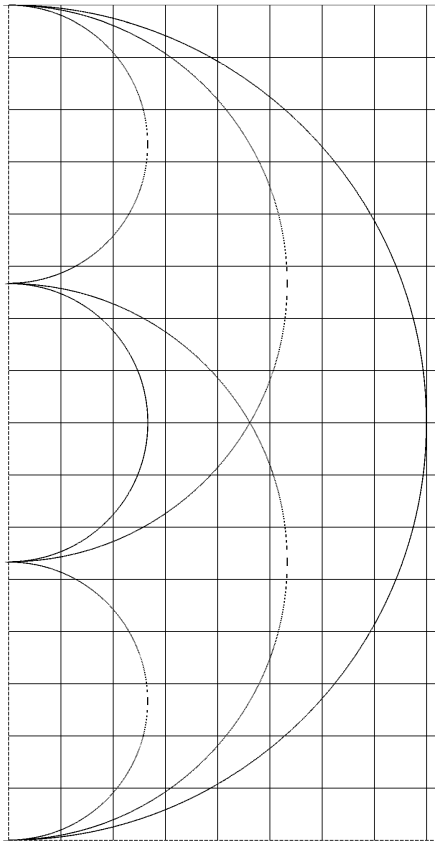


Рис. 11.2. Эвентологический «зонтик» Марковица для триплета событий $\mathfrak{X}$, $|\mathfrak{X}| = 3$, вектор весов которых равен $\boldsymbol{a} = \{a(x), x \in \mathfrak{X}\} = \{1/3,\ 1/3,\ 1/3\}$. Горизонтальная ось — $\sigma$, вертикальная — $E$, градация сетки — 1/16.

## 11.6 Об особенностях эффективной границы «зонтика» Марковица

Полуокружности, соединяющие «спицы зонтика» — это образы ребер Э-симплекса, т.е. образы выпуклых комбинаций двух вырожденных Э-распределений. При определенных сочетаниях значений

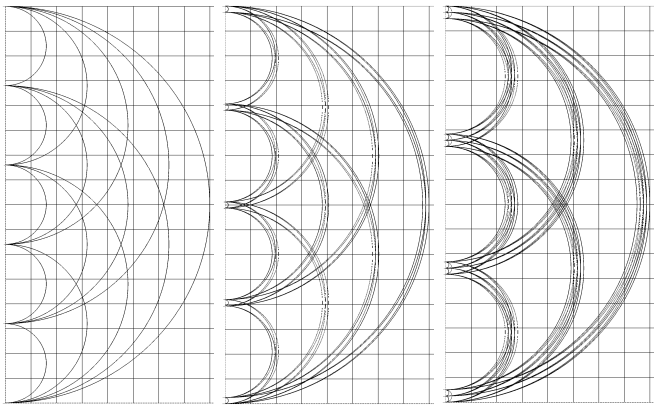


Рис. 11.3. Эвентологический «зонтик» Марковица для квинтетов событий $\mathfrak{X}$, $|\mathfrak{X}| = 5$, вектор весов которых $\boldsymbol{a} = \{a(x), x \in \mathfrak{X}\}$ равен (слева направо): $\{1/5,\ 1/5,\ 1/5,\ 1/5,\ 1/5\}$, $\{1/4(1-1/64),\ 1/4(1-1/64),\ 1/4(1-1/64),\ 1/4(1-1/64),\ 1/64\}$, $\{1/3(1-2/64),\ 1/3(1-2/64),\ 1/3(1-2/64),\ 1/64,\ 1/64\}$. Горизонтальная ось — $\sigma$, вертикальная — $E$, градация сетки — $1/16$.

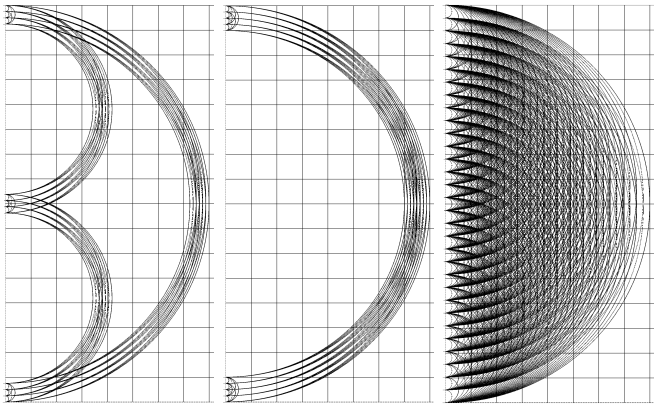


Рис. 11.4. Эвентологический «зонтик» Марковица для квинтетов событий $\mathfrak{X}$, $|\mathfrak{X}| = 5$, вектор весов которых $\boldsymbol{a} = \{a(x), x \in \mathfrak{X}\}$ равен (слева направо): $\{1/2(1-3/64),\ 1/2(1-3/64),\ 1/64,\ 1/64,\ 1/64\}$, {1-4/64, 1/64, 1/64, 1/64, 1/64}, $\{1/31,\ 2/31,\ 4/31,\ 8/31,\ 16/31\}$. Горизонтальная ось — $\sigma$, вертикальная — $E$, градация сетки — $1/16$.

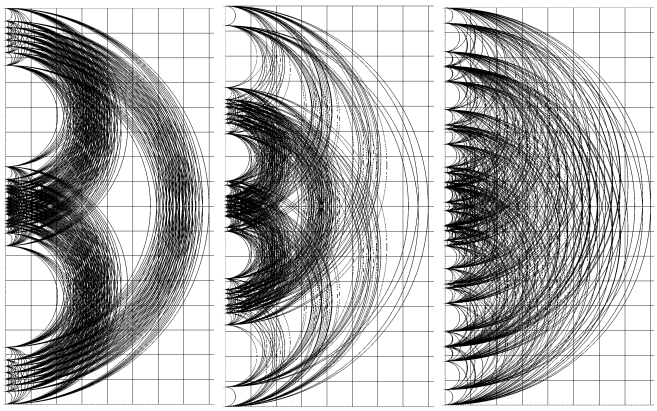


Рис. 11.5. Эвентологический «зонтик» Марковица для квинтета событий $\mathfrak{X}$, $|\mathfrak{X}| = 5$, вектор весов которых $\boldsymbol{a} = \{a(x), x \in \mathfrak{X}\}$ равен (слева направо): {0.040, 0.060, 0.250, 0.300, 0.350}, {0.234, 0.049. 0.243, 0.270, 0.204} и {0.038, 0.401, 0.146, 0.305, 0.110}. Горизонтальная ось: $\sigma$, вертикальная: $E$, градация сетки: 1/16.

долевой меры $a$ на моноплетах одна и та же «спица зонтика» может служить образом нескольких вырожденных Э-распределений. Тогда в такую «спицу» отображается и весь Э-подсимплекс, натянутый на вырожденные Э-распределения, образом которых служит данная «спица». То же относится и к точкам полуокружностей, соединяющем «спицы», в которые могут «зонтично» отображаться несколько выпуклых комбинаций вырожденных Э-распределений. Тогда данные точки полуокружностей служат образами Э-подсимплексов, натянутых на данные выпуклые комбинации Э-распределений. В эффективную границу «зонтика» Марковица при «зонтичном» отображении могут отображаться целые Э-подсимплексы, натянутые на вырожденные Э-распределения, отображающиеся в «спицы зонтика». Э-подсимплексы состоят из Э-распределений множества событий $\mathfrak{X}$ «меньшей размерности», в которых не все $2^{|\mathfrak{X}|}$ вероятностей строго больше нуля, потому что некоторые равны нулю.

## 11.7 Одна интерпретация обратной Э-задачи Марковица: заполнение ресурсов услуги

Услуги являются ведущим сектором экономики большинства развитых стран. В принципе услугу, всегда ограниченную соответствующим ресурсом, нельзя хранить. Например, если кинотеатр имеет 500 мест (ресурс услуги), то он не может принять вечером 900 зрителей, даже если на утреннем сеансе было 400 свободных мест.

Руководство фирмы, производящей множество услуг $\mathfrak{X}$ с ограниченными ресурсами, обычно в идеале стремится к тому, чтобы ресурс каждой услуги был заполнен целиком. Например, владелец сети кинотеатров мечтает, чтобы во всех его кинотеатрах на всех сеансах залы были заполнены до отказа. Будем считать, что фирма располагает общим единичным ресурсом, который распределен между услугами из множества $\mathfrak{X}$ в долях, образующих набор $\boldsymbol{a} = \{a(x),\ x \in \mathfrak{X}\}$, и это распределение нельзя изменить — оно задано. Для бюро проката кинофильмов, располагающего сетью кинотеатров $\mathfrak{X}$, $a(x)$ — доля мест кинотеатра $x \in \mathfrak{X}$ в общем количестве мест во всех кинотеатрах сети, которое не может быть изменено.

Маркетинг услуги имеет целью максимальное заполнение ее ресурса посредством привлечения потребителей услуги: отдыхающих и туристов — на курорты, в конкретные города, области и страны, зрителей — в театры и концертные залы, клиентов — в парикмахерские и косметические салоны. Подобным маркетингом занимаются бюро путешествий, авиакомпании, гостиницы, бюро проката кинофильмов и прочие фирмы, производящие услуги с ограниченным ресурсом. Можно представить себе и обратный процесс, который иногда называют *«демаркетингом»*, — воспрепятствование использованию услуги, когда излишнее ее употребление приносит больше вреда, чем пользы.

Результатом маркетинга услуги $x \in \mathfrak{X}$ является, в частности, изменение вероятности ее предоставления $\mathbf{P}(x)$. С общей эвентологической точки зрения маркетинг услуги меняет не только вероятности отдельных событий $x \in \mathfrak{X}$, т.е. вероятности предоставления той или иной услуги из портфеля услуг $\mathfrak{X}$, но меняет все Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$, т.е. весь набор вероятностей $\boldsymbol{p} = \{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Частью параметров этого Э-распределения являются вероятности продажи отдельной услуги $\mathbf{P}(x),\ x \in \mathfrak{X}$, осталь-

ные же параметры определяют структуру статистических зависимостей между событиями $x \in \mathfrak{X}$ — продажами разных услуг.

Свяжем с продажей каждой услуги по одному событию. Взятые все вместе, эти события образуют конечное множество событий $\mathfrak{X}$, мощность которого равна числу предоставляемых услуг $N = |\mathfrak{X}|$. Так что под $\mathfrak{X}$ можно также понимать и множество всех услуг, хотя услуги здесь нас интересуют только с точки зрения их продажи, т.е. с точки зрения наступления или ненаступления соответствующих им событий из $\mathfrak{X}$. Пренебрегая этими деталями, будем понимать под $\mathfrak{X}$ и множество событий, и множество соответствующих им услуг.

Наступление события $x \in \mathfrak{X}$ означает, что в данный момент соответствующая услуга продана. Одновременное наступление событий, образующих подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$, означает, что в данный момент соответствующее подмножество услуг продано, а оставшееся подмножество услуг — не продано. При этом случайная доля заполненного ресурса услуги, разумеется, равна $a(X) = \sum_{x \in X} a(x)$ — одному из возможных значений случайной величины

$$\xi(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x) \mathbf{1}_x(\omega)$$

— *доли заполненного ресурса*. Средняя доля заполненного ресурса равна математическому ожиданию этой случайной величины: $\mathbf{E}\xi(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x)\mathbf{P}(x)$, где $\mathbf{P}(x)$ — вероятность события $x \in \mathfrak{X}$, т.е. вероятность продажи услуги $x \in \mathfrak{X}$.

Решение обратной Э-задачи Марковица позволяет руководству фирмы найти $\boldsymbol{p} = \{p(X),\ X \in \mathfrak{X}\}$ — оптимальное Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$, которое минимизирует дисперсию доли заполненного ресурса: $\mathbf{D}\xi(\omega) \to \min_{\boldsymbol{a}}$ при фиксированной средней доле ресурса: $\mathbf{E}\xi(\omega) = \langle a \rangle$.

## 11.8 Заключение

Идея постановки прямой и обратной Э-задач Марковица впервые предложена в [35]. Пока не существует классического варианта обратной задачи Марковица, которая могла бы заключаться в отыскании таких распределений множества случайных величин (включая отыскание средних значений и ковариационной матрицы), которые

обеспечивают заданное распределение весов между этими случайными величинами. Постановка и решение обратной задачи Марковица в классическом варианте наталкивается на трудности, связанные с явной неоднозначностью решения. В то же время обратная Э-задача Марковица, которая заключается в отыскании Э-распределения множества событий (включая отыскание вероятностей и матрицы парных ковариаций), обеспечивающего заданное распределение весов среди событий, выгодно отличается от классической более узкой областью решений, что существенно облегчает поиск решения.

Эвентология предлагает новые постановки и интерпретации прямой и обратной Э-задачи Марковица, а также методы решения этих задач на конкретных примерах из области менеджмента: управление персоналом и заполнение ресурсов.

# Глава 12
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ ОБОСНОВАНИЯ ЭКОНОМИКС

Предлагается эвентологическая точка зрения на интерпретацию так называемого *«креста Маршалла»*[1] и «кейнсианского креста»[2,3] — популярных графических образов, используемых в «экономикс» для объяснения конфликта интересов участников рынка.

## 12.1 Введение

Откуда берутся «кривые спроса и предложения», образующие знаменитый рыночный «крест Маршалла»? Можно ли их аналитически обосновать, объяснить и вывести формулы для этих основополага-

[1] *Маршалл, Альфред (Marshall, Alfred, 1842–1924)* — английский экономист, основатель кембриджской школы политэкономии. Один из ведущих представителей неоклассической экономической теории, лидер «кембриджской школы» маржинализма; ввел понятие «цена равновесия» — цена, установленная рынком в точке равновесия спроса и предложения, т.е. компромисс между «ценой спроса» и «ценой предложения». *«Крест Маршалла»* — графическое соотношение кривых спроса и предложения относительно ценового фактора в ситуации рыночного взаимодействия (точка пересечения кривых спроса и предложения показывает равновесную рыночную цену).

[2] *Кейнс, Джон Мейнард (Keynes, John Maynard, 1883–1946)* — английский экономист и публицист, основоположник кейнсианства. Основной труд «Общая теория занятости, процента и денег» (1936).

[3] *Хикс, Джон Ричард (Hicks, John Richard, 1904–1989)* — английский экономист-кейнсианец; внес большой вклад в теорию общего равновесия, теорию стоимости, теорию процента, теорию торгового цикла.

ющих «кривых» современной экономической теории, исходя из простых предположений и моделей рыночного потребления?

В этом разделе даются ответы на эти вопросы, основанные на *эвентологической модели потребительского выбора*, впервые предложенной в диссертации 2002 года [65] и включенной в книгу [53], опубликованную в 2004. Сначала рассматривается частный случай данной модели — *эвентологический гиббсовский потребитель одного товара*, а затем предлагается расширить эвентологическую модель потребительского выбора, дополнив ее эвентологической моделью второго участника рыночного конфликта — *эвентологического гиббсовского производителя (продавца)*. После этого реализуется впервые возникшая возможность построения новой многообещающей модели *эвентологического гиббсовского рынка*, которая и позволяет эвентологически обосновать фундаментальное понятие современной экономической теории — «крест Маршалла».

## 12.2 Двойственность потребителя и производителя

Мы воспользуемся тем, что потребитель и производитель обладают очевидными двойственными эвентологическими свойствами, двойственность которых возникает, если деньги и товар поменять местами:

- потребитель товара за деньги — это производитель денег, который предлагает деньги за товар;
- производитель товара за деньги — это потребитель денег, который спрашивает деньги за товар.

Двойственность потребителя и производителя позволяет воспользоваться эвентологической моделью гиббсовского потребителя товара за деньги, поменяв местами товар и деньги, чтобы получить *эвентологического потребителя денег за товар*, иначе говоря, *эвентологического производителя товара за деньги*. Следовательно, эвентологической моделью гиббсовского производителя вполне может служить *эвентологический гиббсовский потребитель денег за товар*.

Теоретически двойственность товара и денег вполне симметрична: можно говорить как о множестве различных товаров $\mathfrak{X}$, так и о

множестве различных денег $\mathcal{Y}$, понимая под «различными деньгами», например, валюты разных стран. Однако на внутренних рынках, где фигурирует одна национальная валюта, полная симметричность двойственности товара и денег сохраняется лишь в том случае, если рассматривать рынки одного товара, а под множествами $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ понимать множество единиц товара и множество единиц денег соответственно. Поэтому мы начнем с наименее сложного — рассмотрения однотоварных и одновалютных рынков.

## 12.3 Гиббсовские потребители и производители на однотоварных и одновалютных рынках

Рассмотрим однотоварный и одновалютный рынок, к которому причастны:

- $\mathfrak{M}$ — множество потребителей $\mu \in \mathfrak{M}$,
- $\mathfrak{N}$ — множество производителей $\nu \in \mathfrak{N}$,
- $\mathfrak{X}$ — множество единиц товара $x \in \mathfrak{X}$,
- $\mathcal{Y}$ — множество единиц денег $y \in \mathcal{Y}$.

Для описания эвентологической модели рынка введем обозначения:

- $h$ — цена единицы товара в единицах денег,
- $g$ — цена единицы денег в единицах товара.

Свяжем с множеством единиц товара $\mathfrak{X}$ и множеством единиц денег $\mathcal{Y}$ соответствующие множества событий, обозначающие спрос и предложение, для которых сохраним прежние обозначения[4], дополнив их индексацией:

- $\mathfrak{X}$ — множество *событий-спросов* $x \in \mathfrak{X}$ на единицы товара, или *событий-предложений денег за единицу товара* $x \in \mathfrak{X}$,
- $\mathfrak{X}(h)$ — множество *событий-спросов* $x(h) \in \mathfrak{X}(h)$ на единицы товара, или *событий-предложений денег за единицу товара* $x \in \mathfrak{X}$ при цене товара $h$,

[4]Хотя это не совсем корректно, но значительно сокращает запись формул и не сможет вызвать особых недоразумений, так как речь пойдет, главным образом, о событиях, связанных с рыночным обращением товара и денег, а не о самих товаре и деньгах.

- $\mathcal{Y}$ — множество *событий-спросов* $y \in \mathcal{Y}$ на единицы денег за данный товар, или *событий-предложений товара за единицу денег* $y \in \mathcal{Y}$,
- $\mathcal{Y}(h)$ — множество *событий-спросов* $y(h) \in \mathcal{Y}(h)$ на единицы денег за данный товар, или *событий-предложений товара за единицу денег* $y \in \mathcal{Y}$ при цене товара $h$.

Кроме уже введенных нам понадобятся обозначения:

- $\beta$ — обратный уровень среднего дохода потребителей,
- $\gamma$ — обратный уровень средней производительности производителей,
- $n_X = |X|$ — мощность произвольного подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$,
- $m_Y = |Y|$ — мощность произвольного подмножества $Y \subseteq \mathcal{Y}$,
- $u(n)$ — Э-распределение полезности мощности подмножеств событий-спросов на единицы товара $n = 0, \ldots, |\mathfrak{X}|$ за деньги для потребителей,
- $w(m)$ — Э-распределение полезности мощности подмножеств событий-спросов на единицы денег $m = 0, \ldots, |\mathcal{Y}|$ за товар для производителей.

Замечание 1. Сразу же заметим, что обозначения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ введены «впрок», чтобы впоследствии (не в данной работе) изложить теорию эвентологического рынка на языке нечетких событий.

Замечание 2. Очевидно, что $hg = 1$ — цена $h$ единицы товара в единицах денег и цена $g$ единицы денег в единицах товара взаимно обратны.

Замечание 3. Далее идут формулы. Не все из них снабжены комментариями, что будет сделано позже.

Из гиббсовской модели потребительского выбора следует, что Э-распределение спроса и предложения на однотоварном и одновалютном рынке имеет вид:

$$p(X) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u} \exp\Big\{ -\beta h|X| \Big\} u(|X|), \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

— *вероятности спроса* на подмножество единиц товара $X \subseteq \mathfrak{X}$,

$$q(Y) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w} \exp\Big\{ -\gamma g|Y| \Big\} w(|Y|), \quad Y \subseteq \mathcal{Y}.$$

— *вероятности спроса* на подмножество единиц денег $Y \subseteq \mathcal{Y}$, которые равны *вероятности предложения* товара за подмножество единиц денег $Y \subseteq \mathcal{Y}$.

Вероятности в данных Э-распределениях зависят только от мощности подмножеств[5], и их можно переписать в виде

$$p(n) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u} C^n_{|\mathfrak{X}|} \exp\Big\{ -\beta h n \Big\} u(n), \quad n = 0, \ldots, |\mathfrak{X}|,$$

$$q(m) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w} C^m_{|\mathcal{Y}|} \exp\Big\{ -\gamma g m \Big\} w(m), \quad m = 0, \ldots, |\mathcal{Y}|,$$

в силу того, что

$$p(n) = \sum_{X_n \subseteq \mathcal{Y}} p(X_n) = C^n_{|\mathfrak{X}|} p(X_n), \quad n = 0, \ldots, |\mathfrak{X}|,$$

$$q(m) = \sum_{Y_m \subseteq \mathcal{Y}} q(Y_m) = C^m_{|\mathcal{Y}|} p(Y_m), \quad m = 0, \ldots, |\mathcal{Y}|.$$

Отсюда

$$p(0) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u} u(0), \quad q(0) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w} w(0).$$

$$p(1) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u} |\mathfrak{X}| \exp\Big\{ -\beta h \Big\} u(1), \quad q(1) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w} |\mathcal{Y}| \exp\Big\{ -\gamma / h \Big\} w(1).$$

Предположив, что $u(n) = u_0, w(m) = w_0$ для всех возможных $n$ и $m$, получим

$$\mathcal{Z}_u = w_0 \Big( 1 + \exp\big\{ -\beta h \big\} \Big)^{|\mathfrak{X}|}, \quad \mathcal{Z}_w = w_0 \Big( 1 + \exp\big\{ -\gamma / h \big\} \Big)^{|\mathcal{Y}|}.$$

Если $|\mathfrak{X}| = |\mathcal{Y}| = 1$, то зависимости от цены $h$ вероятности $p(1)$ события-спроса потребителя на товар за деньги («кривая спроса») и вероятности $q(1)$ предложения производителем товара за деньги («кривая предложения») имеют вид:

$$p(1) = \frac{\exp\Big\{ -\beta h \Big\}}{1 + \exp\big\{ -\beta h \big\}}, \quad q(1) = \frac{\exp\Big\{ -\gamma / h \Big\}}{1 + \exp\big\{ -\gamma / h \big\}}.$$

[5] Так как рассматривается однотоварный и одновалютный рынок.

Зависимость от цены $h$ дополнительных вероятностей события-не-спроса и события-не-предложения имеет вид:

$$p(0) = \frac{1}{1 + \exp\big\{ - \beta h\big\}}, \quad q(0) = \frac{1}{1 + \exp\big\{ - \gamma / h\big\}}.$$

В общем случае «кривая спроса» и «кривая предложения» — зависимости от цены $h$ вероятности «совокупного спроса» и вероятности «совокупного предложения» — имеют вид:

$$1 - p(0) = 1 - \frac{1}{\big(1 + \exp\big\{ - \beta h\big\}\big)^{|\mathfrak{X}|}}, \quad 1 - q(0) = 1 - \frac{1}{\big(1 + \exp\big\{ - \gamma / h\big\}\big)^{|\mathcal{Y}|}},$$

где

$$1 - p(0) = \mathbf{P}\left( \bigcup_{x \in \mathfrak{X}} x(h) \right)$$

— вероятность «совокупного спроса», т.е. вероятность объединения событий из $\mathfrak{X}$ (наступления хотя бы одного события из $\mathfrak{X}$) при фиксированном значении цены $h$,

$$1 - q(0) = \mathbf{P}\left( \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} y(h) \right)$$

— вероятность «совокупного предложения», т.е. вероятность объединения событий из $\mathcal{Y}$ (наступления хотя бы одного события из $\mathcal{Y}$) при фиксированном значении цены $h$.

## 12.4 Эвентологический гиббсовский потребитель

### 12.4.1 Эвентологический гиббсовский потребитель множества товаров

Определение 1. *Эвентологическим гиббсовским потребителем множества товаров*[53, 65] $\mathfrak{X}$ с *функцией средней стоимости подмножеств* товаров $H(X)$, с *обратным уровнем среднего дохода* потребителя $\beta$ и с *Э-распределением вкусов и предпочтений потребителя*

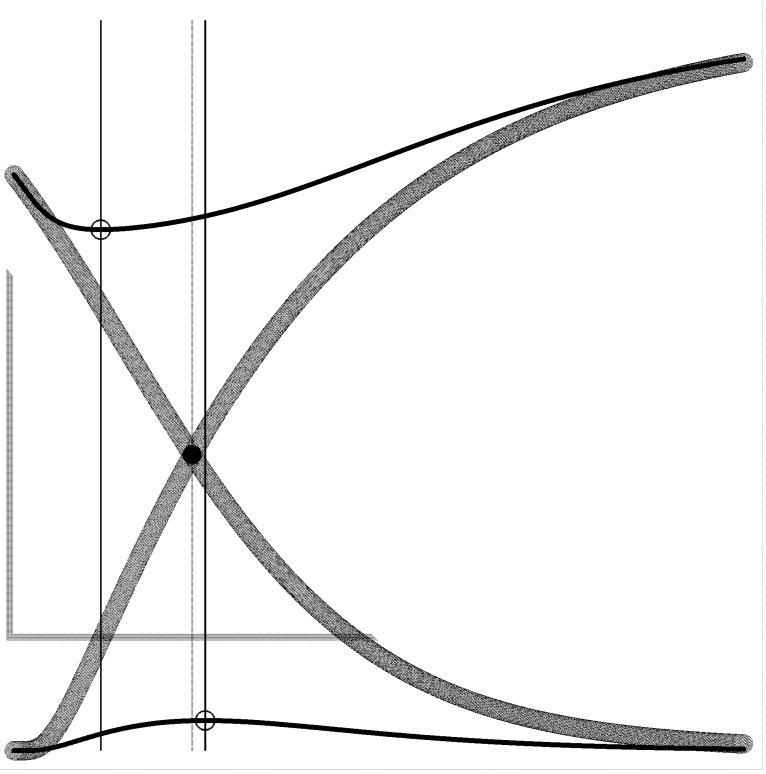


Рис. 12.1. «Э-крест Маршалла» (толстые кривые) на плоскости $(h, \mathbf{P})$ «цены (горизонтальная ось) — вероятности событий (вертикальная ось)». Максимум совпадения и минимум различия событий спроса и предложения (тонкие кривые). События спроса и предложения с Фреше-корреляцией $-3/4$. Равенство спроса и предложения достигается в пределах интервала, ограниченного максимумом совпадения и минимумом различия событий. Параметры: $\beta = 2.75, \gamma = 0.25, |\mathfrak{X}| = 2.25, |\mathcal{Y}| = |\mathfrak{X}|h$.

$u(X)$ называется либо *гиббсовское множество событий-спроса* $\mathfrak{X}$ с Э-распределением

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c\right) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u}\exp\Big\{-\beta H(X)\Big\}u(X), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \ (*)$$

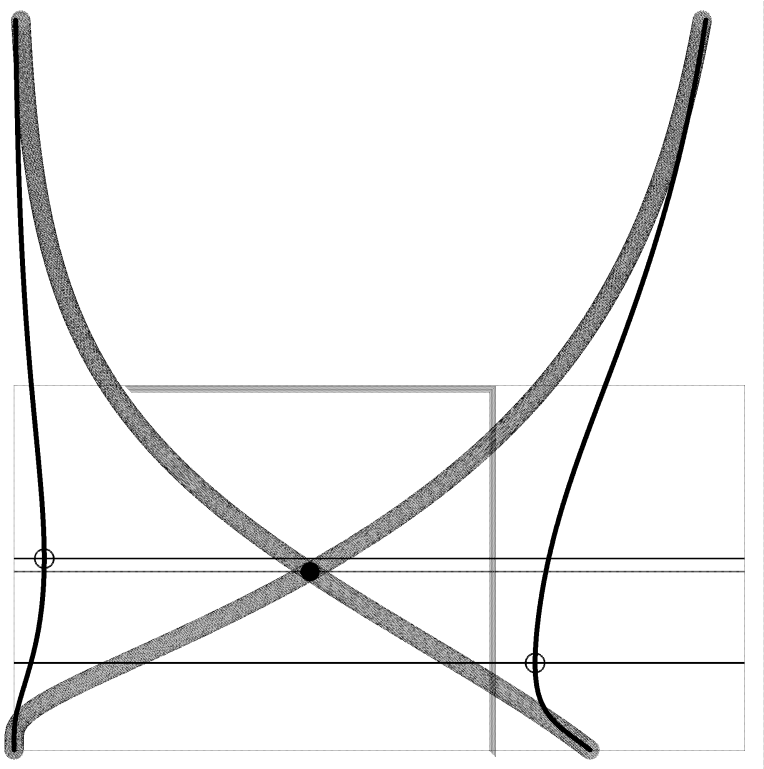


Рис. 12.2. «Э-крест Маршалла» в таком виде, как его изображают в учебниках современной экономической теории «Economics» — на плоскости $(\mathbf{P}, h)$ «вероятности событий «спрос–предложение» (горизонтальная ось) — цены (вертикальная ось)». Квадратом ограничена обычная область изменения переменных, при изображении «креста Маршалла» в «Economics». Параметры: $\beta = 2.75, \gamma = 0.25, |\mathfrak{X}| = 2.25, |\mathcal{Y}| = |\mathfrak{X}|h$.

либо *гиббсовское случайное множество событий-спроса*

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

с тем же Э-распределением

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u} \exp\Big\{ -\beta H(X)\Big\} u(X), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \qquad (*)$$

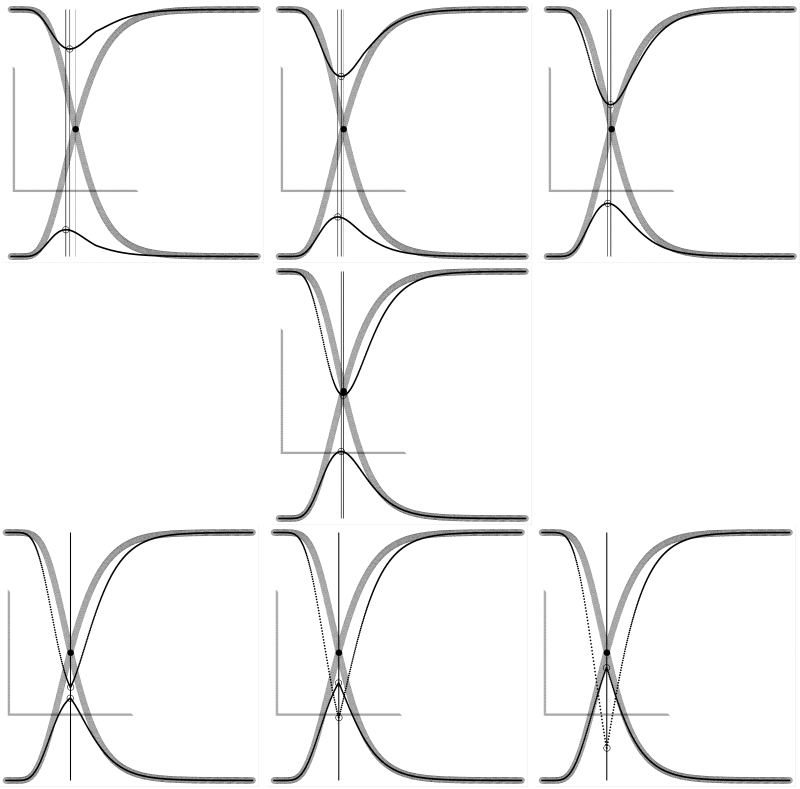


Рис. 12.3. «Э-крест Маршалла» для событий спроса и предложения с Фреше-корреляциями $-3/4,\ -1/2,\ -1/4,\ 0,\ 1/4,\ 1/2,\ 3/4$ (слева направо, сверху вниз). Параметры: $\beta = 12.5, \gamma = 0.5, |\mathfrak{X}| = 20, |\mathcal{Y}| = |\mathfrak{X}|h$.

где $H(X)$ — *функция Э-энергии*, $\beta$ — *обратная Э-температура*, $u(X)$ — *собственное Э-распределение*, а

$$\mathcal{Z}_u = \sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \exp\Big\{ -\beta H(X) \Big\} u(X)$$

— нормирующая константа.

### 12.4.2 Эвентологический гиббсовский потребитель одного товара

Из эвентологической модели гиббсовского потребителя множества товаров, которая определяется Э-распределением $(*)$, естественным образом следует элементарная *эвентологическая модель гиббсовского потребителя одного товара.*

Определение 2. *Эвентологическим гиббсовским потребителем одного товара*, единицы которого образуют множество $\mathfrak{X}$, с *ценой* $h$ каждой единицы товара $x \in \mathfrak{X}$, с *обратным уровнем среднего дохода* потребителя $\beta$ и с *Э-распределением вкусов и предпочтений потребителя* $u(X) = u(|X|)$ называется либо *гиббсовское множество событий-спроса* $\mathfrak{X}$ с Э-распределением[6]

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X} x \bigcap_{x\in X^c} x^c\right) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u}\exp\Big\{-\beta h|X|\Big\}u(|X|), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \ (\circ)$$

либо *гиббсовское случайное множество событий-спроса*

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

с тем же Э-распределением

$$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \frac{1}{\mathcal{Z}_u}\exp\Big\{-\beta h|X|\Big\}u(|X|), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \qquad (\breve{\circ})$$

где $h$ — *функция удельной Э-энергии*, $\beta$ — *обратная Э-температура*, $u(X) = u(|X|)$ — *собственное Э-распределение мощности*, а

$$\mathcal{Z}_u = \sum_{X\subseteq\mathfrak{X}} \exp\Big\{-\beta h|X|\Big\}u(|X|)$$

— нормирующая константа.

Поскольку вероятности в Э-распределениях $(\circ)$ и $(\breve{\circ})$ не зависят непосредственно от самих подмножеств $X \subseteq \mathfrak{X}$, а зависят только от их мощностей $|X| \in \{0, \ldots, N\}$, то формулы $(\circ)$ и $(\breve{\circ})$ можно переписать в более простом виде:

$$p(n) = \frac{C_N^n}{\mathcal{Z}_u}\exp\Big\{-\beta h n\Big\}u(n), \quad n = 0, \ldots, N, \qquad (\circ)$$

[6]Здесь $|X|$ — мощность подмножества $X \subseteq \mathfrak{X}$.

$$p(n) = \mathbf{P}(|K| = n) = \frac{C_N^n}{\mathcal{Z}_u} \exp\Big\{ -\beta h n \Big\} u(n), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \qquad (\breve{\circ})$$

где $N = |\mathfrak{X}|$ — мощность множества $\mathfrak{X}$, а

$$\mathcal{Z}_u = \sum_{n=0}^{N} C_N^n \exp\Big\{ -\beta h n \Big\} u(n)$$

— нормирующая константа.

Вероятность $p(n)$ интерпретируется как вероятность спроса $n$ единиц данного товара, иными словами, $p(n) = \mathbf{P}(|K| = n)$ — вероятность того, что мощность случайного множества событий-спроса $K$ равна $n$.

## 12.5 Эвентологический гиббсовский производитель

Сначала мы воспользуемся очевидными двойственными свойствами потребителя и производителя, возникающими, если деньги и товар «поменять местами»:

- *потребитель* товара за деньги — это *производитель* денег, который предлагает деньги за товар;
- *производитель* товара за деньги — это *потребитель* денег, который спрашивает деньги за товар.

Построенной эвентологической моделью гиббсовского потребителя товара за деньги можно воспользоваться, «поменяв местами» товар и деньги, чтобы получить *эвентологического потребителя денег за товар*, иначе говоря, *эвентологического производителя товара за деньги*. Следовательно, эвентологической моделью гиббсовского производителя вполне может служить слегка модернизированный *эвентологический гиббсовский потребитель денег за товар*, предложенный в [65].

### 12.5.1 Эвентологический гиббсовский производитель множества товаров

Определение 1. *Эвентологическим гиббсовским потребителем множества единиц денег* $\mathcal{Y}$ за множество товаров $\mathfrak{X}$ с *функцией средней*

*товарной стоимости подмножеств* единиц денег $G(Y)$, с *обратным уровнем средней производительности* $\gamma$ и с *Э-распределением вкусов и предпочтений производителя* $w(Y)$ называется либо *гиббсовское множество событий-предложений* $\mathcal{Y}$ с Э-распределением

$$q(Y) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{y\in Y} y \bigcap_{y\in Y^c} y^c\right) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w}\exp\Big\{-\gamma G(Y)\Big\}w(Y), \quad Y\subseteq\mathcal{Y}, \ (*)$$

либо *гиббсовское случайное множество событий-предложений*

$$L : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathcal{Y}}, 2^{2^{\mathcal{Y}}}\right)$$

с тем же Э-распределением

$$q(Y) = \mathbf{P}(L = Y) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w}\exp\Big\{-\gamma G(Y)\Big\}w(Y), \quad Y\subseteq\mathcal{Y}, \qquad (\check{*})$$

где $G(Y)$ — *функция Э-энергии*, $\gamma$ — *обратная Э-температура производителя*, $w(Y)$ — *собственное Э-распределение*, а

$$\mathcal{Z}_w = \sum_{Y\subseteq\mathcal{Y}} \exp\Big\{-\gamma G(Y)\Big\}w(Y)$$

— нормирующая константа.

### 12.5.2 Эвентологический гиббсовский производитель одного товара

Определение 2. *Эвентологическим гиббсовским потребителем множества единиц денег* $\mathcal{Y}$ за один товар, с *ценой* $h$ каждой единицы товара $y\in\mathcal{Y}$, с *обратным уровнем средней производительности* $\gamma$ и с *Э-распределением вкусов и предпочтений производителя* $w(Y) = w(|Y|)$ называется либо *гиббсовское множество событий-предложений* $\mathcal{Y}$ с Э-распределением[7]

$$p(Y) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{y\in Y} y \bigcap_{y\in Y^c} y^c\right) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w}\exp\Big\{-\gamma h|Y|\Big\}w(|Y|), \quad Y\subseteq\mathcal{Y}, \ (\circ)$$

[7]Здесь $|Y|$ — мощность подмножества $Y\subseteq\mathcal{Y}$.

либо *гиббсовское случайное множество событий-предложений*

$$L : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \Big(2^{\mathcal{Y}}, 2^{2^{\mathcal{Y}}}\Big)$$

с тем же Э-распределением

$$q(Y) = \mathbf{P}(|L| = |Y|) = \frac{1}{\mathcal{Z}_w} \exp\Big\{ -\gamma h|Y|\Big\} w(|Y|), \quad Y \subseteq \mathcal{Y}, \qquad (\breve{\circ})$$

где $h$ — *функция удельной Э-энергии*, $\gamma$ — *обратная Э-температура*, $w(Y) = w(|Y|)$ — *собственное Э-распределение мощности*, а

$$\mathcal{Z}_w = \sum_{Y \subseteq \mathcal{Y}} \exp\Big\{ -\gamma h|Y|\Big\} w(|Y|)$$

— нормирующая константа.

Поскольку вероятности в Э-распределениях $(\circ)$ и $(\breve{\circ})$ не зависят непосредственно от самих подмножеств $Y \subseteq \mathcal{Y}$, а зависят только от их мощностей $|Y| \in \{0, \dots, M\}$, то формулы $(\circ)$ и $(\breve{\circ})$ можно переписать в более простом виде:

$$q(m) = \frac{C_M^m}{\mathcal{Z}_w} \exp\Big\{ -\beta h m\Big\} w(m), \quad m = 0, \dots, M, \qquad (\circ)$$

$$q(m) = \mathbf{P}(|L| = m) = \frac{C_M^m}{\mathcal{Z}_w} \exp\Big\{ -\gamma h m\Big\} w(m), \quad Y \subseteq \mathcal{Y}, \qquad (\breve{\circ})$$

где $M = |\mathcal{Y}|$ — мощность множества $\mathcal{Y}$, а

$$\mathcal{Z}_w = \sum_{m=0}^{M} C_M^m \exp\Big\{ -\gamma h m\Big\} w(m)$$

— нормирующая константа.

Вероятность $q(m)$ интерпретируется как вероятность спроса $m$ единиц денег за единицу данного товара, иными словами, $q(m) = \mathbf{P}(|L| = m)$ — вероятность того, что мощность случайного множества событий-спроса $L$ равна $m$.

## 12.6 Эвентологический гиббсовский рынок — эвентологическое обоснование рыночного «креста Маршалла»

Осталась пустая формальность: соединить «Э-гиббсовского производителя и Э-гиббсовского потребителя», чтобы получить новую многообещающую эвентологическую модель — «Э-гиббсовский рынок», который есть в нашем понимании не что иное, как «Э-крест Маршалла» — совокупность четырех зависимостей от цены: вероятности спроса («Э-кривая спроса») вероятности предложения («Э-кривая предложения»), вероятности совпадения спроса и предложения («Э-кривая совпадения») и вероятности различия спроса и предложения («Э-кривая различия»).

## 12.7 Заключение

«Кривые спроса и предложения» — рыночный «крест Маршалла» — один из краеугольных камней современной экономической теории (*экономикс*). Следовательно, предложенная в главе модель «Э-креста Маршалла», расширяющая классические представления о рыночном конфликте спроса и предложения, может рассматриваться как существенный вклад в эвентологическое обоснование экономикс. Более того, оказалось, что модель «Э-креста Маршалла» — это лишь частный вариант эвентологической теории восприятия и деятельности, касающейся области психологии, в рамках которой построена модель *Э-креста восприятия и деятельности*, обобщающая «Э-крест Маршалла» (см. стр. 338).

# Глава 13
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ

Предлагается краткий экскурс в область приближенных эвентологических вычислений. Рассматриваются лишь эвентологические сеточные методы, которые позволяют приближенно оценивать Э-распределения сложных множеств событий при помощи известных Э-распределений простых множеств событий, играющих роль *эвентологических сеток (Э-сеток)*.

## 13.1 Введение

Можно ли говорить об аппроксимации произвольного множества событий, Э-распределение которого «неизвестно», другим множеством событий, Э-распределение которого «известно» и, в определенном смысле, проще, чем «неизвестное» Э-распределение? Попытаемся ответить на этот вопрос при помощи аналогии с хорошо известными «сеточными» методами, которые давно используются в различных разделах математики для аппроксимации объектов разного рода.

Итак, речь пойдет об аппроксимации Э-распределения множества событий $\mathfrak{X}$ при помощи Э-распределения другого множества событий \$ — «эвентологической сетки (Э-сетки)». Другими словами, представьте себе, что на множество событий $\mathfrak{X}$ «набрасывается эвентологическая сетка» \$ с целью попытаться представить, как ведут себя «неизвестные» события из $\mathfrak{X}$ в пределах «известных эвентологических ячеек», роль которых будет предоставлена событиям-

терраскам, образующим Э-сетку $.

## 13.2 Эвентологические сетки

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, множество $\mathcal{F}$-измеримых событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^n \subseteq \mathcal{F}$ — $\mathcal{F}$-измеримые разбиения:

$$\Omega = \sum_{a^1 \in \mathcal{A}^1} a^1 = \ldots = \sum_{a^n \in \mathcal{A}^n} a^n.$$

Определение. *Эвентологической сеткой (Э-сеткой) n-го порядка* $\$^n$ пространства э-событий $\Omega$ называется пересечение по Минковскому разбиений $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^n$:

$$\$^n = \Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big) \mathcal{A}^i = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} a^i : \ a^i \in \mathcal{A}^i, \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Элементы Э-сетки — события-терраски вида

$$\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} = \bigcap_{i=1}^{n} a^i \subseteq \Omega$$

— называются *Э-ячейками* Э-сетки $\$^n$. Ясно, что

$$\Omega = \sum_{a^1 \in \mathcal{A}^1} \ldots \sum_{a^n \in \mathcal{A}^n} \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} = \sum_{\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} \in \$^n} \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$$

— Э-ячейки образуют разбиение пространства э-событий $\Omega$.

Определение. *Э-сеточной парой $\mathfrak{X}$-аппроксимирующих отображений* называется пара непересекающихся отображений

$$(\varphi, \psi) : \$^n \to 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}},$$

которая каждой Э-ячейке

$$\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} = \bigcap_{i=1}^{n} a^i \in \$^n$$

сопоставляет пару непересекающихся подмножеств $\mathfrak{X}$:

$$\varphi\big(\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}\big) = \big\{x \in \mathfrak{X} : \ \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} \subseteq x\big\} = X_{a^1 \ldots a^n} \in 2^{\mathfrak{X}},$$

$$\psi\big(\,\mathrm{ter}_{\{a^1\ldots a^n\}}\,\big)=\big\{x\in\mathfrak{X}:\ \mathrm{ter}_{\{a^1\ldots a^n\}}\subseteq x^c\big\}=Y_{a^1\ldots a^n}\in 2^{\mathfrak{X}},$$

где

$$\varphi\big(\,\mathrm{ter}_{\{a^1\ldots a^n\}}\,\big)\cap\psi\big(\,\mathrm{ter}_{\{a^1\ldots a^n\}}\,\big)=X_{a^1\ldots a^n}\cap Y_{a^1\ldots a^n}=\emptyset.$$

Первое отображение $\varphi$ называется *прямым*, а второе $\psi$ — *дополнительным $\mathfrak{X}$-аппроксимирующим отображением*. Говорят, что на Э-ячейке $\mathrm{ter}_{a^1\ldots a^n}$ Э-сеточная пара отображений $(\varphi,\psi)$ *принимает строгое значение*, если

$$\varphi\big(\,\mathrm{ter}_{\{a^1\ldots a^n\}}\,\big)+\psi\big(\,\mathrm{ter}_{\{a^1\ldots a^n\}}\,\big)=X_{a^1\ldots a^n}+Y_{a^1\ldots a^n}=\mathfrak{X}.$$

Э-сеточная пара, принимающая на всех Э-ячейках строгие значения, называется *строгой Э-сеточной парой $\mathfrak{X}$-аппроксимирующих отображений*.

## 13.3 О видах Э-сеточной аппроксимации

Если чем и может определяться точность Э-сеточной аппроксимации Э-распределений, так это тем, что можно назвать *структурой локальной зависимости* аппроксимируемого множества событий, которая характеризуется отношением структур зависимостей двух множеств событий, участвующих в Э-сеточной аппроксимации: Э-сетки \$ и аппроксимируемого множества $\mathfrak{X}$.

***Три вида Э-сеточной аппроксимации*** справедливы в рамках соответствующих предположений о локальных структурах зависимостей аппроксимируемого множества событий $\mathfrak{X}$: *вложенной, независимой и наименее пересекающейся*.

***Локально вложенная структура.*** Предположим, что для любой Э-ячейки

$$\mathrm{ter}_{a^1\ldots a^n}\in\$^n$$

и любого события $x\in X_{a^1\ldots a^n}$:

$$x\cap\mathrm{ter}_{a^1\ldots a^n}=\mathrm{ter}_{a^1\ldots a^n}\,.$$

*Локально вложенной $\$^n$-аппроксимацией множества событий $\mathfrak{X}$* называется множество событий

$$\mathfrak{X}^{\varphi}=\{x^{\varphi}:\ x\in\mathfrak{X}\},$$

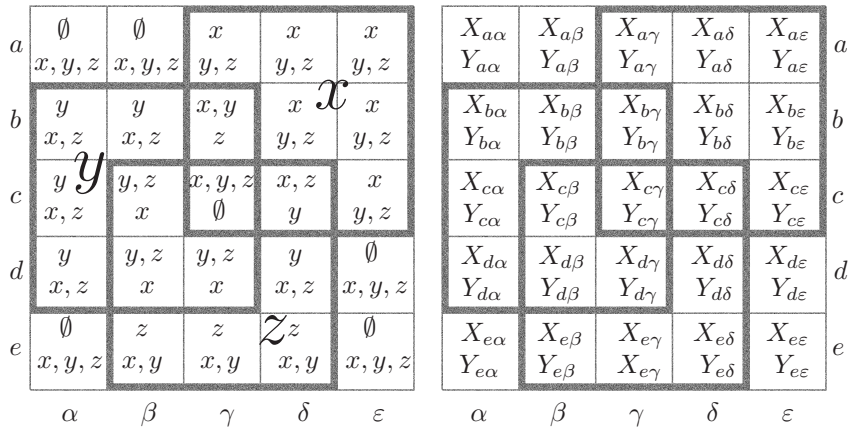



Рис. 13.1. Эвентологическая сетка второго порядка $\$^2 = \{a, b, c, d, e\}(\cap)\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, аппроксимирующая исходное Э-распределение триплета событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$ (слева). Значения Э-сеточной пары $\mathfrak{X}$-аппроксимирующих отображений на Э-ячейках (справа).

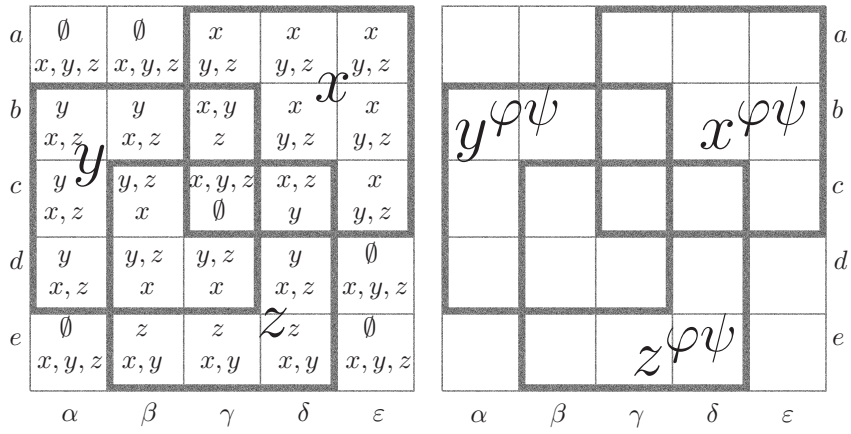



Рис. 13.2. Эвентологическая сетка второго порядка $\$^2 = \{a, b, c, d, e\}(\cap)\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, аппроксимирующая исходное Э-распределение триплета событий $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$ с нулевой ошибкой (слева). Э-сеточная аппроксимация $\mathfrak{X}^{\varphi\psi} = \{x^{\varphi\psi}, y^{\varphi\psi}, z^{\varphi\psi}\} = \mathfrak{X}$ (справа).

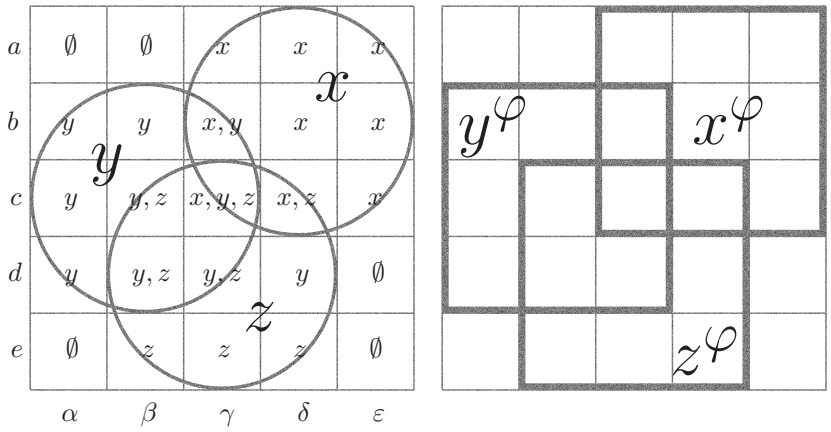



Рис. 13.3. Эвентологическая сетка второго порядка $\$^2 = \{a, b, c, d, e\}(\cap)\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, аппроксимирующая исходное Э-распределение $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$ с некоторой ошибкой (слева). Э-сеточная аппроксимация $\mathfrak{X}^{\varphi} = \{x^{\varphi}, y^{\varphi}, z^{\varphi}\} \neq \mathfrak{X}$ (справа).

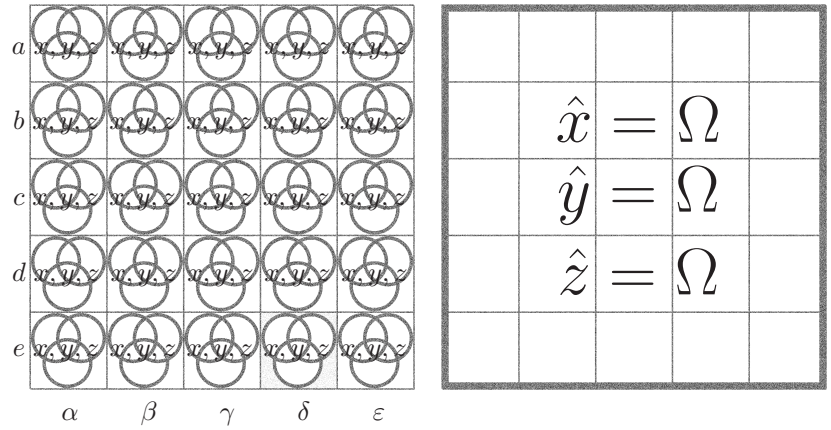



Рис. 13.4. Эвентологическая сетка второго порядка $\$^2 = \{a, b, c, d, e\}(\cap)\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, аппроксимирующая исходное Э-распределение $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$ с наибольшей ошибкой (слева). Э-сеточная аппроксимация $\mathfrak{X}^{\varphi} = \{\Omega, \Omega, \Omega\}$ (справа).

где

$$x^{\varphi} = \sum_{x \in \varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)} \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}$$

— *локально вложенная* $\$^n$*-аппроксимация события* $x \in \mathfrak{X}$, а

$$\mathbf{P}\left(x^{\varphi}\right) = \sum_{x \in \varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)} \mathbf{P}\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)$$

— ее вероятность.

***Локально наименее пересекающаяся структура.*** Предположим, что для любой Э-ячейки

$$\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n} \in \$^n$$

$$\sum_{x \in X_{a^1 \ldots a^n}} \left(x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right) = \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n},$$

и для любого события $x \in X_{a^1 \ldots a^n}$:

$$\mathbf{P}\Big(x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\Big) = \frac{1}{|X_{a^1 \ldots a^n}|}\mathbf{P}\Big(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\Big).$$

*Локально наименее пересекающейся* $\$^n$*-аппроксимацией множества событий* $\mathfrak{X}$ называется множество событий

$$\mathfrak{X}^{\varphi} = \{x^{\varphi} : \ x \in \mathfrak{X}\},$$

где

$$x^{\varphi} = \sum_{x \in \varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)} \left(x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)$$

— *локально наименее пересекающаяся* $\$^n$*-аппроксимация события* $x \in \mathfrak{X}$, а

$$\mathbf{P}\left(x^{\varphi}\right) = \sum_{x \in \varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)} \frac{1}{|X_{a^1 \ldots a^n}|}\mathbf{P}\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)$$

— ее вероятность.

***Локально независимая структура.*** Предположим, что для любой Э-ячейки

$$\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n} \in \$^n$$

события

$$x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}, \quad x \in X_{a^1 \ldots a^n},$$

независимы в совокупности. Отсюда для любого $x \in X_{a^1 \ldots a^n}$

$$\left(1 - \mathbf{P}\left(x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)\right)^n = 1 - \mathbf{P}(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}).$$

Иначе говоря,

$$p_{x,a^1 \ldots a^n} = \mathbf{P}\left(x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right) = 1 - \left(1 - \mathbf{P}(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n})\right)^{1/n}.$$

*Локально независимой* $\$^n$*-аппроксимацией множества событий* $\mathfrak{X}$ называется множество событий

$$\mathfrak{X}^{\varphi} = \{x^{\varphi} : \ x \in \mathfrak{X}\},$$

где

$$x^{\varphi} = \sum_{x \in \varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)} \left(x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)$$

— *локально независимая* $\$^n$*-аппроксимация события* $x \in \mathfrak{X}$, а

$$\mathbf{P}\left(x^{\varphi}\right) = \sum_{x \in \varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)} p_{x,a^1 \ldots a^n}$$

— ее вероятность.

## 13.4 Заключение

В главе дано весьма краткое изложение эвентологических сеточных методов, включающее три утверждения о видах Э-сеточной аппроксимации, соответствующих трем основным структурам зависимости аппроксимируемого множества событий. Более подробное изложение методов Э-сеточной аппроксимации можно найти в работах [36, 55], где рассматривается практический экономический пример из области менеджмента — аппроксимация Э-распределения множества стратегий рыночного поведения фирмы с помощью известной Э-сетки: совместного Э-распределения бизнес-цикла фирмы и ее конкурентного положения на рынке.

# Глава 14
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПСИХОЛОГИИ

Предлагается эвентологическая интерпретация и обобщение современных теорий (теория перспектив Канемана и Тверски, психофизика, экономикс и др.), опирающихся на психологию человеческого поведения, выбора, восприятия и деятельности. Рассматриваются событийные подходы в описании поведения разумного субъекта в ситуации выбора, восприятия и деятельности и оценки событий, возникшие как естественный итог развития эвентологической теории и эксперимента.

## 14.1 Введение

*Психология сводится к двум проблемам:*
*каковы элементы сознания?*
*какие сочетания и по каким законам*
*образуют эти элементы?*
Вундт[1] [246]

[1] *Вундт, Вильгельм Максимилиан (Wundt, Wilhelm Maximilian (1832–1920)* — выдающийся немецкий психолог, физиолог и философ; «отец научной психологии»; создатель первой в мире психологической лаборатории (1875) и института (1879); основные работы в области психологии и экспериментальной психологии сознания, внимания, восприятия, простейших чувств, теории высших психических процессов, а также в области логики, метафизики и этики; создатель первых экспериментально-психологических методов, основанных на организованных самонаблюдениях; основная фигура в социальной психологии, которую понимал как учение о социальной основе высшей ментальной деятельности.

*Элементы сознания — это события,*
*сочетания элементов — множества событий,*
*законы образования сочетаний событий*
*— законы эвентологических распределений.*

Поведение разумного субъекта — одна из немногих областей, где объект наблюдения и наблюдатель могут совпадать. Это облегчает проведение экспериментов, поскольку объект наблюдения всегда находится в распоряжении наблюдателя[2]. Эвентологическое наблюдение за поведением разумного субъекта — регистрация множества связанных с ним событий — задача хотя и монотонная, но без труда реализуемая, особенно, если четко определено наблюдаемое множество событий. Однако, если эвентологические самонаблюдения легки и доступны каждому разумному субъекту, то исчерпывающая эвентологическая интерпретация «саморезультатов»[3] требует использования методов эвентологической теории. Возникает необходимость в эвентологической модификации методов проведения и обработки результатов психологического эксперимента, а также в эвентологическом обосновании существующих психологических теорий.

## 14.2 Эвентологический взгляд на теорию перспектив Канемана и Тверски

*Большинство вероятностей событий*
*недооцениваются людьми,*
*и только очень низкие вероятности*
*— переоцениваются.*
Д. Канеман [166, 225],
Нобелевская премия по экономике (2002).

*Несмотря на свой житейский опыт,*
*я тогда мало знал людей, и очень возможно, что*
*часто преувеличивал ничтожное*
*и вовсе не замечал важного.*
А. П. Чехов.
Рассказ неизвестного человека.

[2] Философская проблема соотношения субъективности и объективности в результатах наблюдений, где субъект совпадает с объектом, здесь не затрагивается.
[3] Как и результатов «обычных» психологических экспериментов.

Вся современная экономическая наука основана на постулате, сформулированном еще в XVIII в. философом-утилитаристом Иеремией Бентамом[4]. Он утверждал, что человек непрерывно занят процессом «калькуляции блага», то есть пытается вычислить наиболее выгодный для себя тип поведения, подсчитывая все положительные и отрицательные последствия своих решений. Этот взгляд на человека лежит в основе западной рационалистической этики. В середине прошлого века принцип «калькуляции блага» трансформировался в принцип «максимизации ожидаемой полезности», в соответствии с которым человек в своем поведении учитывает не только все ожидаемые положительные и отрицательные последствия своих действий, но и вероятность их наступления. У этой модели есть серьезный недостаток: для принятия рационального решения человеку требуется доступ ко всей информации о последствиях своих действий, а также неограниченное время для ее обработки. Обычно ни того, ни другого нет: мы не только не располагаем полной информацией, но часто умудряемся игнорировать даже те сведения, которые нам доступны. А все потому, что «человек рациональный» — не более чем благодушная выдумка философов XVIII века. Реальные решения принимаются человеком в соответствии с законами, не имеющими ничего общего с идеалом *homo economicus*.

**Психологическая экономическая теория.** Нобелевский лауреат по экономике 2002 года Дэниэль Канеман[5] всю свою жизнь посвятил опровержению главного тезиса экономической теории — о рациональности человеческого поведения. Дэниэль Канеман в сотрудничестве с Амосом Тверски[6] показал, что люди не способны к полноценному анализу сложных ситуаций, в которых предстоя-

[4] *Бентам, Иеремия (Bentham, Jeremy, 1748-1832)* — выдающийся английский философ, экономист и теоретик права, основатель утилитаризма.

[5] *Канеман, Дэниэль (Kahneman, Daniel, p. 1934)* — израильско-американский психолог, один из основоположников психологической (поведенческой) экономической теории, лауреат Нобелевской премии по экономике (2002) «за применение психологической методики в экономической науке, в особенности – при исследовании формирования суждений и принятия решений в условиях неопределенности» (совместно с В. Смитом).

[6] *Тверски, Амос (Tversky, Amos, 1937–1996)* — пионер когнитивной теории, долгое время сотрудничал с Дэниэлем Канеманом, — ключевая фигура в истории открытия систематического человеческого когнитивного поведения в условиях риска. Совместно с Канеманом заложил основы теории перспектив, чтобы объяснить иррациональность человеческих экономических выборов.

щие события скрыты туманом неизвестности. В условиях неопределенности индивид полагается на *короткий эвристический анализ (heuristics)* или же на *эмпирическое правило (rule-of-thumb)*. Процесс человеческого мышления изучался Канеманом на примере группы людей, которым предстояло оценивать вероятность случайных событий. Большинство участников эксперимента наделяло одинаковыми вероятностными оценками как *«мелкие»*[7], так и *«большие»*[8] события, не принимая во внимание, что с ростом значимости события вероятность его наступления снижается. Иными словами, большинство людей придерживается *закона малых чисел (law of small numbers)*[9], полностью игнорируя *закон больших чисел (law of large numbers)*, на котором строится теория вероятности[10].

Не удовлетворившись стандартной теорией ожидаемой полезности Неймана-Моргенштерна, Канеман и Тверски предложили собственную теорию в статье «Теория перспективы: анализ решений в условиях риска» в одном из номеров авторитетного журнала «Эконометрика» [166]. Согласно *теории перспективы (prospect theory)* индивиды принимают решения в два этапа. Сначала они ограничивают проблему, которую предстоит решить, некими рамками, позволяющими изучить ее изолированно. Иными словами, проблема редактируется по сравнению со своим исходным вариантом, в результате чего сложная проблема преобразуется в *набор простых перспектив*[11]. Затем индивиды максимизируют *функцию перспективной ценности (prospect value function)*. В её составе перспективам присваиваются различные вероятностные веса, отражающие психологические нормы и ожидания индивида.

---

[7] *«мелкие»* — ничтожные, частые события.

[8] *«большие»* — значительные, редкие события.

[9] Канеман понимает под *«законом малых чисел (law of small numbers)»* так называемый *«психологический закон малых чисел (psychological law of small numbers)»* — тот факт, что человек склонен «выявлять» закономерности на основе малого числа, а то и одного-двух событий, иначе говоря, склонен судить о единичных событиях так, как будто имеет дело с большими выборками.

[10] Наша цель в определенном смысле противоречит этому раннему выводу (1979) нобелевского лауреата: мы надеемся показать, что поведение всех людей может быть *эвентологически* описано полностью в рамках колмогоровской теории вероятностей.

[11] В эвентологии *набору простых перспектив* соответствует то, что называется *множеством избранных событий* $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$.

### 14.2.1 Четыре психологических открытия Канемана

Можно выделить четыре психологических открытия Канемана, которые определяют ключевых отличия его теории перспектив от традиционной экономической теории и теории полезности.

1. ***Важность изменений.*** Для индивида важна не столько абсолютная величина его благосостояния (или значение любой другой экономической переменной), сколько его относительное изменение.
2. ***Снижение чувствительности.*** Отклонения от точки отсчета воспринимаются индивидом со *снижающейся чувствительностью (diminishing sensitivity)*. Меньшее отклонение воспринимается гораздо болезненнее, чем большее отклонение.
3. ***Потери и выигрыши.*** Изменения оцениваются с точки зрения потерь и приобретений относительно некоторой *точки отсчета (reference point)*, причем, как правило, потери переоцениваются, а приобретения недооцениваются *(гипотетическая функция $v$ — «ценность»)* (рис. 14.1, слева). В результате подобного *неприятия потерь (loss aversion)* индивид фактически не столько максимизирует полезность, сколько минимизирует *антиполезность (disutility)*.
4. ***Яркое и обыденное.*** Вероятностные веса назначаются различным перспективам или предстоящим отклонениям по нелинейному закону: *большинство вероятностей недооцениваются, а очень низкие вероятности, наоборот, переоцениваются (гипотетическая функция $\pi$ — «вес вероятности»)* (рис. 14.1, справа).

В 1992 А. Тверски и Д. Канеман расширили исходную теорию перспективы, в результате чего на свет появилась *теория совокупной перспективы (cumulative prospect theory)* [225]. Обновленная версия теории учитывала ряд ранних недоработок авторов. Прежде всего, она рассчитана на анализ большого числа перспектив, с которыми сталкивается индивид, в результате чего детище двух специалистов приблизилось к стандартной теории вероятностей[12].

### 14.2.2 Эвентология открытий Канемана

Рассмотрим с эвентологической точки зрения и попытаемся эвентологически обосновать два из четырех открытий Канемана, заложивших фундамент новой психологической экономической теории [166, 225].

[12] Данные выводы Канемана позволяют надеяться, что его основные психологические открытия в области экспериментальной экономики удастся обосновать *эвентологически* с точки зрения колмогоровской теории вероятностей.

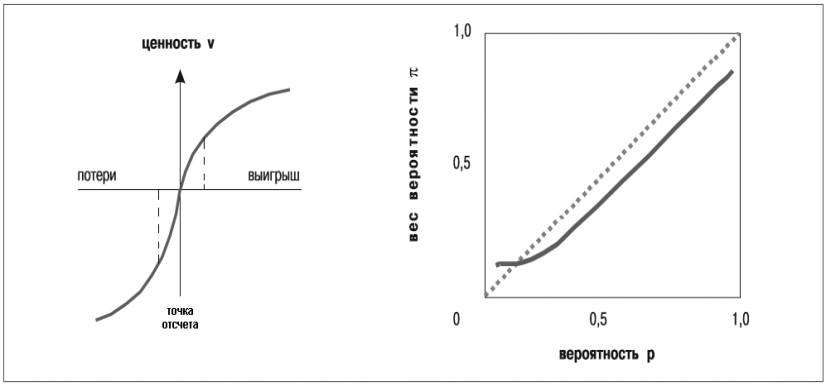



Рис. 14.1. Гипотетические *функция ценности выигрышей* $v$ и *функция веса вероятности* $\pi$. Функция ценности выигрышей имеет «излом» в точке отсчета, что означает более сильную чувствительность к потерям, чем к выигрышам. Сравните значения потерь со значениями равных выигрышей (пунктирные отрезки). Функция веса вероятности переоценивает малые и недооценивает большие вероятности, вследствие чего характеризуется свойством неполной вероятности: вес, придаваемый двум комплиментарным событиям, меньше, чем вес, придаваемый достоверному событию.

***«Яркое и обыденное: большинство вероятностей людьми недооценивается, а очень низкие вероятности, наоборот, — переоцениваются».*** Это утверждение Канемана верно для определенной категории людей, которые участвовали в его психологических экспериментах. Если провести аналогичные эксперименты в общей ситуации — с людьми всех возможных психологических типов, — то, скорее всего, верно несколько более широкое утверждение. Общая ситуация описывается эвентологической модификацией канемановской *функции веса вероятности* $\pi$, которая также переоценивает малые и недооценивает большие вероятности, однако отличается большей общностью. Положение «перегиба» функции $\pi$ определяется величиной *индивидуального порога вероятности*, которым разные люди разделяют для себя все события на значительные (редкие) и ничтожные (частые). В зависимости от положения индивидуального порога вероятности перегиб функции $\pi$ означает для каждого конкретного человека либо переоценку вероятности большинства событий и недооценку вероятности ничтожных

событий (рис. 14.2, слева), либо переоценку и недооценку двух сопоставимых по размеру множеств событий (рис. 14.2, в центре), либо переоценку вероятности значительных событий и недооценку вероятности большинства событий (рис. 14.2, справа).

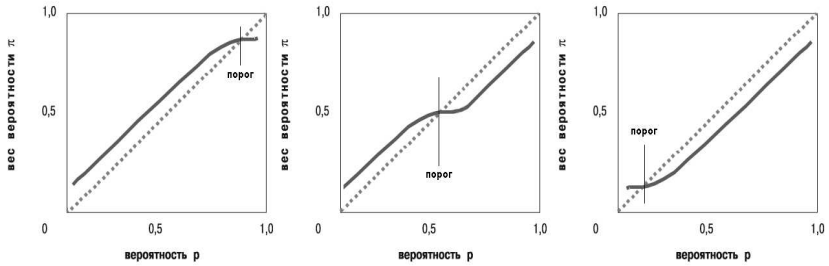



Рис. 14.2. Эвентологическое продолжение канемановской *функции веса вероятности* $\pi$, которая также переоценивает малые и недооценивает большие вероятности. Однако положение «перегиба» этой функции определяется величиной индивидуального порога вероятности, которым разные люди разделяет для себя все события на значительные (редкие) и ничтожные (частые). Слева: высокий порог, в центре: средний порог, справа: низкий порог — случай, рассмотренный Канеманом.

Рис. 14.3. Эвентологическое продолжение канемановской *функции ценности* выигрышей $v$, которая также имеет «излом» в точке отсчета. Но в зависимости от положения точки отсчета «излом» означает либо более сильную чувствительность к выигрышам, чем к проигрышам (слева), либо равную чувствительность к потерям и к выигрышам (в центре), либо более сильную чувствительность к потерям, чем к выигрышам (справа). Сравните ценности потерь с ценностями равных им выигрышей (пунктирные отрезки).

***«Потери и выигрыши: люди гораздо чувствительнее к***

***потерям, чем к приобретениям».*** «Экономикс» утверждает, что человек принимает решение, сопоставляя (складывая и вычитая) все плюсы и минусы. Канеман и Тверски показали, что люди гораздо чувствительнее к потерям, чем к приобретениям: боль от потери двадцати долларов переживается острее, чем радость от их получения (см. график функции ценности на рис. 14.1, слева). Принимая решение, мы, конечно, можем подсчитать в столбик все плюсы и минусы, но столбик с минусами всегда будет весомее, чем столбик с плюсами.

С точки зрения эвентологии эти выводы Канемана, скорее, относятся к людям, достаток которых «выше среднего». У таких «благополучных» людей потери случаются реже, чем выигрыши. И поэтому переживаются они острее, чем выигрыши (это следствие второго открытия Канемана о переоценке большинства вероятностей и недооценке только малых вероятностей). В общем же случае выводы Канемана вряд ли верны. *Здесь все должно зависеть от точки отсчета.* Скорее верно более общее утверждение:

1) если точка отсчета выше среднего уровня, то верно наблюдение Канемана: проигрыши переживаются острее, чем выигрыши (которые из-за своей частоты становятся ничтожными) (рис. 14.3, справа);

2) если точка отсчета ниже среднего, то верно обратное: выигрыши переживаются острее, чем проигрыши (которые из-за своей частоты становятся ничтожными) (рис. 14.3, слева);

3) если точка отсчета занимает некое среднее положение, то проигрыши и выигрыши переживаются одинаково (рис. 14.3, в центре).

Эвентологический анализ показывает, что, если точка отсчета занимает крайнее «левое» положение, когда человеку терять нечего, то его чувствительность к потерям минимальна, а к выигрышам — максимальна. В другом крайнем варианте, если точка отсчета занимает крайнее «правое» положение, когда человеку уже нечего более выигрывать, его чувствительность к выигрышам минимальна, а к проигрышам — максимальна. В некотором среднем положении обе чувствительности должны совпадать.

**Роль сознательного и бессознательного в объяснении открытия Канемана.** *Язык бессознательного.* Какой термин наиболее приемлем для обозначения всего того, что происходит в бессознательном? Сознание, разумеется, способно *анализировать*. А бессознательное? Какой общий термин обозначает психологический акт (*детская форма познания действительности, первичное ощущение пространства, архаическое мышление, интуиция, аффект, паника, гипноз, сновидение, привычное действие, субсенсорное восприятие; или же побуждения, поступки и чувства, причины которых остаются неясными разуму*), который совершает бессознательное? Акты в бессознательном протекают без ощущения собственной психической деятельности. Субъективно это переживается разумом как непроизвольное, автоматическое или даже насильственное течение психических актов. Сознательный контроль за ними невозможен, усилием воли приостановить их нельзя. Языком бессознательного служат *образы, действия, речевые структуры*, лишенные привычной логики. Они накладываются друг на друга так, как это диктуется желаниями и эмоциями разума. В бессознательном действует собственная логика — аффективная или кататимная[13] логика. Многочисленные попытки понять язык бессознательного, предпринятые в разные времена, пока не привели ни к чему, кроме весьма умозрительных гипотез. *Порог значительности событий*, разделяющий события из сфер сознательного и бессознательного. «Сознание $\sim$ бессознательное» — две сферы деятельности разума — «разделяются» определенным индивидуальным порогом значительности событий. Эти события «обрабатываются» разумом в одной из этих сфер сознательно, а в другой бессознательно. Значительные для разума события анализируются сознательно (слабовероятные редкие события), ничтожные для разума события «анализируются» бессознательно (сильновероятные частые события). *Сознательно* редкие значительные события анализируются чаще, чем частые ничтожные, и наоборот: *бессознательно* частые ничтожные события «анализируются» чаще, чем редкие значительные.

[13] *Кататимное переживание образов.* Образы, связанные с бессознательным, достаточно универсальны и имеют статус архетипических образов, относимых с экзистенциальными жизненными ситуациями. Существует определенный набор стандартных образов: *старец, ручей, дом, гора, лес, нора, болото, вулкан, люди и мифические персонажи.*

Это эвентологически объясняет эффект «яркое – обыденное», обнаруженный Канеманом [166, 225].

### 14.2.3 От эвентологического комментария теории перспектив к эвентологической теории перспектив

Отметим очень важный эвентологический результат, который может быть положен в основу *эвентологической теории перспектив* — эвентологического обоснования и обобщения теории Канемана.

С точки зрения общих эвентологических принципов канемановские соотношения «вес вероятности — вероятность» и «ценность — потери-выигрыши» — это частный случай соотношений «субъективная вероятность события — вероятность события» и «субъективная ценность события — ценность события». Эвентология предлагает основы новой эвентологической теории ценностей событий, ключевой результат которой — вывод двух соотношений «ценность события — вероятность события», связывающих между собой ценность и вероятность событий-восприятия и событий-деятельности.

«На кончике эвентологического пера» с помощью соотношения «ценность восприятия $u(X)$ — вероятность $p(X)$ множества событий $X$»:

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\Big\{ -\beta(u(X) - u(\emptyset))\Big\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

которое аналогичным образом связывает как *«ценность с вероятностью»*, так и *«субъективную ценность с субъективной вероятностью»* (см. рис. 14.4, 14.5), удалось установить связь двух только что рассмотренных открытий Канемана. В итоге два экспериментальных открытия оказались эвентологически эквивалентны: одно из них (рис. 14.4) следует из другого (рис. 14.5) и наоборот.

Этот эвентологический вывод подчеркивает, что результаты любых психологических экспериментов могут быть объяснены общими событийными законами, в частности два психологических открытия Канемана объединяются эвентологическим соотношением «ценность восприятия — вероятность».

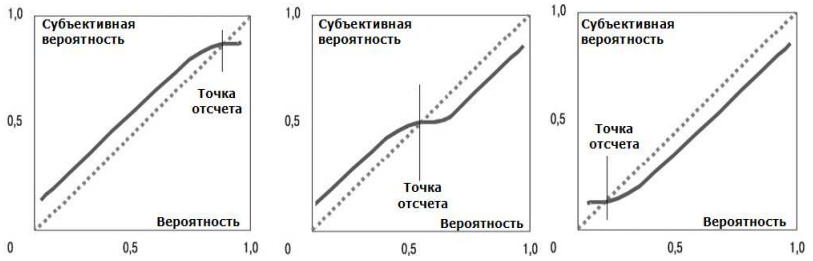



Рис. 14.4. Эвентологическая интерпретация канемановской *функции веса вероятности* $\pi$ как *Э-функции субъективной вероятности*.

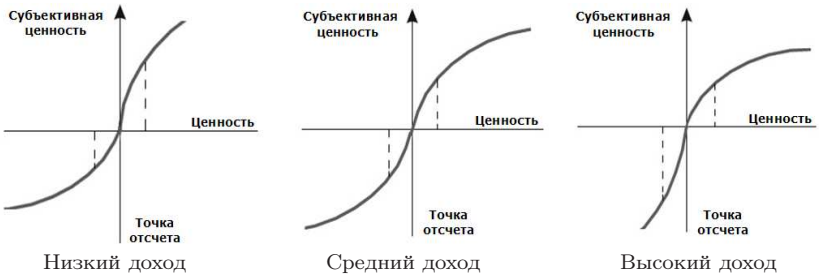



Рис. 14.5. Эвентологическая интерпретация канемановской *функции ценности* $v$ как *Э-функция субъективной ценности* событий.

## 14.3 Эвентология выбора

Рассматриваются теоретические основы способности разумного субъекта делать эвентологический выбор — оперировать множествами событий в соответствии с их эвентологическими распределениями. В эвентологический выбор разумного субъекта впервые включается не только его способность воспринимать и создавать множества событий в соответствии с их эвентологическими распределениями, но также еще две способности: 1) выбирать «фигуру» множества наступивших событий на «фоне» множества ненаступивших событий в соответствии с собственным эвентологическим распределением «фигуры» на «фоне»; 2) выбирать имена для каждого события — способность называть событие именем, имеющим то позитивный — то негативный характер в соответствии с собственным эвентологиче-

ским распределением выбора имен.

### 14.3.1 Дуально-триадное «со-бытие» разумного субъекта

Каждое «со-бытие» обрекает разумного субъекта $\mu$ прежде всего на два колмогоровских события:

- $x^{\downarrow}_{\mu}$ — *восприятие «со-бытия»* разумным субъектом $\mu$;
- $x^{\uparrow}_{\mu}$ — *создание «со-бытия»* разумным субъектом $\mu$.

Эвентологической моделью «со-бытия» разумного субъекта на этом этапе служит пара колмогоровских событий — *дуальное событие*

$$\ddot{x}_{\mu} = \{x^{\downarrow}_{\mu},\ x^{\uparrow}_{\mu}\}.$$

Далее каждое колмогоровское событие $x \in \mathfrak{X}$ из этой пары обрекает разумный субъект на два других колмогоровских события-выбора:

- $\langle x\rangle$ — *выбор имени* для колмогоровского события $x$;
- $\langle\langle x\rangle\rangle$ — *выбор фигуры* для колмогоровского события $x$.

Таким образом эвентологической моделью выбора каждого колмогоровского события из дуального события $\ddot{x}_{\mu}$, связанного с «со-бытием» разумного субъекта, служит тройка колмогоровских событий — *триадное событие*

$$\widehat{x} = \{x,\ \langle x\rangle,\ \langle\langle x\rangle\rangle\}.$$

В итоге «со-бытие» — единственный и до сих пор считавшийся *элементарным* способ существования разумного субъекта — обрекает его на шесть колмогоровских событий[14].

Дуальное событие «восприятие — деятельность» $\ddot{x}_{\mu} = \{x^{\downarrow}_{\mu},\ x^{\uparrow}_{\mu}\}$ сопровождается еще четырьмя колмогоровскими событиями-выборами:

- событие «восприятия» $x^{\downarrow}_{\mu}$;
  - событие «выбор имени восприятия» $\langle x^{\downarrow}_{\mu}\rangle$;
  - событие «выбор фигуры восприятия» $\langle\langle x^{\downarrow}_{\mu}\rangle\rangle$;

[14] Автор надеется, что эта шестёрка событий исчерпывает данный уровень дробления «со-бытия». Дуально-триадная структура «со-бытия» упоминается ещё в древнем Китае («Книга перемен», I тыс. до н.э.) и ее можно увидеть, например, на лакированной дощечке, которая была предназначена для вывешивания на входной двери, чтобы охранять дом от дьяволов (см. рис. 14.7).

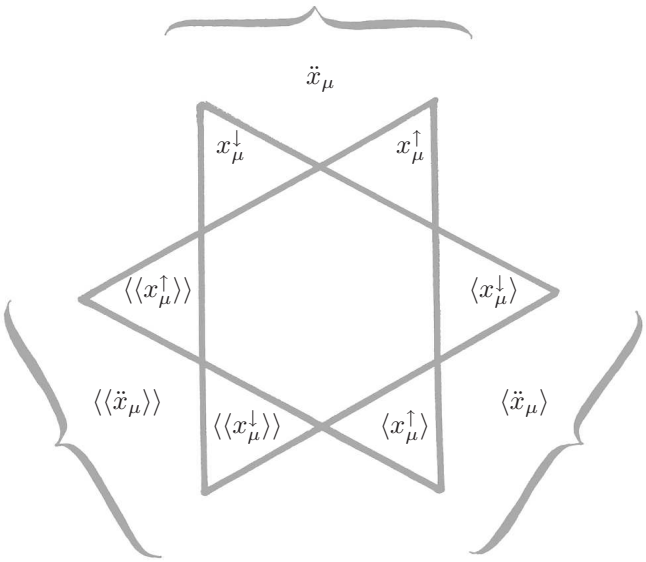



Рис. 14.6. Визуализация дуально-триадной структуры «со-бытия» $x$ разумного субъекта $\mu$. События-компоненты двух триадных событий $\widehat{x}^{\downarrow}_\mu$ и $\widehat{x}^{\uparrow}_\mu$ размещены в вершинах двух треугольников. В трех парах соседних вершин треугольников расположены события-компоненты, образующие три дуальных события $\ddot{x}_\mu$, $\langle \ddot{x}_\mu\rangle$ и $\langle\langle \ddot{x}_\mu\rangle\rangle$ соответственно.

- событие «деятельности» $x^{\uparrow}_\mu$;
  - событие «выбор имени деятельности» $\langle x^{\uparrow}_\mu\rangle$;
  - событие «выбор фигуры деятельности» $\langle\langle x^{\uparrow}_\mu\rangle\rangle$.

Данные шесть колмогоровских событий можно представить (рис. 14.6)

- либо как три *дуальных события*:

$$\ddot{x}_\mu = \{x^{\downarrow}_\mu,\ x^{\uparrow}_\mu\}$$

— «восприятие — деятельность»;

$$\langle \ddot{x}_\mu\rangle = \{\langle x^{\downarrow}_\mu\rangle,\ \langle x^{\uparrow}_\mu\rangle\}$$

Рис. 14.7. Лакированная дощечка, несущая символы Инь и Ян и восемь триграмм из «Книги перемен» («И Цзинь», англ. «I Ching», Китай, I тыс. до н.э.), которая была предназначена для вывешивания на входной двери, чтобы охранять дом от дьявола (внизу дощечки). Центральный круг содержит символы дуальных начал Инь (женское) и Ян (мужское), которые формируют Вселенную. Вокруг них — восемь триграмм ($2^3$), используемых в «Книге перемен». Каждая триграмма состоит из трёх сплошных (мужское начало) или прерывистых (женское начало) полос-преград, представляющих все восемь возможных *триадных комбинаций дуальных начал.*

— «выбор имени восприятия — выбор имени деятельности».

$$\langle\langle \ddot{x}_\mu \rangle\rangle = \{\langle\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle\rangle,\ \langle\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle\rangle\}$$

— «выбор фигуры восприятия — выбор фигуры деятельности»;

- либо как два *триадных события*:

$$\widehat{x}_\mu^{\downarrow} = \{x_\mu^{\downarrow},\ \langle x_\mu^{\downarrow} \rangle,\ \langle\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle\rangle\}$$

— «восприятие — выбор имени восприятия — выбор фигуры восприятия»;

$$\widehat{x}_\mu^{\uparrow} = \{x_\mu^{\uparrow},\ \langle x_\mu^{\uparrow} \rangle,\ \langle\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle\rangle\}$$

— «деятельность — выбор имени деятельности — выбор фигуры деятельности».

### Дуально-триадная матрица и пси-множество «со-бытия» разумного субъекта

Шесть колмогоровских событий, на которые обречен разумный субъект $\mu$ очередным «со-бытием» $x$, удобно также представить в виде *дуально-триадной матрицы данного «со-бытия»*:

$$\|x_\mu\| = \begin{pmatrix} x_\mu^{\downarrow}, & \langle x_\mu^{\downarrow} \rangle, & \langle\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle\rangle \\ x_\mu^{\uparrow}, & \langle x_\mu^{\uparrow} \rangle, & \langle\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle\rangle \end{pmatrix}.$$

Колмогоровские события, расположенные в строках этой матрицы, образуют два триадных события: $\widehat{x}_\mu^{\downarrow}$ — «восприятия» и $\widehat{x}_\mu^{\uparrow}$ — «деятельности», а расположенные в столбцах — три дуальных события: $\ddot{x}_\mu$ — «воспритие–деятельность»; $\langle \ddot{x}_\mu \rangle$ — «выбор имени восприятия–деятельности»; $\langle\langle \ddot{x}_\mu \rangle\rangle$ — «выбор фигуры восприятия–деятельности» соответственно. В транспонированной записи дуально-триадная матрица имеет вид

$$\|x_\mu\|^T = \begin{pmatrix} x_\mu^{\downarrow}, & x_\mu^{\uparrow} \\ \langle x_\mu^{\downarrow} \rangle, & \langle x_\mu^{\uparrow} \rangle \\ \langle\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle\rangle, & \langle\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle\rangle \end{pmatrix}.$$

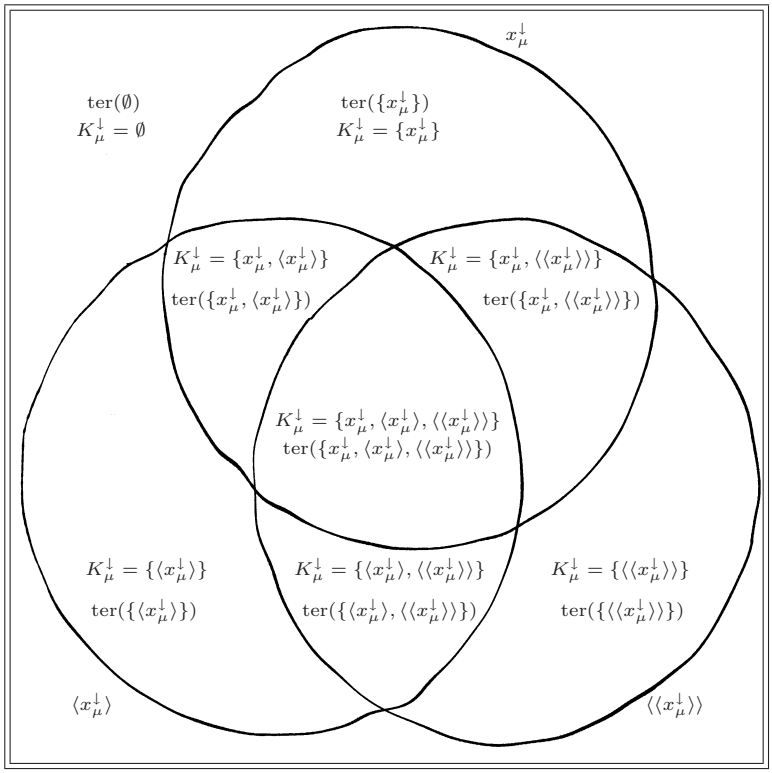



Рис. 14.8. Диаграмма Венна триадного события-восприятия $\widehat{x}^{\downarrow}_{\mu} = \left\{x^{\downarrow}_{\mu},\ \langle x^{\downarrow}_{\mu}\rangle,\ \langle\langle x^{\downarrow}_{\mu}\rangle\rangle\right\}$, разбивающую $\Omega$ на восемь событий-террасок $\mathrm{ter}(X^{\downarrow}_{\mu})$, $X^{\downarrow}_{\mu} \subseteq \widehat{x}^{\downarrow}_{\mu}$, на которых случайное множество событий $K^{\downarrow}_{\mu}$ принимает соответствующие сет-значения $X^{\downarrow}_{\mu} \in 2^{\widehat{x^{\downarrow}_{\mu}}}$.

Колмогоровские события, расположенные в столбцах транспонированной матрицы, образуют два триадных события, а расположенные в строках — три дуальных события соответственно. Дуально-триадная матрица $\|x_{\mu}\|$ — это матрично структурированная шестерка событий, составляющих *эвентологический портрет «со-бытия» $x$ разумного субъекта $\mu$*. Множество из шести составляющих дуально-

триадную матрицу колмогоровских событий обозначается[15]

$$x_\mu^\Psi = \Big\{ x_\mu^\downarrow,\ \langle x_\mu^\downarrow \rangle,\ \langle\langle x_\mu^\downarrow \rangle\rangle,\ x_\mu^\uparrow,\ \langle x_\mu^\uparrow \rangle,\ \langle\langle x_\mu^\uparrow \rangle\rangle \Big\}$$

и называется *пси-множеством «со-бытия» $x$ разумного субъекта* $\mu$. Очевидно, что пси-множество представимо и как сет-сумма трех дуплетов (дуальных событий), и как сет-сумма двух триплетов (триадных событий):

$$x_\mu^\Psi \ = \ \ddot{x}_\mu + \langle \ddot{x}_\mu \rangle + \langle\langle \ddot{x}_\mu \rangle\rangle \ = \ \widehat{x}_\mu^\downarrow + \widehat{x}_\mu^\uparrow .$$

**Толкование введенных понятий**

«Со-бытие»[16] разумного субъекта включает не только способность воспринимать и создавать множества событий на основе вероятностного выбора в рамках их эвентологических распределений, но и еще две способности: 1) выбирать «со-бытие» в фигуру или в фон; 2) выбирать имя для «со-бытия», выражая этим выбором собственную позитивную или негативную оценку «со-бытия». Иначе говоря, разумный субъект способен делать два вероятностных выбора в рамках соответствующих эвентологических распределений «выбора фигуры» и «выбора имени» как для события-восприятия, так и для события-деятельности.

В итоге каждое «со-бытие» обрекает разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ на шесть колмогоровских событий:

0) $x_\mu^\downarrow$ или $x_\mu^{00}$ — *восприятие* «со-бытия» субъектом $\mu$;
   01) $\langle x_\mu^\downarrow \rangle$ или $x_\mu^{01}$ — *выбор имени восприятия* субъектом $\mu$ (позитивно или негативно оценивать событие-восприятие $x_\mu^\downarrow$);
   02) $\langle\langle x_\mu^\downarrow \rangle\rangle$ или $x_\mu^{02}$ — *выбор фигуры восприятия* субъектом $\mu$ (считать событие-восприятие $x_\mu^\downarrow$ фигурой или фоном);
1) $x_\mu^\uparrow$ или $x_\mu^{10}$ — *создание (деятельность)* «со-бытия» субъектом $\mu$;

[15] Для обозначения шестерки колмогоровских событий, характеризующих *событийную психологию* разумного субъекта, выбран символ $\Psi$, традиционно используемый в качестве логотипа психологии.

[16] «Со-бытие» понимается как некий способ «со-бытия» $x \in \mathfrak{X}$ разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$; а $\mathfrak{X}$ — множество таких способов.

11) $\langle x_\mu^\uparrow\rangle$ или $x_\mu^{11}$ — *выбор имени деятельности* субъектом $\mu$ (позитивно или негативно оценивать событие-деятельность $x_\mu^\downarrow$);
12) $\langle\langle x_\mu^\uparrow\rangle\rangle$ или $x_\mu^{12}$ — *выбор фигуры деятельности* субъектом $\mu$ (считать событие-деятельность $x_\mu^\uparrow$ фигурой или фоном);

эвентологическими моделями которых могут служить *три дуальных события*:

$$\ddot{x}_\mu = \ddot{x}_\mu^0 = \{x_\mu^{00}, x_\mu^{10}\},\ \langle\ddot{x}_\mu\rangle = \ddot{x}_\mu^1 = \{x_\mu^{01}, x_\mu^{11}\},\ \langle\langle\ddot{x}_\mu\rangle\rangle = \ddot{x}_\mu^2 = \{x_\mu^{02}, x_\mu^{12}\},$$

*два триадных события*:

$$\widehat{x}_\mu^\downarrow = \widehat{x}_\mu^0 = \{x_\mu^{00}, x_\mu^{01}, x_\mu^{02}\},\quad \widehat{x}_\mu^\uparrow = \widehat{x}_\mu^1 = \{x_\mu^{10}, x_\mu^{11}, x_\mu^{12}\},$$

или *дуально-триадная матрица*:

$$\|x_\mu\| = \begin{pmatrix} x_\mu^\downarrow, & \langle x_\mu^\downarrow\rangle, & \langle\langle x_\mu^\downarrow\rangle\rangle \\ x_\mu^\uparrow, & \langle x_\mu^\uparrow\rangle, & \langle\langle x_\mu^\uparrow\rangle\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mu^{00}, & x_\mu^{01}, & x_\mu^{02} \\ x_\mu^{10}, & x_\mu^{11}, & x_\mu^{12} \end{pmatrix}.$$

Стандартным образом обозначим шесть соответствующих множеств колмогоровских событий:

$$\mathfrak{X}_\mu^{ij} = \{x_\mu^{ij},\ x \in \mathfrak{X}\},\quad i = 0,1,\ j = 0,1,2.$$

и заметим, что в эвентологической теории нечетких событий [41] такими множествами определяются *нечеткие события* с нечеткостью, порождаемой множеством $\mathfrak{X}$:

$$\tilde{\mu}^{ij} = \{x_\mu^{ij},\ x \in \mathfrak{X}\},\quad i = 0,1,\ j = 0,1,2,3,$$

которые с шести сторон характеризуют *нечеткое* поведение разумного субъекта $\mu$ в том, как он *воспринимает и создает*, а также как *фигурирует*[17] *и именует*[18] восприятие и создание каждого собственного «со-бытия» $x \in \mathfrak{X}$.

[17] В данном тексте «фигурировать» — глагольная форма термина «выбор фигуры».

[18] Здесь «именовать» — глагольная форма термина «выбор позитивного имени».

### 14.3.2 Выбор фигур восприятия и деятельности

Пусть $\mathfrak{X}$ — конечное множество избранных «со-бытий» $x \in \mathfrak{X}$, которые могут произойти с разумными субъектами $\mu \in \mathfrak{M}$. Множеству $\mathfrak{X}$ соответствует два множества событий-выборов-фигуры — «фигуры восприятия»

$$\mathfrak{X}_\mu^{02} = \{x_\mu^{02},\ x \in \mathfrak{X}\}$$

и «фигуры деятельности»

$$\mathfrak{X}_\mu^{12} = \{x_\mu^{12},\ x \in \mathfrak{X}\}.$$

где

- $x_\mu^{02}$ — выбор события-восприятия $x_\mu^{\downarrow} \in \mathfrak{X}$ в фигуру;
- $(x_\mu^{02})^c = \Omega - x_\mu^{02}$ — выбор события-восприятия $x_\mu^{\downarrow} \in \mathfrak{X}$ в фон;
- $x_\mu^{12}$ — выбор события-деятельности $x_\mu^{\uparrow} \in \mathfrak{X}$ в фигуру;
- $(x_\mu^{12})^c = \Omega - x_\mu^{12}$ — выбор события-деятельности $x_\mu^{\uparrow} \in \mathfrak{X}$ в фон.

Например, когда события-выборы-фигуры детерминированы следующим образом:

$$x_\mu^{02} = \begin{cases} \Omega, & x \in X; \\ \emptyset, & x \in X^c; \end{cases} \qquad x_\mu^{12} = \begin{cases} \Omega, & x \in X; \\ \emptyset, & x \in X^c; \end{cases}$$

для фиксированного $X \subseteq \mathfrak{X}$; иначе говоря, когда множества событий-выборов-фигуры имеет вид:

$$\mathfrak{X}_\mu^{02}(X) = \mathfrak{X}_\mu^{12}(X) = \{\underbrace{\Omega, \ldots, \Omega}_{x \in X}, \underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{x \in X^c}\} = \{\Omega,\ x \in X;\ \emptyset,\ x \in X^c\},$$

тогда «фигурой», выбранной (как для восприятия, так и для деятельности) разумным субъектом $\mu \in \mathfrak{M}$ служит детерминированное подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$, а его дополнение $X^c = \mathfrak{X} - X$ служит фоном. В недетерминированной ситуации «выбор фигуры» разумным субъектом $\mu \in \mathfrak{M}$ определяется двумя множествами событий-выборов-фигуры $\mathfrak{X}_\mu^{02}$ и $\mathfrak{X}_\mu^{12}$, или что то же — двумя случайными множествами событий-выборов-фигуры

$$K_\mu^{02} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_\mu^{02}}, 2^{2^{\mathfrak{X}_\mu^{02}}}\right),$$

$$K_\mu^{12} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_\mu^{12}}, 2^{2^{\mathfrak{X}_\mu^{12}}}\right)$$

с общими для обоих соответствующими эвентологическими распределениями выбора-фигуры вида:

$$p(X_\mu^{02}) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X_\mu^{02})) = \mathbf{P}(K_\mu^{02} = X_\mu^{02}), \quad X_\mu^{02} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{02},$$

$$p(X_\mu^{12}) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X_\mu^{12})) = \mathbf{P}(K_\mu^{12} = X_\mu^{12}), \quad X_\mu^{12} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{12}.$$

Итак, наступление событий-террасок

$$\mathrm{ter}(X_\mu^{02}) = \bigcap_{x \in X} x_\mu^{02} \bigcap_{x \in X^c} (x_\mu^{02})^c = \{\omega : K_\mu^{02}(\omega) = X_\mu^{02}\},$$

$$\mathrm{ter}(X_\mu^{12}) = \bigcap_{x \in X} x_\mu^{12} \bigcap_{x \in X^c} (x_\mu^{12})^c = \{\omega : K_\mu^{12}(\omega) = X_\mu^{12}\},$$

происходящее под управлением соответствующих эвентологических распределений с вероятностями $p(X_\mu^{02})$ и $p(X_\mu^{12})$, означает, что с данными вероятностями разумный субъект $\mu \in \mathfrak{M}$ выбирает восприятие или создание (деятельность) «со-бытий» из $X$ в «фигуру», оставляя восприятие или создание (деятельность) «со-бытий» из $X^c = \mathfrak{X} - X$ в «фоне».

### 14.3.3 Выбор имен восприятия и деятельности

Разум зарождается у субъекта там и тогда, где и когда у него возникает способность делать эвентологический выбор множеств событий. Совесть у разумного субъекта зарождается там и тогда, где и когда у него возникает способность оценивать события — делать вероятностный выбор «своих» имен для событий, характеризующих события позитивно или негативно.

Каждое «со-бытие» $x \in \mathfrak{X}$ разумный субъект $\mu \in \mathfrak{M}$ способен назвать одним из множества «своих» имен $N_x$, часть из которых $N_x^+$ означает позитивную оценку субъектом $\mu$ «со-бытия» $x$, а часть $N_x^-$ — негативную. Конечно, у «со-бытия» $x$ существует еще множество нейтральных «своих» имен $N_x^0$, но добавление их в наш анализ — дело техники, приводящей лишь к громоздкой записи. Иначе говоря, вместо $N_x = N_x^+ + N_x^- + N_x^0$ будем полагать $N_x = N_x^+ + N_x^-$, всегда помня, что при необходимости добавить $N_x^0$ труда не составит.

Не умаляя общности, будем считать, что для каждого разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$

- $\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle \in N_x^+$, $\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle \in N_x^+$ — события-выборы из $\mathfrak{X}_\mu^{01}$ и $\mathfrak{X}_\mu^{11}$ означают выбор позитивных имен для восприятия и создания «события» $x \in \mathfrak{X}$;

тогда очевидно, что для каждого разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$

- $\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle^c \in N_x^-$, $\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle^c \in N_x^-$ — дополнения $\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle^c = \Omega - \langle x_\mu^{\downarrow} \rangle$ и $\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle^c = \Omega - \langle x_\mu^{\uparrow} \rangle$ событий-выборов из $\mathfrak{X}_\mu^{01}$ и $\mathfrak{X}_\mu^{11}$ означают выбор негативных имен для восприятия и создания «со-бытия» из $x \in \mathfrak{X}$;

Разумный субъект $\mu \in \mathfrak{M}$, воспринимая и создавая «со-бытия» из $\mathfrak{X}$, называет каждое из них «своим» именем:

- позитивным (событие-выбор $\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle$ или $\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle$), или
- негативным (событие-выбор $\langle x_\mu^{\downarrow} \rangle^c$ или $\langle x_\mu^{\uparrow} \rangle^c$).

Каждый произвольный эвентологический выбор субъектом $\mu$ «своих» имен для восприятия или создания «со-бытий» из $\mathfrak{X}$ взаимно однозначно «нумеруется» подмножеством событий-выборов $X_\mu^{01} = \{x_\mu^{01} : x \in X\} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{01}$ или $X_\mu^{11} = \{x_\mu^{11} : x \in X\} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{11}$, при которых $\mu$ выбрал позитивное имя для восприятия или создания. Иначе говоря, произвольный эвентологический выбор, «занумерованный» подмножеством $X_\mu^{01}$ или $X_\mu^{11}$, означает наступление соответствующих событий-террасок

$$\mathrm{ter}(X_\mu^{01}) = \bigcap_{x \in X} x_\mu^{01} \bigcap_{x \in X^c} \langle x_\mu^{01} \rangle^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

$$\mathrm{ter}(X_\mu^{11}) = \bigcap_{x \in X} x_\mu^{11} \bigcap_{x \in X^c} \langle x_\mu^{11} \rangle^c, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

когда наступают все «события-выборы позитивных имен» из $X_\mu^{01}$ или $X_\mu^{11}$ и не наступает ни одного события-выбора из $(X_\mu^{01})^c = \mathfrak{X}_\mu - X_\mu^{01}$ или $(X_\mu^{11})^c = \mathfrak{X}_\mu - X_\mu^{11}$, т.е. наступают дополнения этих событий — «события-выборы негативных имен» $\langle x_\mu^{01} \rangle^c = \Omega - \langle x_\mu^{01} \rangle$, $\langle x_\mu^{01} \rangle \in (X_\mu^{01})^c$ или $\langle x_\mu^{11} \rangle^c = \Omega - \langle x_\mu^{11} \rangle$, $\langle x_\mu^{11} \rangle \in (X_\mu^{11})^c$.

В результате нами определено два множества: множество событий-выборов имен восприятия $\mathfrak{X}_\mu^{01}$ и множество событий-выборов имен деятельности $\mathfrak{X}_\mu^{11}$, или что эквивалентно — два соответствующих случайных множества событий-выборов

$$K_\mu^{01} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_\mu^{01}}, 2^{2^{\mathfrak{X}_\mu^{01}}}\right),$$

$$K_\mu^{11} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}_\mu^{11}}, 2^{2^{\mathfrak{X}_\mu^{11}}}\right),$$

возможными значениями которых служат подмножества событий-выборов позитивных имен $X_\mu^{01} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{01}$ или $X_\mu^{11} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{11}$. При этом эвентологическое распределение и множеств событий-выборов $\mathfrak{X}_\mu^{01}$ или $\mathfrak{X}_\mu^{11}$, и случайных множеств событий-выборов $K_\mu^{01}$ или $K_\mu^{11}$ имеет один и тот же соответствующий вид

$$p(X_\mu^{01}) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X_\mu^{01})) = \mathbf{P}(K_\mu^{01} = X_\mu^{01}), \quad X_\mu^1 \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{01};$$

$$p(X_\mu^{11}) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X_\mu^{11})) = \mathbf{P}(K_\mu^{11} = X_\mu^{11}), \quad X_\mu^{11} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{11}.$$

### 14.3.4 По ту сторону добра и зла[19]

Одна из главных тем, которую затрагивает В.А.Лефевр своей теорией рефлексии [83], — это тема нравственного выбора разумного субъекта между добром и злом. У каждой медали — две стороны. То, в чем один видит «добро», другой обнаруживает «зло»; то, что вчера разумный субъект называл «добрым», сегодня объявляет «злым» (рис. 14.9). С точки зрения эвентологии этот выбор сводится к *выбору разных имен* для одних и тех же событий.

#### Выбор разумного субъекта

Разумный субъект $\mu \in \mathfrak{M}$ выбирает для каждого «со-бытия» $x \in \mathfrak{X}$ то «доброе» имя (событие $x_\mu^{01}$ или $x_\mu^{11}$), то — «злое» имя (событие $(x_\mu^{01})^c$ или $(x_\mu^{11})^c$) в зависимости от собственного темперамента и нынешнего расположения духа. Выбор имени для «со-бытия»

[19] «По ту сторону добра и зла» (German: «Jenseits von Gut und Böse») — снабженная подзаголовком «Прелюдия к философии будущего» книга немецкого философа, поэта и композитора *Фридриха Вильгельма Ницше (Nietzsche, Friedrich Wilhelm, 1844–1900)*, изданная в 1886.

| Добрый взгляд | Злой взгляд |
|---|---|
| молчаливый | дурак |
| говорливый | болтун |
| смиренный | малодушный |
| знает себе цену | специвец |
| терпеливый | трус |
| суровый | изверг |
| серьезный | гордец |
| щедрый | мот |
| бережливый | жмот |
| воздержанный | ханжа |
| остроумный | наглец |
| скромный | болван |
| вежливый | шаркун |
| галантность | бесстыдство |
| вкус к жизни | беспутство |
| изобретательность | лживость |
| отвага | дерзость |
| щепетильность | мстительность |
| любезность | лесть |
| остроумие | злоязычие |
| проницательность | коварство |
| благоразумие | притворство |

Рис. 14.9. Две стороны одной медали: «Люди обычно впадают в крайности, никак не найдут золотую середину» [154, Бальтасар Грасиан]

$x \in \mathfrak{X}$ означает оценку разумным субъектом $\mu \in \mathfrak{M}$ своего отношения к этому «со-бытию»: «добрую» (событие $x_\mu^{01}$ или $x_\mu^{11}$) или — «злую» (событие $(x_\mu^{01})^c$ или $(x_\mu^{11})^c$). Таким образом на фиксированном множестве событий $\mathfrak{X}$ разумный субъект при наступлении элементарного события $\omega^* \in \Omega$ характеризуется подмножеством событий-выборов «добрых» имен $X_\mu^{01}(\omega^*) = \{x_\mu^{01} : \omega^* \in x_\mu^{01}\} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{01}$ или $X_\mu^{11}(\omega^*) = \{x_\mu^{11} : \omega^* \in x_\mu^{11}\} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{11}$, которым соответствует подмножество «со-бытий» $X \subseteq \mathfrak{X}$, для которых им выбраны (при наступлении $\omega^* \in \Omega$) «добрые» имена, и которое служит очередным значением случайного множества событий-выборов $K_\mu^{01}$ или $K_\mu^{11}$,

указывающим на то, что наступило событие-терраска

$$\{\omega : K_\mu^{01}(\omega) = X_\mu^{01}\} = \mathrm{ter}(X_\mu^{01}) \quad \text{или} \quad \{\omega : K_\mu^{11}(\omega) = X_\mu^{11}\} = \mathrm{ter}(X_\mu^{11}).$$

Серия из $G$ наблюдений за событиями-выборами имен одним и тем же разумным субъектом $\mu \in \mathfrak{M}$ образует статистику подмножеств событий-выборов «добрых» имен:

$$X_{\mu,1}^{01}, \ldots, X_{\mu,G}^{01} \quad \text{или} \quad X_{\mu,1}^{11}, \ldots, X_{\mu,G}^{11},$$

позволяющую провести оценку[20] эвентологического распределения множества событий-выборов $\mathfrak{X}_\mu^1$, характеризующего способность разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{X}$ выбирать между «добром» и «злом».

### Выбор множества разумных субъектов

Серия из $|\mathfrak{M}|$ наблюдений за событиями-выборами всего множества разумных субъектом $\mathfrak{M}$ также образует совокупную статистику подмножеств событий-выборов «добрых» имен:

$$\{X_\mu^{01}, \quad \mu \in \mathfrak{M}\} \quad \text{или} \quad \{X_\mu^{11}, \quad \mu \in \mathfrak{M}\},$$

позволяющую провести оценку[21] эвентологического распределения множества событий-выборов[22]

$$\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}^{01} = \{x_{\mathfrak{M}}^{01},\ x \in \mathfrak{X}\} \quad \text{или} \quad \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}^{11} = \{x_{\mathfrak{M}}^{11},\ x \in \mathfrak{X}\},$$

совокупно характеризующего способность всего множества $\mathfrak{M}$ — «совокупного разума» — выбирать между «добром» и «злом».

---

[20] Например, по формуле: $\widehat{p}(X_\mu^{01}) = \frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G} \mathbf{1}(X_{\mu,g}^{01} = X_\mu^{01}),\ X_\mu^{01} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^{01}$, где $\mathbf{1}(X_{\mu,g}^{01} = X_\mu^{01})$ — индикатор равенства подмножеств событий.

[21] По формуле: $\widehat{p}(X_{\mathfrak{M}}^{01}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|}\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \mathbf{1}(X_\mu^{01} = X_{\mathfrak{M}}^{01}),\ X_{\mathfrak{M}}^{01} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}^{01}$, где $\mathbf{1}(X_\mu^{01} = X_{\mathfrak{M}}^{01})$ — индикатор равенства подмножеств событий.

[22] В эвентологической теории нечетких событий [41] объекту $x_{\mathfrak{M}}^{01}$ соответствует множество событий $x_{\mathfrak{M}}^{01} = \{x_\mu^{01},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$, которое определяет *нечеткое событие*, обычно обозначаемое $\tilde{x}^{01} = \{x_\mu^{01},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$. Таким образом и методы, и результаты обработки совокупной статистики можно также трактовать на эвентологическом языке нечетких событий $\tilde{x}^{01},\ x \in \mathfrak{X}$, нечеткость каждого из которых порождается множеством разумных субъектов $\mathfrak{M}$.

### 14.3.5 Эвентологическое распределение пси-множества «со-бытия» разумного субъекта

Эвентологическое распределение (Э-распределение) пси-множества $x_\mu^\Psi$ «со-бытия» $x$ разумного субъекта $\mu$ — это Э-распределение множества из шести составляющих его колмогоровских событий

$$x_\mu^\Psi = \Big\{ x_\mu^\downarrow,\ \langle x_\mu^\downarrow \rangle,\ \langle\langle x_\mu^\downarrow \rangle\rangle,\ x_\mu^\uparrow,\ \langle x_\mu^\uparrow \rangle,\ \langle\langle x_\mu^\uparrow \rangle\rangle \Big\},$$

которое представляет собой набор из $64 = 2^{|x_\mu^\Psi|}$ вероятностей

$$p(X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(X)), \quad X \subseteq x_\mu^\Psi,$$

соответствующих событий-террасок

$$\mathrm{ter}(X) = \bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c,$$

где $x^c = \Omega - x$ — дополнение до $\Omega$, $X^c = x_\mu^\Psi - X$ — дополнение до пси-множества $x_\mu^\Psi$.

Пять подмножеств пси-множества $x_\mu^\Psi$ имеют самостоятельное эвентологическое значение и образуют два разбиения пси-множества на три дуальных события:

$$x_\mu^\Psi = \ddot{x}_\mu + \langle \ddot{x}_\mu \rangle + \langle\langle \ddot{x}_\mu \rangle\rangle$$

и два триадных события:

$$x_\mu^\Psi = \widehat{x}_\mu^\downarrow + \widehat{x}_\mu^\uparrow,$$

тем самым формируя довольно простую эвентологическую структуру подмножеств $x_\mu^\Psi$, которая также отражена в строении дуально-триадной матрицы «со-бытия» разумного субъекта $\|x_\mu\|$.

$\star\star\star$

Даже предварительный эвентологический анализ «со-бытия» разумного субъекта дал весьма неожиданные результаты: событие, которое вне эвентологии всегда считалось элементарным понятием,

вдруг обнаружило свои составные элементы, образующие универсальную для всех событий структуру.

Эвентологически каждое «со-бытие» $x$ разумного субъекта $\mu$ оказалось пси-множеством $x_\mu^\Psi$, состоящим, по крайней мере, из шести колмогоровских событий и имеющим дуально-триадную структуру, основанную на фундаментальных психологических понятиях: *восприятие, деятельность, выбор имени и фигуры.*

Открываются новые пути исследований деталей «со-бытия» разумного субъекта, которые заключаются прежде всего в изучении событийного взаимодействия структурных подмножеств пси-множества при помощи, например, метода эвентологической регрессии или методов эвентологического ковариационного и корреляционного анализа множеств событий.

Становится возможной эвентологическая классификация Э-распределений пси-множеств, характеризующих индивидуальные типы «со-бытия» разумных субъектов, которая может быть использована не только в психологии, но также в экономикс, социологии, соционике и других областях, где решающую роль играет поведение разумных субъектов.

## 14.4 Эвентология в психофизике

Психофизика — раздел психологии, изучающий количественные отношения между силой раздражителя и величиной возникающего ощущения. Основана Г. Фехнером[23] во 2-й половине 19 века. Охватывает две группы проблем: измерение порога ощущений, т.е. предела чувствительности сенсорной системы человека (закон Вебера[24]-Фехнера

[23] *Фехнер, Густав Теодор (Fechner, Gustav Theodor, 1801–1887)* — немецкий психолог-экспериментатор; пионер экспериментальной психологии и основатель психофизики; вдохновитель многих ученых и философов 20-го века, включая Эрнста Маха и Вильгельма Вундта. Самый известный его результат — закон Вебера-Фехнера: «Чтобы интенсивность ощущения могла увеличиться в арифметической прогрессии, стимул должен увеличиться в геометрической прогрессии».

[24] *Вебер, Эрнст Генрих (Weber, Ernst Heinrich, 1795–1878)* — немецкий врач и физиолог; основатель экспериментальной психологии; около 1860 работал с Густавом Фехнером в области психофизики, когда сформулировал закон Вебера-Фехнера.

и др.), и построение психофизических шкал (С. Стивенс[25] и др.).

### 14.4.1 Терминология и обозначения психофизики

Основная задача психофизики — изучение количественного отношения

$$\Psi = f(\varphi)$$

между силой раздражителя (стимула) $\varphi$ и силой возникающего ощущения $\Psi$, включает две группы проблем: измерение порога ощущений:

- $\varphi_0$ — абсолютный порог, наименьший стимул, способный вызвать ощущение у человека;
- $\Delta\varphi$ — дифференциальный порог, наименьшее изменение стимула, ощущаемое человеком;

и построение психофизических шкал.

### 14.4.2 Закон Вебера-Фехнера

Закон Вебера-Фехнера, дающий функциональную связь между силой ощущения $\Psi$ и силой стимула $\varphi$:

$$\Psi - \Psi_0 = k \ln \frac{\varphi}{\varphi_0},$$

формулировался авторами так: *«Чтобы ощущение могло увеличиться в арифметической прогрессии, стимул должен увеличиться в геометрической прогрессии»*. Обратная форма закона Вебера-Фехнера имеет вид:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \exp\left\{\frac{1}{k}(\Psi - \Psi_0)\right\}.$$

[25] *Стивенс, Стэнли Смит (Stevens, Stanley Smith , 1906–1973)* — американский психолог; основатель Гарвардской психо-акустической лаборатория; открыл степенной закон Стивенса; автор фундаментального учебника «Руководство по экспериментальной психологии» (на 1400 страницах, 1951); его называют Фехнером 20-го века

### 14.4.3 Степенной закон Стивенса

Стивенс предложил использовать степенную функцию, чтобы связать силу ощущения и силу стимула:

$$\Psi - \Psi_0 = k(\varphi - \varphi_0)^a,$$

$$\varphi - \varphi_0 = \left\{ \frac{1}{k}(\Psi - \Psi_0) \right\}^{1/a}.$$

### 14.4.4 Обобщенный закон Ю. М. Забродина

Ю. М. Забродин[26] предложил [89] вести параметр осведомленности из интервала $[0, 1]$:

- 0 — полная неосведомленность (закон Вебера-Фехнера);
- 1 — полная осведомлённость (закон Стивенса),

объединяющий оба закона — Вебера-Фехнера и Стивенса — в один.

### 14.4.5 Гипотеза М. А. Кириллова

М. А. Кириллов[27] предложил дополнить закон Вебера-Фехнера, связывающий стимул и ощущение, дуальным законом, связывающим стимул и интерес:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0^*} = \exp\left\{ -\frac{1}{k}(\Psi^* - \Psi_0^*) \right\},$$

предполагая, что *«ощущение + интерес=константа», «ощущение × интерес = удовлъствие»*.

**Эвентология предположений М.А.Кириллова**

Если дуальному событию:

$$\ddot{x}_\mu = \{x_\mu^\uparrow,\ x_\mu^\downarrow\} = \{\mu\text{-деятельность},\ \mu\text{-восприятие}\}$$

соответствует вектор ценностей его событий-компонент:

$$\{\mu\text{-интерес}, \mu\text{-ощущение}\},$$

[26] *Забродин, Юрий Михайлович* — русский психолог.
[27] *Кириллов, М. А.* — русский ученый.

то Э-моделью *μ-удовольствия* служит ценность «неосознваемого» события

$$x_\mu^\uparrow \cap x_\mu^\downarrow + (x_\mu^\uparrow)^c \cap (x_\mu^\downarrow)^c = (x_\mu^\uparrow \Delta x_\mu^\downarrow)^c,$$

а Э-моделью *μ-неудовольствия* служит ценность «осознваемого» события

$$x_\mu^\uparrow \Delta x_\mu^\downarrow = x_\mu^\uparrow \cup x_\mu^\downarrow - x_\mu^\uparrow \cap x_\mu^\downarrow,$$

которое состоит из двух неосознаваемых событий-частей:

$$x_\mu^\uparrow \Delta x_\mu^\downarrow = (x_\mu^\uparrow)^c \cap x_\mu^\downarrow + x_\mu^\uparrow \cap (x_\mu^\downarrow)^c$$

и является эвентологическим дополнением к *μ-удовольствию*.

Эвентология предлагает заменить «числовые» предположения в гипотезе М.А.Кириллова (с точки зрения эвентологии это предположения о ценностях событий) более фундаментальными предположениями о самих событиях. Э-предположения имеют более общий характер и влекут «числовые» предположения при частных структурах зависимости событий-компонент дуального события: «$\mu$-деятельность» $x_\mu^\uparrow$ и «$\mu$-восприятие» $x_\mu^\downarrow$.

### 14.4.6 Закон Вебера-Фехнера и его обобщения в сравнении с эвентологическими соотношениями «ценность–вероятность»

Закон Вебера-Фехнера (обратная форма):

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \exp\left\{\frac{1}{k}(\Psi - \Psi_0)\right\}.$$

Гипотетический закон М.А.Кириллова:

$$\frac{\varphi}{\varphi_0^*} = \exp\left\{-\frac{1}{k}(\Psi^* - \Psi_0^*)\right\}.$$

Эвентологические соотношения «вероятность–ценность создания»:

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\left\{\gamma(w(X) - w(\emptyset)\right\},$$

Эвентологические соотношения «вероятность–ценность восприятия»:

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\left\{-\beta(u(X) - u(\emptyset)\right\},$$

где

- $\beta$ — обратный уровень средней восприимчивости событий;
- $\gamma$ — обратный уровень средней созидательности событий;
- $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение вероятностей $\mathfrak{X}$;
- $\{w(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение ценностей создания $\mathfrak{X}$;
- $\{u(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение ценностей восприятия $\mathfrak{X}$.

### 14.4.7 Предложения к размышлению

Читателю предлагается самостоятельно поразмыслить над сравнением закона Вебера-Фехнера и его обобщений с эвентологическими соотношениями, связывающими вероятности событий из множества $\mathfrak{X}$ с их ценностями создания и восприятия.

### 14.4.8 Трехликий Янус Лефевра и феномен Брока–Зульцера

Брока и Зульцер в 1902 открыли психофизический феномен[28]. Они исследовали восприятие вспышек света человеком в зависимости от их длительности и обнаружили, что при одной и той же интенсивности более короткая вспышка может восприниматься как более яркая. Сравним восприятие короткой и длинной вспышек. Наблюдая часть процесса длинной вспышки в течении промежутка времени, равного по длительности короткой вспышке, испытуемый должен был бы зафиксировать, что ее яркость равна яркости короткой, но этого не происходит. Получается, что последующее восприятие той же самой длинной вспышки «гасит» впечатление от ее начального восприятия. Но это противоречит взгляду, согласно которому *последующее событие* не может изменить *предыдущего события*.

Сущность этого феномена, с точки зрения современной психологии [83], состоит в том, что *бессознательное* в течении некоторого отрезка времени (150–200 мсек) конструирует целостный образ и лишь затем посылает его в *сферу сознания*, где этот образ

[28] *Брока–Зульцера феномен* (*A. Broca* — французский физиолог и биофизик 19–20 вв.; *D. Sulzer*) — изменение во времени ощущения яркости светового стимула: сначала ощущение яркости возрастает, проходит через максимум и затем снижается до некоторого стационарного уровня.

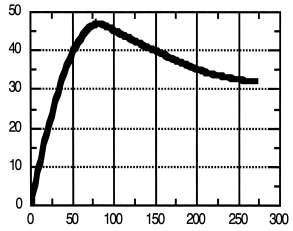



Рис. 14.10. Феномен Брока-Зульцера (Broca-Sulzer, 1902): воспринимаемая яркость (perceived brightness) как функция длительности вспышки (flash duration) — по горизонтали длительность (мсек), по вертикали относительная яркость.

проявляет себя как «мгновенная вспышка света». Таким образом, *настоящее событие* для субъекта — это специфический спектакль, поставленный его бессознательным. Подобным же спектаклем является и *прошлое событие*, в котором *очередное настоящее событие* связывается в единую череду с прежде поставленными спектаклями. Наконец, *будущее событие* также является результатом особой постановки бессознательного, функция которой состоит в подготовке сознания к восприятию новых событий. Триада *прошлые события–настоящее событие–будущие события*, где настоящее событие специально конструируется *бессознательным*, проявляет себя не только на уровне элементарного акта восприятия, каким является восприятие вспышки света, но и *в любой сознательной деятельности человека*. Субъект, обладающий *бессознательным*, может быть представлен как «трехликий Янус» (меткая метафора Лефевра [83]). Два лица «трехликого Януса» как и у двуликого Януса[29] обращены: одно в прошлое, другое — в будущее, третье же его лицо смотрит в настоящее.

### 14.4.9 Феномен Брока-Зульцера и открытие Канемана

Возвращаясь к одному из открытий Канемана (стр. 311): «большинство вероятностей событий недооценивается, лишь вероятность редких событий переоценивается», отметим любопытный факт: феномен Брока-Зульцера объясняет открытие Канемана в диапазоне

[29] *Янус (*лат. *Ianus,* англ. *Janus)* в древнеримской мифологии — божество времени, всякого начала и конца, входа и выхода. Изображалось с двумя лицами, обращенными в противоположные стороны (в прошлое и в будущее).

малых вероятностей: восприятие малых воздействий переоценивается. Для объяснения требуется лишь заменить восприятие на вероятность восприятия, а возможность такой замены следует из общих эвентологических принципов (стр. 23).

## 14.5 Эвентологический крест восприятия и деятельности

*Эвентологический крест восприятия и деятельности* определяется как совокупность четырёх «кривых»[30], в которую входят:

- *кривая восприятия*;
- *кривая деятельности*;
- *кривая совпадения восприятия и деятельности*;
- *кривая различия восприятия и деятельности.*

События $x$-восприятия и $x$-деятельности и связанные с ними случайные величины и параметры (рис. 14.11) интерпретируются следующим образом:

- $\xi^{\downarrow}$ — *Э-цена (ценность)* события $x$, за которую разумный субъект готов его воспринять;
- $\xi^{\uparrow}$ — *Э-цена (ценность)* события $x$, за которую разумный субъект готов его создать;
- $\pi$ — *рыночная Э-цена (ценность)* события $x$, установившаяся на *событийном рынке восприятия-деятельности*, по которой при данном стечении обстоятельств создаются воспринимаемые события, или воспринимаются создаваемые события;
- $\pi_{\min}$ и $\pi_{\max}$ — минимально и максимально возможная *рыночная Э-цена (ценность)* событий;
- $x^{\downarrow}(\pi) = \{\omega : \xi^{\downarrow}(\omega) > \pi\}$ — восприятие события $x$ по *рыночной Э-цене (ценности)* $\pi$;
- $x^{\uparrow}(\pi) = \{\omega : \xi^{\uparrow}(\omega) > \pi\}$ — создание события $x$ по *рыночной Э-цене (ценности)* $\pi$.

[30] Используется аналог терминологии, принятой в экономикс, где говорят о *кривых спроса и предложения*, формирующих фундаментальный графический образ современной экономической теории — *рыночный крест Маршалла.*

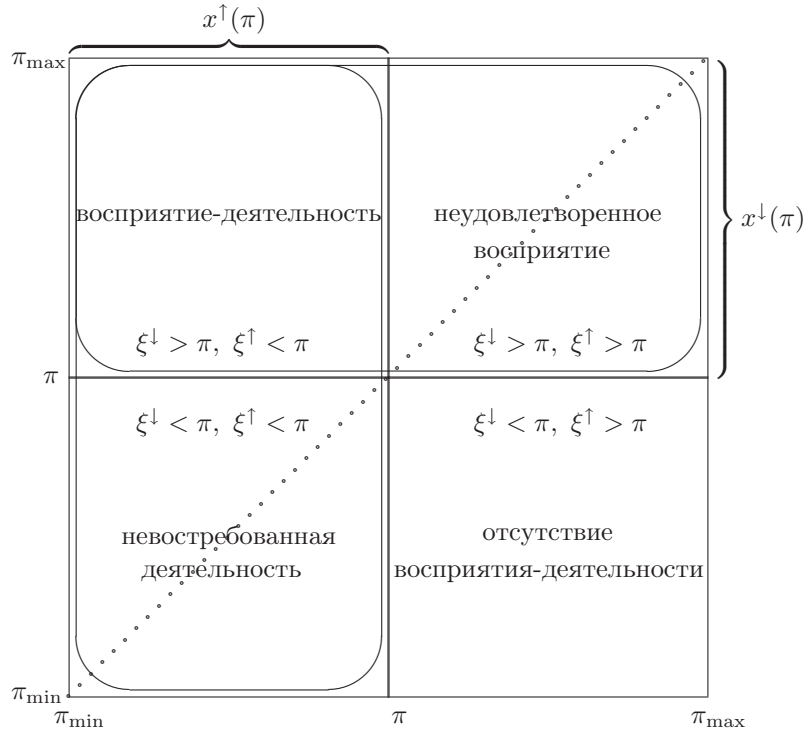



Рис. 14.11. События $x$-восприятия $x^{\downarrow}(\pi)$ и $x$-деятельности $x^{\uparrow}(\pi)$ и связанные с ними случайные величины $\xi^{\downarrow}$ и $\xi^{\uparrow}$ и параметры $\pi_{\min}, \pi_{\max}$ и $\pi$.

### 14.5.1 Эвентологическая цена и ценность события

*Эвентологическая цена (Э-цена)* — это ценность «единицы события», а поскольку события — бинарные объекты: они происходят или не происходят — то понятие «единицы события» совпадает с понятием события, а Э-цена события совпадает с его ценностью.

### 14.5.2 Эвентологическое тестирование и статистическое оценивание Э-креста деятельности и восприятия

Рассмотрим множество разумных субъектов $\mathfrak{M}$. Существует целый ряд тестов, позволяющих получать статистические оценки Э-распре-

деления дуального события «деятельность – восприятие»

$$\ddot{x}_\mu(\pi) = \{x^\uparrow_\mu(\pi), x^\downarrow_\mu(\pi)\} = \{x^\uparrow_\mu(\pi), x^\downarrow_\mu(\pi)\} \subseteq \mathcal{F}$$

— дуплета событий

$$\{x_\mu^{\text{создание}}(\pi), x_\mu^{\text{восприятие}}(\pi)\},$$

характеризующего бытие разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ при рыночной Э-цене $\pi$, где $\mathfrak{M}$ — множество рассматриваемых разумных субъектов. Будем использовать сокращенные обозначения:

$$\boldsymbol{p}^\mu(\pi) = \{p^\mu(\emptyset), p^\mu(x^\uparrow(\pi)), p^\mu(x^\downarrow(\pi)), p^\mu(x^\uparrow(\pi), x^\downarrow(\pi))\},$$

$$p^\mu_\uparrow(\pi) = \mathbf{P}(x^\uparrow_\mu(\pi)),\ p^\mu_\downarrow(\pi) = \mathbf{P}(x^\downarrow_\mu(\pi)),$$

$$p^\mu_\cap(\pi) = \mathbf{P}(x^\uparrow_\mu(\pi) \cap x^\downarrow_\mu(\pi)),\ p^\mu_\Delta(\pi) = \mathbf{P}(x^\uparrow_\mu(\pi) \Delta x^\downarrow_\mu(\pi)),$$

$$\mathsf{Kov}^\mu_{\uparrow\downarrow}(\pi) = p^\mu_\cap(\pi) - p^\mu_\uparrow(\pi) p^\mu_\downarrow(\pi),$$

дополненные символом $\mu$, для Э-распределения и вероятностей, статистические оценки которых могут быть получены в результате соответствующей обработки результатов эвентологического тестирования бытия разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ при рыночной Э-цене $\pi$.

Состояние индивидуального бытия разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ в каждый момент времени характеризуется Э-распределением вероятностей $\boldsymbol{p}^\mu(\pi)$, которые через соотношения «вероятность–ценность» связаны с двумя Э-распределениями ценностей (восприятия: $\boldsymbol{v}^\mu(\pi)$ и деятельности: $\boldsymbol{w}^\mu(\pi)$). Динамика состояния индивидуального бытия разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$ — это динамика Э-распределения вероятностей $\boldsymbol{p}^\mu(\pi)$, которая определяется его текущим «положением» и «импульсом» относительно *эвентологического креста восприятия и деятельности* данного разумного субъекта. В каждый момент времени текущее Э-распределение $\boldsymbol{p}^\mu(\pi)$ определяет для значения рыночной Э-цены $\pi$ четыре вероятности:

- $p^\mu_\uparrow(\pi) = \mathbf{P}(x^\uparrow_\mu(\pi))$ — вероятность деятельности (текущая точка «кривой деятельности»);
- $p^\mu_\downarrow(\pi) = \mathbf{P}(x^\downarrow_\mu(\pi))$ — вероятность восприятия (текущая точка «кривой восприятия»);

- $p^{\mu}_{\cap}(\pi) = \mathbf{P}(x^{\uparrow}_{\mu}(\pi) \cap x^{\downarrow}_{\mu}(\pi))$ — вероятность совпадения деятельности и восприятия (текущая точка «кривой совпадения»);
- $p^{\mu}_{\Delta}(\pi) = \mathbf{P}(x^{\uparrow}_{\mu}(\pi) \Delta x^{\downarrow}_{\mu}(\pi))$ — вероятность различия деятельности и восприятия (текущая точка «кривой различия»),

формирующие при изменении $\pi$ эвентологический крест восприятия и деятельности (см. рис. 14.11) данного разумного субъекта $\mu \in \mathfrak{M}$.

Рыночная Э-цена дуального события $\ddot{x}_{\mu}$, с которой сталкивается на Э-рынке каждый разумный субъект $\mu \in \mathfrak{M}$, всегда индивидуальна, т.е.

$$\pi = \pi_{\mu}.$$

Таким образом, результатом тестирования множества разумных субъектов служит набор четверок вероятностей

$$\Big\{\{p^{\mu}_{\uparrow}(\pi_{\mu}),\ p^{\mu}_{\downarrow}(\pi_{\mu}),\ p^{\mu}_{\cap}(\pi_{\mu}),\ p^{\mu}_{\Delta}(\pi_{\mu})\},\quad \mu \in \mathfrak{M}\Big\},$$

где набор индивидуальных рыночных Э-цен $\{\pi_{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}\}$ остается неизвестным. Индивидуальные рыночные Э-цены $\pi_{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}$ можно оценить, если сделать предположение о функциональном характере «кривых деятельности и восприятия». Например, можно предположить, что «кривые деятельности и восприятия» определяются функциональными соотношениями «вероятность–ценность»:

$$p^{\mu}_{\uparrow}(\pi) = a \exp\{\gamma\pi\};\quad p^{\mu}_{\downarrow}(\pi) = b \exp\{-\beta\pi\}.$$

Параметры $a, b, \gamma, \beta; \pi_{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}$ можно оценить, например, методом наименьших квадратов. Обозначим

$$L(a, b, \beta, \gamma, \pi_{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}) =$$

$$= \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \Big[\big(p^{\mu}_{\uparrow}(\pi_{\mu}) - a \exp\{\gamma\pi_{\mu}\}\big)^2 + \big(p^{\mu}_{\downarrow}(\pi_{\mu}) - b \exp\{-\beta\pi_{\mu}\}\big)^2\Big]$$

— сумму квадратов отклонений результатов теста $p^{\mu}_{\uparrow}(\pi_{\mu})$ и $p^{\mu}_{\downarrow}(\pi_{\mu})$, $\mu \in \mathfrak{M}$ от кривых деятельности и восприятия соответственно. Тогда решение задачи минимизации:

$$L(a, b, \beta, \gamma, \pi_{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}) \to \min_{\substack{\beta, \gamma, a, b, \\ \pi_{\mu},\ \mu \in \mathfrak{M}}}$$

дает МНК-оценки искомых параметров.

Частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial \pi_\mu} L = 2\big(p^\mu_\uparrow(\pi_\mu) - a\exp\{\gamma\pi_\mu\}\big)(-a\gamma\exp\{\gamma\pi_\mu\}) +$$
$$+2\big(p^\mu_\downarrow(\pi_\mu) - b\exp\{-\beta\pi_\mu\}\big)(b\beta\exp\{-\beta\pi_\mu\});$$

$$\frac{\partial}{\partial a} L = 2\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \big(p^\mu_\uparrow(\pi_\mu) - a\exp\{\gamma\pi_\mu\}\big)(-\exp\{\gamma\pi_\mu\});$$

$$\frac{\partial}{\partial b} L = 2\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \big(p^\mu_\downarrow(\pi_\mu) - b\exp\{-\beta\pi_\mu\}\big)(\exp\{-\beta\pi_\mu\});$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} L = 2\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \big(p^\mu_\uparrow(\pi_\mu) - a\exp\{\gamma\pi_\mu\}\big)(-a\pi_\mu\exp\{\gamma\pi_\mu\});$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} L = 2\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} \big(p^\mu_\downarrow(\pi_\mu) - b\exp\{-\beta\pi_\mu\}\big)(b\pi_\mu\exp\{-\beta\pi_\mu\}).$$

## 14.6 Эвентология ценностей

Здесь предполагается лишь обозначить один из важнейших разделов эвентологии — *теорию ценностей событий*. Дается краткое определение теории и перечень ее задач. Подробнее показаны два соотношения «ценность события — вероятность события», составляющие математическую основу эвентологической теории ценностей событий.

### 14.6.1 Философия ценностей

*Философия ценностей (учение о ценностях, аксиология*[31]*)* — область философии (выделившаяся после работ Лотце[32]), проблемы

[31] *Аксиология (от* греч. *axia — ценность и logos — учение)* — учение о ценностях; *аксиологический* — определяемый согласно своей ценности, с точки зрения теории ценностей.

[32] *Лотце, Рудольф Герман (Lotze, Rudolf Herman, 1817 – 1881)* — немецкий физиолог и философ; как философ стремился к синтезу метафизики, естествен-

которой сначала рассматривались, с одной стороны, в логике, эстетике и особенно в этике, а с другой — в психологии (особенно вопросы воления и чувств).

*Ценность* — то, что чувства предпочитают всему другому; к чему можно стремиться, созерцать, относиться с уважением, признанием, почтением (Менцер[33]); является существенным свойством объекта, сущностью и условием его бытия. Наличие множества человеческих потребностей и способов чувствования объясняет существование разнообразия оценок: то, что для одного имеет большую ценность, для другого — малую или вообще никакой. С формальной точки зрения ценности делятся на позитивные и негативные (малоценность, отсутствие ценности), на относительные и абсолютные, на субъективные и объективные. По содержанию различаются материальные ценности: приятное, полезное и пригодное; а также логические, этические и эстетические ценности: истина, добро, прекрасное.

### 14.6.2 Эвентологическая теория ценностей событий

Теория ценностей событий — раздел эвентологии; рассматривает ценность как одно из существенных свойств «со-бытия», которое раскрывает с двух сторон: как *ценность восприятия* и *ценность создания* со-бытия; определяет обе ценности события через его вероятность; вычисляет ценности одних событий по ценностям других событий; опирается на соотношения вида «ценность — вероятность» и вводит ключевое понятие *распределения ценностей множества событий*, определяемого эвентологическим распределением множества событий.

Теория ценностей событий имеет обширные применения в гуманитарных и социально-экономических науках; в экономикс предлагает эвентологическое обоснование законов спроса и предложения — рыночного «креста Маршалла»; в психологии и физиологии предлагает эвентологическое толкование закона Вебера–Фехнера, связывающего ощущения и воздействия.

---

ных наук и медицины; различал три сферы: действительность, истинность и ценность; характеризовал положение человека в этих сферах; четко различал бытие и ценность.

[33] *Менцер, Паульъ (Menzer, Paul, 1873–1960)* — немецкий философ.

Ценность события (в эвентологии) — одно из существенных свойств события; то, что ему присуще, составляет его конкретное существование — без ценности событие существовать не может; характеризует степень ценности для разумного субъекта «со-быть» — воспринять и/или создать событие, как исход бытия; раскрывает дуальность события в понятиях ценность восприятия и ценность создания события разумным субъектом; отражает два основополагающих противоположных отношения разума, события и бытия.

Понятие ценности события лежит в основе вероятностных закономерностей, описывающих природу объективной и субъективной неопределённости; математически определяется двумя соотношениями «ценность — вероятность», одно из которых «ценность восприятия — вероятность» опирается на соотношении Больцмана «энтропия — вероятность» (одну из основ статистической механики), а другое «ценность создания — вероятность», отражая противоположность разума и материи, служит ещё одной (противоположной вероятности) основой эвентологии, не имеющей аналогов в естественных науках.

### 14.6.3 Физические и психофизические аналоги

Коротко рассмотрим физические и психофизические аналоги эвентологических соотношений между ценностью и вероятностью события[34]. Если физический аналог — соотношение «энропия – вероятность» Больцмана — оказал прямое влияние на открытие эвентологического соотношения «ценность восприятия – вероятность», то психофизические аналоги — соотношения «ощущение – стимул» и «интерес – стимул»[35] — стали известны автору уже после введения второго эвентологического соотношения «ценность деятельности – вероятность»[36], еще более укрепив его уверенность в физико-психофизической обоснованности эвентологического описания пси-

[34] Физические и психофизические аналоги приводятся не в оригинальной, а в эвентологически переработанной форме, которая облегчает их сравнение.

[35] Психофизическое соотношение «интерес – стимул», дополняющее соотношение Вебера-Фехнера «ощущение – стимул», предложено М. А. Кирилловым (см. стр. 335).

[36] Это в который раз демонстрирует способность эвентологической теории делать открытия «на кончике пера», руководствуясь только собственной событийной логикой.

хологии «со-бытия» разумного субъекта.

### Соотношение «энтропия – вероятность» Больцмана

Соотношение Больцмана[37] «энтропия — вероятность» (в статистической механике и термодинамике) — соотношение, связывающее энтропию и вероятность состояний системы, — имеет вид

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\Big\{ -\beta(h(X) - h(\emptyset))\Big\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — распределение вероятностей состояний системы $\mathfrak{X}$, $\{h(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — распределение энтропии состояний той же системы, «$\emptyset$» — «нулевое» состояние системы (точка отсчёта), $\beta$ — обратная средняя температура состояний системы.

### Соотношение «ощущение – стимул» Вебера – Фехнера

Соотношение Вебера-Фехнера «ощущение — стимул» (в психофизике) — соотношение, связывающее ощущение и стимул (воздействие), — имеет вид

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\Big\{\gamma(v(X) - v(\emptyset))\Big\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — распределение значений стимула $\mathfrak{X}$, $\{v(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — распределение значений ощущений от воздействия этого стимула, «$\emptyset$» означает отсутствие стимула и ощущений, $\gamma$ — обратная средняя интенсивность ощущений данного стимула.

### Соотношение «интерес – стимул» М. А. Кириллова

Соотношение М. А. Кириллова «интерес — стимул» (в психофизике) — соотношение, связывающее интерес и стимул и дополняющее

[37] *Больцман, Людвиг Эдуард (*нем. *Boltzmann, Ludwig Eduard, 1844–1906)* — великий австрийский физик, один из основоположников статистической механики и статистической термодинамики. Имя Больцмана носят многие понятия статистической физики, в том числе соотношение «энтропия – вероятность», выражающее статистический смысл второго начала термодинамики.

соотношение Вебера-Фехнера «ощущение – стимул», — имеет вид

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\Big\{ -\beta(w(X) - w(\emptyset))\Big\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — распределение значений стимула $\mathfrak{X}$, $\{w(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — распределение значений интереса к воздействию этого стимула, «$\emptyset$» означает отсутствие стимула и интереса, $\beta$ — обратная средняя интенсивность интереса к данному стимулу.

### 14.6.4 Эвентологические соотношения между ценностями и вероятностью события

Приведенные ниже два эвентологических соотношения между вероятностью и ценностями события использованы в психологии «события» разумного субъекта при построении «эвентологического креста» его восприятия и деятельности (см. стр. 338), а также в экономических приложениях при построении эвентологической модели рыночного «креста Маршалла» спроса и предложения (см. стр. 285).

#### Соотношение «ценность восприятия – вероятность»

Соотношение «ценность восприятия — вероятность» — соотношение, связывающее ценность восприятия события и его вероятность[38], — имеет вид

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\Big\{ -\beta(w(X) - w(\emptyset))\Big\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение вероятностей множества событий $\mathfrak{X}$, $\{w(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение ценностей восприятия того же множества событий, «$\emptyset$» — пустое множество событий, $\beta$ — обратная средняя интенсивность восприятия множеств событий из $\mathfrak{X}$.

[38] Основано на соотношении Больцмана «энтропия — вероятность» из статистической механики.

**Соотношение «ценность деятельности – вероятность»**

Соотношение «ценность деятельности — вероятность» — соотношение, связывающее ценность создания события и его вероятность[39], — имеет вид

$$\frac{p(X)}{p(\emptyset)} = \exp\Big\{\gamma(v(X) - v(\emptyset))\Big\}, \quad X \subseteq \mathfrak{X},$$

где $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение вероятностей множества событий $\mathfrak{X}$, $\{v(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение ценностей создания того же множества событий, «$\emptyset$» — пустое множество событий, $\beta$ — обратная средняя интенсивность создания множеств событий из $\mathfrak{X}$.

## 14.7 Заключение

Поведение разумного субъекта — область психологии, которая непосредственно касается каждого разумного субъекта. Эвентологическая теория предлагает описывать психологическое поведение разумного субъекта в той или иной сфере некоторым множеством его собственных событий, имеющих отношение к этой сфере. Только эвентологическое наблюдение — наблюдение за множеством событий — позволяет разумному субъекту приобрести тот событийный опыт, которым он обречен руководствоваться в своем поведении.

Эвентология разрабатывает новые событийные подходы в психологии, а математическая эвентология — математический аппарат исследования множеств событий — событийных моделей психологического поведения разумных субъектов и их сообществ. Эвентологическая модификация методов проведения и обработки результатов психологического эксперимента и эвентологическое обоснование и дальнейшее событийное развитие существующих психологических теорий — дело ближайшего будущего.

[39] Основано на соотношении М. А. Кириллова «интерес — стимул» из психофизики.

# Глава 15
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЕТ-ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Предлагается эвентологическая теория *сет-предпочтений*, которая дает событийное обоснование и расширение классической теории предпочтений и объясняет известный с 1903 года парадокс Колина Блайта «о трёх пирогах».

## 15.1 Введение

Как разум принимает решение? Эвентолог, скорее всего, уточнит вопрос: «Как разум принимает Э-решение?» и ответит, что сначала разум

1) *воспринимает Э-обстоятельства окружающей среды — воспринимает подмножество наступивших событий-обстоятельств* $F \subseteq \mathfrak{F}$, иначе говоря, *воспринимает наступление события-террасы* $\mathrm{ter}(F) \subseteq \Omega$ порожденного $\mathfrak{F}$. Затем

2) *осознает возможные собственные Э-решения — осознает определяемое* $F \subseteq \mathfrak{F}$ *подмножество возможных событий-решений* $D_F \subseteq \mathfrak{D}$, имеющее *собственное Э-распределение* $\boldsymbol{p}(D_F) = \{p(D), D \subseteq D_F\}$. После этого

3) *вероятностно выбирает собственное Э-решение — в соответствии с собственным Э-распределением* $\boldsymbol{p}(D_F)$ *выбирает подмножество событий-решений* $D \subseteq D_F$, иначе говоря, *в соот-*

*ветствии с* $\boldsymbol{p}(D_F)$ *выбирает событие-террасу* $\mathrm{ter}(D) \subseteq \Omega$ из всех событий-террасок, порожденных множеством $D_F$. И, наконец,

4) *создает собственное Э-решение — создает собственные события-решения* из выбранного подмножества $D \subseteq D_F$ (и не создает события-решения из $D^c = D_F - D$), иначе говоря, *создает одно событие-террасу* $\mathrm{ter}(D) \subseteq \Omega$ из всех событий-террасок, порожденных множеством $D_F$.

Сейчас нам интересны второй и третий этапы принятия решений разумом. Эти два этапа давно привлекают внимание и теоретиков, и практиков в области принятия решений и обычно относятся к тому, что называется *теория предпочтений*. Мы предложим *теорию эвентологических сет-предпочтений (Э-сет-предпочтений)*, которая включает постановку и решение общей *задачи Э-сет-предпочтений событий* и попутно объясняет парадокс Блайта[1] «о трёх пирогах» [109, 141].

Парадокс Блайта (парадокс Симпсона, эффект Юла-Симпсона) — статистический парадокс, в котором предпочтения нескольких групп меняются на противоположные, после того как группы объединяются. С этим кажущимся невозможным результатом сталкиваются удивительно часто в социологии и медицинской статистике. Парадокс был описан Симпсоном[2] в 1951 [216] и Юлом[3] в 1903 [247]. Название «парадокс Симпсона» было дано Блайтом в 1972 [109]. Так как Симпсон не открыл этот парадокс, ряд авторов используют вместо этого безличные названия, типа «парадокс аннулирования (reversal paradox)» или «парадокс объединения (amalgamation paradox)». Поскольку Блайт популяризировал этот парадокс своим ярким примером выбора из трёх пирогов, мы называем его

Парадокс Блайта «о трёх пирогах». Владелец ресторана, меню которого в разные дни содержит то или иное подмножество множества

[1] *Блайт, Колин Р. (Blyth, Colin R.)* — американский статистик.

[2] *Симпсон, Эдвард Хью (Simpson, Edward Hugh)* — британский статистик, наиболее известен описанием парадокса Симпсона [216] (наряду с его коллегой Юлом [247]).

[3] Юл, Джордж Эдни (Yule, George Udny, 1871–1951) — шотландский статистик. Сделал важный вклад в теорию и практику корреляции, регрессии, анализа временных рядов. В его честь названы распределение Юла, дискретный степенной закон и многие другие статистические понятия.

из трёх пирогов *«яблочный, вишневый, черничный»*, подметил, что, когда в меню только два пирога, один его постоянный посетитель предпочитает *яблочный* пирог *вишневому* и никогда не заказывает *черничный*. Однако, когда меню содержит все три пирога, посетитель вдруг начинает отдавать предпочтение *вишневому* перед *яблочным*.

Казалось бы, парадокс: «присутствие или отсутствие в меню третьего пирога, который никогда не предпочитается посетителем, меняет его предпочтение между двумя другими на противоположное». Однако все гораздо проще: «из двух пирогов, яблочного и вишневого, посетитель предпочитает яблочный, а из всех — вишневый». Дело в том, что выбирающий разум не обязан всегда проводить только парные сравнения и иметь только парные предпочтения, он способен сравнивать не только пары событий, но и три, а следовательно, и произвольное множество событий. Иначе говоря, выбирающий разум способен иметь не только парные, но и тройные и множественные предпочтения. Более того, выбирающий разум способен на *предпочтение целого подмножества событий из данного множества событий (сет-предпочтение)*. Эти очевидные эвентологические выводы положены в основу предлагаемой нами *теории Э-сет-предпочтений*, которая в известном смысле обобщает существующие неэвентологические теории предпочтений и, в частности, дает эвентологическое объяснение парадокса Блайта «о трёх пирогах».

## 15.2 Эвентологическое объяснение парадокса Блайта «о трех пирогах»

Рассмотрим эвентологическое объяснение известного парадокса «о трех пирогах» Блайта [109, 141], прежде чем введем терминологию теории Э-сет-предпочтений, надеясь, что простой пример поможет быстрее освоить новую теорию.

Пусть $\mathfrak{X} = \{x, y, z\} = \{$«Яблочный», «Вишневый», «Черничный»$\}$ — множество имен пирогов,

$$\mathfrak{F} = \{f_x, f_y, f_z\} = \{\text{«Ябл. в меню», «Виш. в меню», «Чер. в меню»}\}$$

— множество событий-обстоятельств. Тогда события-терраски

$$\mathrm{ter}(F_X) = \bigcap_{x\in X} f_x \bigcap_{f_x\in X^c} f_x^c =$$

$$= \text{«в меню имена пирогов из } X = \{x : f_x \in F\} \subseteq \mathfrak{X}\text{»}$$

соответствуют восьми возможным стечениям событий-обстоятельств $F_X \subseteq \mathfrak{F}$, где $X \subseteq \mathfrak{X}$, $X^c = \mathfrak{X} - X$, а $f_x^c = \Omega - f_x$. Пусть

$$\mathfrak{D} = \{d_x, d_y, d_z\} =$$

$$= \{\text{«выбор Ябл.»}, \text{«выбор Виш.»}, \text{«выбор Чер.»}\}$$

— множество возможных собственных событий-решений выбирающего разума, а

$$D_{F_X} = \{d_x,\ x \in X\} \subseteq \mathfrak{D}$$

— подмножество собственных событий-решений, «навязываемое» разуму подмножеством событий-обстоятельств $F_X$, $X \subseteq \mathfrak{X}$.

Эвентологическое объяснение парадокса Блайта предполагает следующее Э-распределение множества возможных собственных событий-решений $\mathfrak{D}$ (см. диаграммы Венна на рис. 15.1):

$$\boldsymbol{p}(\mathfrak{D}) = \Big\{p(\emptyset),\ p(\{d_x\}),\ p(\{d_y\}),\ p(\{d_z\}),$$

$$p(\{d_x, d_y\}),\ p(\{d_x, d_z\}),\ p(\{d_y, d_z\}),\ p(\{d_x, d_y, d_z\})\Big\} =$$

$$= \{0,\ 2/9, 4/9, 0,\ 0, 3/9, 0,\ 0\}, \qquad (1)$$

где вероятности расположены в соответствии с событиями-решениями выбора из меню соответствующих комбинаций имен пирогов: «Ничего, Ябл, Виш, Чер, Ябл-Виш, Ябл-Чер, Виш-Чер, Ябл-Виш-Чер».

В нашей теории Э-сет-предпочтений Э-распределение $\boldsymbol{p}(\mathfrak{D})$ называется *тройным Э-сет-предпочтением* выбирающего разума, так как оно определяет вероятностный *сет*-выбор разума из *триплета* событий-решений $\mathfrak{D}$, иначе говоря — вероятностный выбор разумом любого подмножества событий-решений $D \subseteq \mathfrak{D}$.

В соответствии с *тройным Э-сет-предпочтением* (1), когда в меню предлагаются все три пирога, т.е. при стечении всех трех событий-обстоятельств: $\mathrm{ter}(\mathfrak{F}) = f_x \cap f_y \cap f_z$, *сет-выбирающий разум*[4] предпочитает выбрать лишь один вишневый пирог ($y$) в силу того, что $p(\{d_y\}) = \max_D\{p(D),\ D \subseteq \mathfrak{D}\}$.

*Тройное Э-моно-предпочтение* определяется вероятностями *моноплетного* выбора[5] из *триплета* событий-решений. В эвентологическом объяснении парадокса при моноплетном выборе из триплета, разум предпочитает вишневый пирог — моноплет $\{d_y\}$, т.е. имеет следующее *моно-предпочтение*:

«Ябл, $\underline{\textit{Виш}}$, Чер» $\sim \{2/9, 4/9, 0\} = \{p(\{d_x\}), p(\{d_y\}), p(\{d_z\})\}$, так как $p(\{d_y\})\ \max_{\{d\}\subseteq\mathfrak{D}}\{p(\{d\})\}$.

*Парные Э-моно-предпочтения* определяются вероятностями *моноплетного* выбора из *дуплетов* событий-решений, Э-распределения которых имеют вид:

$$\boldsymbol{p}_{xy} = \Big\{p_{xy}(\emptyset),\ p_{xy}(\{d_x\}),\ p_{xy}(\{d_x\}),\ p_{xy}(\{d_x, d_y\})\Big\},$$

$$\boldsymbol{p}_{xz} = \Big\{p_{xz}(\emptyset),\ p_{xz}(\{d_x\}),\ p_{xz}(\{d_z\}),\ p_{xz}(\{d_x, d_z\})\Big\},$$

$$\boldsymbol{p}_{yz} = \Big\{p_{yz}(\emptyset),\ p_{yz}(\{d_y\}),\ p_{yz}(\{d_z\}),\ p_{yz}(\{d_y, d_z\})\Big\}$$

и определяются Э-распределением триплета $\mathfrak{D}$. Например, дуплетное Э-распределение $\boldsymbol{p}_{xy}$ определяется через триплетное Э-распределение $\boldsymbol{p}(\mathfrak{D})$ по формулам:

$$p_{xy}(\emptyset) = p(\emptyset) + p(\{d_z\}),\ p_{xy}(\{d_x\}) = p(\{d_x\}) + p(\{d_x, d_z\}),$$

$$p_{xy}(\{d_y\}) = p(\{d_y\}) + p(\{d_y, d_z\}),$$

$$p_{xy}(\{d_x, d_y\}) = p(\{d_x, d_y\}) + p(\{d_x, d_y, d_z\}).$$

В эвентологическом объяснении парадокса при моноплетном выборе из дуплетов, разум имеет следующие *моно-предпочтения* среди соответствующих дуплетов событий-решений:

«$\underline{\textit{Ябл}}$, Виш» $\sim \{5/9, 4/9\} = \{p_{xy}(\{d_x\}), p_{xy}(\{d_y\})\}$,

[4] *Сет-выбирающий разум* — разум, способный выбрать любое подмножество событий-решений $D \subseteq \mathfrak{D}$.

[5] *Моноплетный выбор* — выбор *моноплетов* событий-решений $\{d\} \subseteq \mathfrak{D}$.

«Ябл, Чер» $\sim \{2/9, 0\} = \{p_{xz}(\{d_x\}), p_{xz}(\{d_z\})\}$,
«Виш, Чер» $\sim \{4/9, 3/9\} = \{p_{xy}(\{d_x\}), p_{xy}(\{d_y\})\}$
в силу тех же очевидных причин.

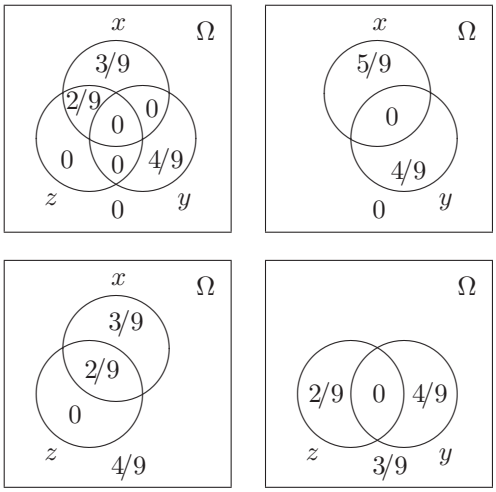



Рис. 15.1. Диаграммы Венна событий-решений, иллюстрирующие объяснение парадокса Блайта «о трёх пирогах» на основе теории Э-предпочтений. События-решения «выбор пирога» — яблочного ($x$), вишневого ($y$) и черничного ($z$) — образуют триплет $\mathfrak{D} = \{d_x, d_y, d_z\}$ с Э-распределением «Ничего, Ябл, Виш, Чер, Ябл-Виш, Ябл-Чер, Виш-Чер, Ябл-Виш-Чер» $\sim$ «0, 3/9, 4/9, 0, 0, 2/9, 0, 0», которое называется *тройным Э-сет-предпочтением* выбирающего разума. *Тройное Э-моно-предпочтение* «Ябл, Виш, Чер» $\sim$ «3/9, 4/9, 0» и *парные Э-моно-предпочтения*: «Ябл, Виш» = «5/9, 4/9», «Ябл, Чер» $\sim$ «3/9, 0», «Виш, Чер» $\sim$ «4/9, 2/9» определяются *тройным Э-сет-предпочтением.*

## 15.3 Определение Э-предпочтений

Пусть $\mathfrak{D}$ — множество событий-решений разума с Э-распределением

$$\boldsymbol{q} = \Big\{ q(D) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(D)),\ D \subseteq \mathfrak{D} \Big\}.$$

Множество $\mathfrak{D}$ порождается выбирающим разумом и связано с множеством событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$ *выбирающим отображением* $\varphi : 2^{\mathfrak{F}} \to 2^{\mathfrak{D}}$, сопоставляющим каждому подмножеству событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$ единственное множество возможных событий-реше-

ний $D_F = \varphi(F) \subseteq \mathfrak{D}$ среди подмножеств которого разум делает свой *сет-выбор*. Иначе говоря, при стечении событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$ разум *сет-выбирает* из множества $D_F$ подмножество событий-решений $D \subseteq D_F$ в соответствии с частным Э-распределением множества $D_F$:

$$\boldsymbol{q}(D_F) = \Big\{q(D \uparrow D_F),\ D \subseteq D_F\Big\},$$

где $q(D \uparrow D_F) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(D \uparrow D_F))$ — вероятности событий-террасок

$$\mathrm{ter}(D \uparrow D_F) = \bigcap_{d \in D} d \bigcap_{d \in D_F - D} d^c, \quad D \subseteq D_F,$$

порожденных множеством $D_F \subseteq \mathfrak{D}$.

*Замечание*. Использование кажущегося, на первый взгляд, излишним громоздкого обозначения «$D \uparrow D_F$» объясняется только необходимостью указать: «*$D$ сет-выбирается из $D_F$*». Дело в том, что до сих пор всегда было ясно, из какого множества событий сет-выбираются подмножества, и поэтому, например, Э-распределение множества $\mathfrak{D}$ сокращенно обозначалось $\boldsymbol{q}(\mathfrak{D}) = \{q(D),\ D \subseteq \mathfrak{D}\}$, хотя полное его обозначение должно иметь вид: $\boldsymbol{q}(\mathfrak{D}) = \{q(D \uparrow \mathfrak{D}),\ D \subseteq \mathfrak{D}\}$. Это замечание относится также и к сокращенным обозначениям событий-террасок:

$$\mathrm{ter}(D) = \bigcap_{d \in D} d \bigcap_{d \in D^c} d^c,$$

судя только по которым нельзя определить, что подмножество $D$ сет-выбирается из множества $\mathfrak{D}$ и что до $\mathfrak{D}$ определяется его дополнение $D^c = \mathfrak{D} - D$. Поэтому полное обозначение $\mathrm{ter}(D \uparrow \mathfrak{D}) = \mathrm{ter}(D), \quad D \subseteq \mathfrak{D}$ будет использоваться, когда требуется одновременно рассматривать события-терраски, порожденные различными множествами событий $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{F}$.

Э-распределение $\boldsymbol{q}$ множества событий-решений $\mathfrak{D}$ связано с Э-распределением $\boldsymbol{p}$ множества событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$ формулами условной схемы:

$$q(D) = \sum_{F \subseteq \mathfrak{F}} q(D \uparrow D_F | F) p(F), \quad D \subseteq \mathfrak{D},$$

где $\boldsymbol{p} = \Big\{p(F),\ F \subseteq \mathfrak{F}\Big\}$ — Э-распределение множества событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$, а вероятности

$$q(D \uparrow D_F|F) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{ter}(D \uparrow D_F) \cap \mathrm{ter}(F))}{p(F)},$$

взятые все вместе для $D \subseteq D_F$, образуют

$$\boldsymbol{q}(D \uparrow D_F|F) = \Big\{q(D \uparrow D_F|F),\ D \subseteq D_F\Big\}$$

— условное Э-распределение множества событий-решений $\mathfrak{D}$ при условии наступления подмножеств событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$, иначе говоря, при наступлении событий-террасок $\mathrm{ter}(F),\ F \subseteq \mathfrak{F}$.

Определение (Э-сет-предпочтение). *Э-сет-предпочтением* на множестве событий-решений $\mathfrak{D}$ называется Э-распределение этого множества: $\boldsymbol{q}(\mathfrak{D}) = \Big\{q(D \uparrow \mathfrak{D}),\ D \subseteq \mathfrak{D}\Big\}$. *Э-n-предпочтением* на множестве событий-решений $\mathfrak{D}$ называется набор вероятностей $n$-плетов из Э-распределения этого множества: $\boldsymbol{q}_n(\mathfrak{D}) = \Big\{q(D_n \uparrow \mathfrak{D}),\ D_n \subseteq \mathfrak{D}\Big\}$, где $D_n \subseteq \mathfrak{D}$ — произвольный $n$-плет событий-решений из $\mathfrak{D}$ (подмножество мощности $n = |D_n|$). В частности, *Э-пусто-предпочтением* на множестве событий-решений $\mathfrak{D}$ называется набор, состоящий из одной вероятности $q(\emptyset) \in \boldsymbol{q}(\mathfrak{D})$, взятой из Э-распределения этого множества: $\boldsymbol{q}_0(\mathfrak{D}) = \Big\{q(\emptyset)\Big\}$, *Э-моно-предпочтением* на множестве событий-решений $\mathfrak{D}$ называется набор вероятностей моноплетов из Э-распределения этого множества:

$$\boldsymbol{q}_1(\mathfrak{D}) = \Big\{q(\{d\} \uparrow \mathfrak{D}),\ d \in \mathfrak{D}\Big\},$$

*Э-дуплет-предпочтением* на множестве событий-решений $\mathfrak{D}$ называется набор вероятностей дуплетов из Э-распределения этого множества: $\boldsymbol{q}_2(\mathfrak{D}) = \Big\{q(\{d,e\} \uparrow \mathfrak{D}),\ \{d,e\} \subseteq \mathfrak{D}\Big\}$. Очевидно, что $\boldsymbol{q}(\mathfrak{D}) = \sum_{n=0}^{|\mathfrak{D}|} \boldsymbol{q}_n(\mathfrak{D})$.

*Э-сет-предпочтение* определяет *вероятностный сет-выбор* разумом любых подмножеств событий-решений $D$ из множества $\mathfrak{D}$. *Э-пусто-предпочтение* определяет *вероятностный сет-выбор* разумом *пустого множества* событий-решений из множества $\mathfrak{D}$, иначе говоря, определяет *вероятность бездействия разума* в рамках

множества событий-решений $\mathfrak{D}$. *Э-моно-предпочтение* и *Э-дуплет-предпочтение* определяют *вероятностный сет-выбор* разумом соответственно *моноплетов и дуплетов* событий-решений из множества $\mathfrak{D}$.

## 15.4 Основное эвентологическое предположение теории Э-предпочтений

Теория Э-сет-предпочтений основана на оригинальном эвентологическом предположении, что моно-предпочтения разума, выбирающего только одно событие из множества событий $\mathfrak{X}$, определяются не вероятностями «моно-событий» $x \in \mathfrak{X}$, иначе говоря, не набором вероятностей[6] $\Big\{\mathbf{P}(x),\ x \in \mathfrak{X}\Big\}$, а вероятностями «моно-террасок»

$$\mathrm{ter}(\{x\}) = x \cap \left( \bigcap_{y \in \mathfrak{X} - \{x\}} y^c \right), \quad x \in \mathfrak{X},$$

порождаемых множеством событий $\mathfrak{X}$, т.е. набором вероятностей

$$\Big\{\mathbf{P}\big(\mathrm{ter}(\{x\})\big),\ x \in \mathfrak{X}\Big\}.$$

Эти два набора вероятностей начинают совпадать, как только события $x \in \mathfrak{X}$ образуют непересекающуюся структуру, так как тогда $x = \mathrm{ter}(\{x\}), \quad x \in \mathfrak{X}$. Однако в ситуации множества событий $\mathfrak{X}$, обладающего произвольной структурой зависимостей событий, данные два набора вероятностей могут быть совершенно различными:

$$\Big\{\mathbf{P}(x),\ x \in \mathfrak{X}\Big\} \neq \Big\{\mathbf{P}\big(\mathrm{ter}(\{x\})\big),\ x \in \mathfrak{X}\Big\}.$$

Например, для любого набора вероятностей событий $x \in \mathfrak{X}$ существует такая структура зависимостей событий, что $\mathbf{P}\big(\mathrm{ter}(\{x\})\big) = 0, \quad x \in \mathfrak{X}$. В теории Э-предпочтений это означает полное отсутствие моно-выбора: делая такой сет-выбор, разум никогда не выбирает события $x \in \mathfrak{X}$ по отдельности, а всегда — вкупе с другими событиями из $\mathfrak{X}$.

[6] Как это обычно предполагается в классической теории предпочтений.

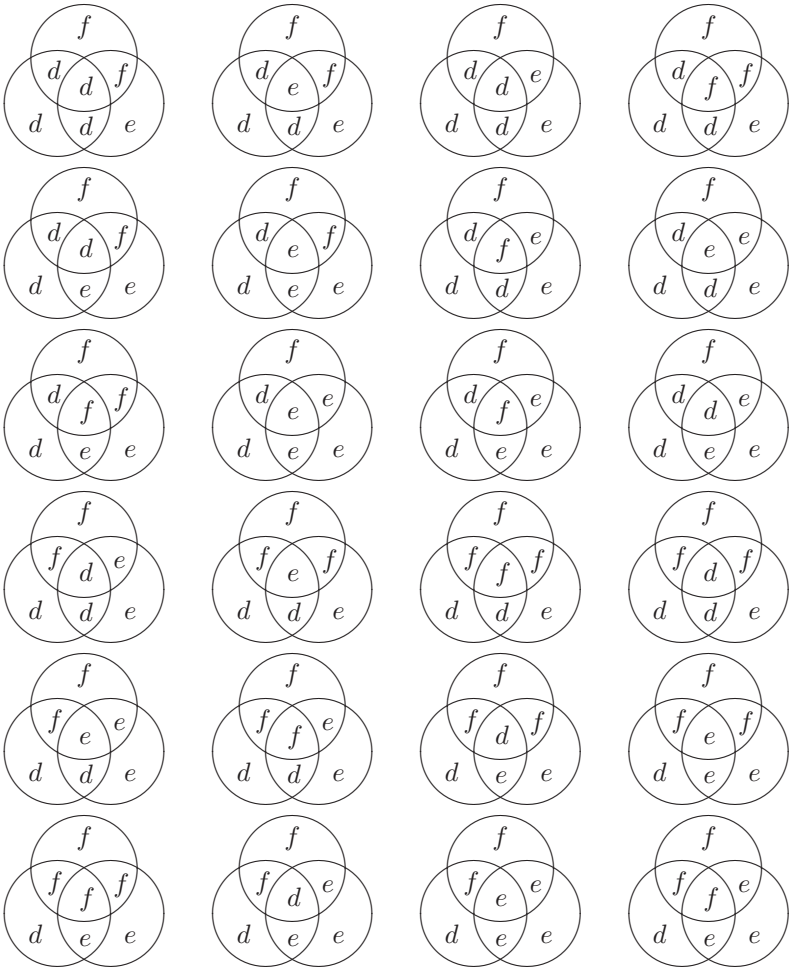



Рис. 15.2. Все двадцать четыре сет-предпочтения одного события-решения из множества событий-решений $D \subseteq \mathfrak{D}$, которые можно определить на триплете событий-решений $\mathfrak{D} = \{d, e, f\}$. Крайний столбец справа составлен из шести Э-сет-предпочтений, соответствующих структуре сет-предпочтений в парадоксе Блайта «о трёх пирогах». Эти шесть сет-предпочтений соответствуют шести возможным вариантам переименования трёх событий из множества $\mathfrak{D}$.

Основное эвентологическое предположение теории Э-сет-предпочтений в ситуации сет-выбора заключается в том, что выбор $n$ событий, образующих произвольное подмножество $X_n \subseteq \mathfrak{X}$ мощности $n = |X_n|$, определяется не вероятностями событий-террасок — пересечений всех событий из $X_n$:

$$p_{X_n} = \mathbf{P}\Big( \operatorname{ter}_{X_n} \Big) = \mathbf{P}\left( \bigcap_{x \in X_n} x \right),$$

а вероятностями других событий-террасок

$$p(X_n) = \mathbf{P}\Big( \operatorname{ter}(X_n) \Big) = \mathbf{P}\left( \bigcap_{x \in X_n} x \bigcap_{x \in X_n^c} x^c \right),$$

которые интерпретируются как наступление только событий из $X_n$. Таким образом, в общей ситуации основное эвентологическое предположение заменяет набор одних вероятностей $\Big\{ p_{X_n}, X_n \subseteq \mathfrak{X} \Big\}$ на набор других вероятностей: $\Big\{ p(X_n), X_n \subseteq \mathfrak{X} \Big\}$.

Конечно, смысл и значение основного эвентологического предположения теории Э-сет-предпочтений не сводятся всего лишь к формальной замене одного набора вероятностей другим. Данное типично эвентологическое предположение позволяет наглядно объяснить парадокс Блайта. Этот факт может означать только одно: эвентологическое предположение, положенное в основу теории Э-сет-предпочтений, по-видимому, адекватнее отражает механизм осуществления разумом сет-выбора, чем предположения, обосновывающие классическую теорию предпочтений.

## 15.5 Заключение

Предложена эвентологическая теория предпочтений, определяющая новое понятие множественного предпочтения (сет-предпочтения), дающая возможность построения моделей предпочтений и учитывающая весь спектр структур зависимостей событий, в частности объясняющая известный парадокс Блайта «о трёх пирогах».

# Глава 16
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Эвентологическая теория принятия решений, теория принятия событийных решений — теория принятия решений, опирающаяся на эвентологические принципы и использующая результаты математической эвентологии [4]; теоретический базис *практической эвентологии* [1, 2, 3]. Предлагаются начала этой теории, возникшие из событийного представления разумного субъекта и его решений в виде Э-распределений множеств событий [5] и опирающиеся на эвентологическую H-теорему [6]. Рассматривается иллюстративный пример принятия разумным субъектом эвентологического решения о собственном событийном поведении на финансовом или фондовом рынке.

## 16.1 Событийные обстоятельства

Разумный субъект принимает решение при определенном стечении событий-обстоятельств, наступление которых порождается его событийным окружением. Разумный субъект смотрит на его событийное окружение через призму множества событий $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}$ , которые он выбрал из алгебры событий $\mathcal{F}$ эвентологического пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Тогда любому стечению событий-обстоятельств в некоторый момент $t \in T$ всегда будет однозначно соответствовать наступление того или иного события-террески $\mathrm{ter}(F_t),\ F_t \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому договоримся называть эти события-террески $\mathrm{ter}(F_t)$ стечениями событий-обстоятельств в момент $t \in T$ относительно множества событий $\mathfrak{F}$,

которое в свою очередь для краткости будем называть множеством событий-обстоятельств.

## 16.2 Событийные решения

Предположим также, что в полном распоряжении разумного субъекта имеется *множество событий-решений* $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{F}$, выбранное им из той же алгебры событий $\mathcal{F}$. Каждое подмножество $D \subseteq \mathfrak{D}$ соответствует тому или иному *множественному событийному решению (Э-сет-решению)* разумного субъекта. Наступления или ненаступления отдельных событий-решений $d \in \mathfrak{D}$, порождаемых выбором разумного субъекта, взаимно-однозначно характеризуют каждое его Э-сет-решение $D \subseteq \mathfrak{D}$. Принятие разумным субъектом Э-сет-решения $D$ означает, что разумный субъект *выбирает* отдельные события-решения $d \in D$ таким образом, что наступают все события-решения из $D$ и ни одного из $D^c = \mathfrak{D} - D$. Разумный субъект *создает* все события-решения из $D$ и ни одного из $D^c = \mathfrak{D} - D$. Иными словами, разумный субъект *создает* одно из событий-террасок $\mathrm{ter}(D), D \subseteq \mathfrak{D}$, порождаемых множеством событий-решений $\mathfrak{D}$.

Выбирая или не выбирая[1] отдельные события-решения $d \in \mathfrak{D}$ в каждый момент $t \in T$, разумный субъект в результате приобретает способность делать *эвентологический выбор* — способность выбирать события-терраски $\mathrm{ter}(D)$, $D \subseteq \mathfrak{D}$ в соответствии с Э-распределением множества событий-решений $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{F}$, т.е. способность принимать Э-сет-решения $D \subseteq \mathfrak{D}$, содержащиеся в $\mathfrak{D}$, в соответствии с Э-распределением этого $\mathfrak{D}$.

## 16.3 Предположение стационарности множеств событий

Для простоты вначале будем предполагать, что множество событий-решений $\mathfrak{D}$ и множество событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$ не зависят от времени. Иначе говоря, предположим стационарность Э-распределений $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{F}$, их неизменность во времени.

[1] В соответствии с тем или иным стечением событий-обстоятельств — событием-террасой $\mathrm{ter}(F_t)$.

## 16.4 Задача принятия эвентологических решений (принятия Э-решений)

*Задача принятия эвентологических решений (принятия Э-решений)* разумным субъектом заключается в выборе такого множества событий-решений $\mathfrak{D}$, Э-распределение которого представляет *наибольшую ценность* с точки зрения этого разумного субъекта. Способность разумного субъекта выбирать множество событий-решений $\mathfrak{D}$ с тем или иным Э-распределением эквивалентна его способности *эвентологически (событийно-вероятностно) выбирать* Э-сет-решение $D \subseteq \mathfrak{D}$, т.е. *эвентологически выбирать* способ собственного событийного поведения в рамках множества событий-решений $\mathfrak{D}$ — способ, который является его событийным ответом на вызов стечения событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$, порожденных его событийным окружением.

### 16.4.1 Выбор событий-решений

Выбор разумным субъектом события-решения $d \in \mathfrak{D}$ при стечении событий-обстоятельств $\mathrm{ter}(F)$ эвентологически фиксируется специальной индикаторной функцией двух аргументов: события-решения $d$ и события-терраски $\mathrm{ter}(F)$, которая определяется на $\mathfrak{D} \times \mathcal{F}$ через дзета-функцию[2] $\zeta$:

$$\mathbf{1}_d(\mathrm{ter}(F)) = \zeta\big(\mathrm{ter}(F), d\big) = \begin{cases} 1, & \mathrm{ter}(F) \subseteq d, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Для любой пары $(d, F) \in \mathfrak{D} \times 2^{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{D} \times \mathcal{F}$ будем сокращенно обозначать

$$\mathbf{1}_d(F) = \mathbf{1}_d(\mathrm{ter}(F)).$$

Сохраним это обозначение $\mathbf{1}_d(F)$ также и для так называемой сет-индикаторной функции

$$\mathbf{1}_d(F) = \begin{cases} \Omega, & \mathrm{ter}(F) \subseteq d, \\ \emptyset, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

[2] Дзета-функция Римана, определённая на $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

надеясь, что контекст, в котором она будет употребляться, поможет избежать недоразумений.

Только что введенная сет-индикаторная функция позволяет сформировать каждое событие-решение $d \in \mathfrak{D}$ из событий-террасок $\mathrm{ter}(F)$, $F \subseteq \mathfrak{F}$ формулой

$$d = \sum_{F \subseteq \mathfrak{F}} \mathrm{ter}(F) \cap \mathbf{1}_d(F), \tag{1}$$

которая может быть эквивалентным образом записана при помощи индикаторной функции, правда, в более громоздком виде:

$$d = \sum_{F\colon\ \mathbf{1}_d(F)>0} \mathrm{ter}(F). \tag{1'}$$

*Замечание 1.* Формулы (1) и (1′) определяют каждое событие-решение $d \in \mathfrak{D}$ как объединение того или иного множества событий-террасок $\mathrm{ter}(F)$. Иначе говоря, события-решения $d \in \mathfrak{D}$ оказываются «сложенными» из событий-террасок $\mathrm{ter}(F)$, порожденных множеством событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$, таким образом, что каждое событие-терраска $\mathrm{ter}(F)$ либо полностью содержится в событии-решении $d$, либо не пересекается с ним. Этот факт позволяет ввести еще одну индикаторную функцию:

$$\mathbf{1}_D(\mathrm{ter}(F)) = \zeta\big(\mathrm{ter}(F), \mathrm{ter}(D)\big) = \begin{cases} 1, & \mathrm{ter}(F) \subseteq \mathrm{ter}(D), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

которую сокращенно будем обозначать

$$\mathbf{1}_D(F) = \mathbf{1}_D(\mathrm{ter}(F)),$$

надеясь, что это все еще не вызовет недоразумений.

Если воспользоваться более правильной, но громоздкой записью

$$\mathbf{1}_D(\mathrm{ter}(F)) = \mathbf{1}_{\mathrm{ter}(D)}(\mathrm{ter}(F)),$$

то индикаторную функцию $\mathbf{1}_D(F)$ можно рассматривать как своеобразное обобщение $\mathbf{1}_d(F)$. Эти функции связаны соотношением:

$$\mathbf{1}_d(F) = \sum_{\mathrm{ter}(D) \subseteq d} \mathbf{1}_{\mathrm{ter}(D)}(\mathrm{ter}(F)) = \sum_{d \in D} \mathbf{1}_D(F),$$

в силу того, что

$$\{\mathrm{ter}(D) \subseteq d\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{d \in D\}.$$

*Замечание 2*. Формулы (1) и (1') определяют множество событий-решений $\mathfrak{D}$ через множество событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$. Обратное возможно, когда между множеством непустых событий-террасок $\mathrm{ter}(D)$, $D \subseteq \mathfrak{D}$ и множеством непустых событий-террасок $\mathrm{ter}(F),\ F \subseteq \mathfrak{F}$, существует взаимно-однозначное соответствие.

### 16.4.2 Эвентологический выбор

Выбор разумным субъектом событий-решений, которые все вместе образуют множество $\mathfrak{D}$, дают ему возможность эвентологического выбора произвольного Э-сет-решения $D \subseteq \mathfrak{D}$, которое взаимно-однозначно интерпретируется как *создание* разумным субъектом события-терраски

$$\mathrm{ter}(D) = \bigcap_{d \in D} d \bigcap_{d \in D^c} d^c,$$

где события-решения $d \in \mathfrak{D}$ определяются формулами (1) или (1') в полном соответствии с эвентологическим выбором разумного субъекта.

Обозначим

$$\boldsymbol{p} = \Big\{ p(F) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(F)),\ F \subseteq \mathfrak{F} \Big\}$$

Э-распределение множества событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$. Тогда Э-распределение множества событий-решений $\mathfrak{D}$

$$\boldsymbol{q} = \Big\{ q(D) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(D)),\ D \subseteq \mathfrak{D} \Big\}$$

связано с Э-распределением $\boldsymbol{p}$ формулами:

$$q(D) = \sum_{F \subseteq \mathfrak{F}} p(F) \mathbf{1}_D(F), \quad D \subseteq \mathfrak{D}, \tag{2}$$

которые позволяют говорить о том, что разумный субъект (выбирая отдельные события-решения $d \in \mathfrak{D}$, иначе говоря, выбирая то или иное сет-решение $D \subseteq \mathfrak{D}$) демонстрирует способность эвентологического выбора решений, дающего ответ на вызов Э-распределения множества событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$.

## 16.5 Методы принятия Э-решений

### 16.5.1 Ценность со-бытия

*Ценность со-бытия* [4] — одно из существенных свойств со-бытия разумного субъекта; предрасположенность события иметь значимость, быть важным для разумного субъекта; то, что присуще событию, составляет его конкретное существование — без ценности событие существовать не может; характеризует степень ценности для разума со-быть — воспринять и/или создать событие, как исход бытия; раскрывает ценность дуального со-бытия в понятиях ценность восприятия и ценность создания события разумным субъектом; отражает два противоположных основополагающих отношения разума и бытия; лежит в основе эвентологических закономерностей, описывающих природу объективной и субъективной неопределённости; математически связана с колмогоровской вероятностью соотношениями *ценность* $\sim$ *вероятность* [4].

### 16.5.2 Принцип наибольшей ценности

Возьмем на себя смелость утверждать, что основой *эвентологического выбора* служит то, что можно назвать *принципом наибольшей ценности*. Иными словами, совершая свой *эвентологический выбор*, разумный субъект исходит из того, что событийный итог его выбора должен обладать *наибольшей ценностью* с его точки зрения. При этом смысл *наибольшей ценности* эвентологического выбора в деталях уточнять нет необходимости: разумный субъект сам определяет его для себя.

### 16.5.3 Матрица совместного распределения $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{F}$

Рассмотрим матрицу совместного Э-распределения множества событий-решений $\mathfrak{D}$ и множества событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$:

$$\|\pi(D,F)\| = \Big\{\pi(D,F), \quad D \subseteq \mathfrak{D},\ F \subseteq \mathfrak{F}\Big\},$$

где

$$\pi(D,F) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}(D) \cap \mathrm{ter}(F))$$

есть вероятность совместного наступления соответствующих событий-террасок.

### 16.5.4 Наиболее ценные условные Э-распределения $\mathfrak{D}$

Для каждого события-террасы $\mathrm{ter}(F)$, вероятность которого положительна: $p(F) > 0$, определены условные вероятности

$$q(D|F) = \mathbf{P}\left(\mathrm{ter}(D) \;\middle|\; \mathrm{ter}(F)\right) = \frac{\pi(D,F)}{p(F)}$$

выбора разумным субъектом Э-сет-решения $D \subseteq \mathfrak{D}$ при стечении событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$. Условные Э-распределения

$$\big\{q(D|F), \quad D \subseteq \mathfrak{D}\big\}, \quad F \subseteq \mathfrak{F} \qquad (\star)$$

— это и есть те самые *наиболее ценные для разумного субъекта Э-распределения*, которые формируются[3] им, когда он эвентологически выбирает Э-сет-решения $D \subseteq \mathfrak{D}$, отвечая на стечение событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$. Обозначим

$$\|q(D|F)\| = \Big\{q(D|F), \quad D \subseteq \mathfrak{D},\ F \subseteq \mathfrak{F}\Big\}$$

— матрицу условных вероятностей Э-сет-решений $D \subseteq \mathfrak{D}$ при событиях-обстоятельствах $F \subseteq \mathfrak{F}$, строками которой служат наиболее ценные для разумного субъекта Э-распределения $(\star)$.

Каждый из нас имеет более или менее достаточный опыт принятия наиболее ценных для нас Э-решений, отвечающих на вызов повседневных событий-обстоятельств. Воспользуемся этим опытом для конструирования двух методов принятия Э-решений, которые любой разумный субъект вполне может применить в своей событийной практике.

### 16.5.5 Первый метод

Предположим известной матрицу

$$\|\mathrm{val}(d,F)\| = \big\{\mathrm{val}(d,F),\ (d,F) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{F}\big\},$$

составленную из значений вещественной функции $\mathrm{val} : \mathfrak{D} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$, которые интерпретируются как *степень ценности* для разумного

[3] На основе принципа наибольшей ценности.

субъекта эвентологического выбора события-решения $d \in \mathfrak{D}$ при стечении событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$. При этом положительные значения val интерпретируются как *степени ценности исхода*, а отрицательные — как *степени отсутствия ценности исхода* для разумного субъекта.

Тогда событие-решение $d \in \mathfrak{D}$ может выбираться разумным субъектом при стечениях событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$, для которых $\mathrm{val}(d, F) > 0$. Иначе говоря, события-решения складываются из соответствующих событий-террасок $\mathrm{ter}(F)$, для которых $\mathrm{val}(d, F) > 0$, и поэтому определяются формулами:

$$d = \sum_{F:\ \mathrm{val}(d,F)>0} \mathrm{ter}(F), \quad d \in \mathfrak{D}.$$

Обозначим

$$D_F = \{d :\ \mathrm{val}(d, F) > 0\} \subseteq \mathfrak{D}$$

— множество событий-решений, для которых val положительна при данном стечении событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда условное Э-распределение всего множества событий-решений $\mathfrak{D}$ при стечении событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$ — это вырожденное Э-распределение

$$q(D|F) = \delta(D, D_F) = \begin{cases} 1, & D = D_F, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (\circ)$$

где $\delta$ — *дельта-функция*, или *символ Кронекера*[4].

### 16.5.6 Второй метод

Для каждого множества событий-решений $D \subseteq \mathfrak{D}$ и каждого стечения событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$ определим значение функции val по формулам

$$\mathrm{val}(D, F) = \sum_{d \in D} \mathrm{val}(d, F),$$

[4] *Кронекер, Леопольд (нем. Kronecker, Leopold, 1823–1891)* — немецкий математик. Основные труды по алгебре и теории чисел. Сторонник «арифметизации» математики, которая по его мнению, должна быть сведена к арифметике целых чисел; только последняя, как он утверждал, обладает подлинной реальностью.

которые вместе взятые образуют матрицу

$$\|\mathrm{val}(D,F)\| = \big\{\mathrm{val}(D,F)\ :\ (D,F) \in 2^{\mathfrak{D}} \times 2^{\mathfrak{F}}\big\}.$$

Обозначим

$$\mathrm{val}(F) = \sum_{F:\ \mathrm{val}(D,F)>0} \mathrm{val}(D,F)$$

— сумму всех положительных значений функции $\mathrm{val}(D,F)$ для данного $F \subseteq \mathfrak{F}$. Определим теперь для каждого $F \subseteq \mathfrak{F}$ условное Э-распределение $q(D|F)$ следующим образом: при $\mathrm{val}(F) = 0$ — формулой:

$$q(D|F) = \begin{cases} 1, & D = \emptyset, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (\circ\circ)$$

а при $\mathrm{val}(F) > 0$ — формулой:

$$q(D|F) = \begin{cases} \mathrm{val}(D,F)/\mathrm{val}(F), & \mathrm{val}(D,F) > 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \qquad (\circ\circ')$$

Таким образом, второй метод в отличие от первого предлагает описывать Э-поведение разумного субъекта при каждом стечении событий-обстоятельств как невырожденное условное Э-распределение. Иначе говоря, второй метод рассматривает более общую ситуацию и предлагает такой способ эвентологического выбора разумного субъекта, когда при каждом стечении событий-обстоятельств разумный субъект выбирает свое Э-поведение так, как ему «подсказывает» условное Э-распределение общего характера. При этом собственное Э-распределение разумного субъекта, определяющее его эвентологический выбор в рамках множества событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$, задается формулами полной вероятности

$$q(D) = \sum_{F \subseteq \mathfrak{F}} q(D|F)p(F), \quad D \subseteq \mathfrak{D}.$$

### 16.5.7 Метод, основанный на эвентологической H-теореме [5]

[5] *Boltzmann, Ludwig Eduard* (1844–1906) was the great Austrian physicist famous for his founding contributions in the fields of statistical mechanics and statistical

## 16.6 Пример принятия Э-решений

Рассмотрим ситуацию, когда разумный субъект принимает Э-решения о своем поведении на финансовом или фондовом рынке, например, в рамках торгов на валютной или фондовой бирже. Свои Э-решения разумный субъект принимает на основе исторической Э-статистики $\{\mathrm{ter}(F_t) : \ t \in T\}$ о конечном множестве событий-обстоятельств $\mathfrak{F}$. Эти избранные самим разумным субъектом события-обстоятельства наступали или не наступали в моменты времени $t \in T$, образовавшие конечное множество $T$ за некоторый период, предшествующий моменту принятия Э-решения.

Одни события-обстоятельства из множества $\mathfrak{F}$ порождаются техническими, другие — фундаментальными характеристиками торгов и называются *техническими* или *фундаментальными событиями-обстоятельствами* соответственно.

### 16.6.1 Технические события-обстоятельства

Обозначим $\{a_t, \quad t \in T\}$ — множество котировок акций одного вида или курса одной валюты по отношению к другой, а $\{b_t, \quad t \in T\}$ — множество объемов их продаж в соответствующие моменты времени $t \in T$. Обозначим также

$$\{a_t^{(1)}, \quad t \in T\}, \quad \{a_t^{(2)}, \quad t \in T\},$$

$$\{b_t^{(1)}, \quad t \in T\}, \quad \{b_t^{(2)}, \quad t \in T\}$$

— соответствующие «скользящие средние» котировок и объемов продаж соответственно за $n_1 + 1$ и $n_2 + 1$ предшествующих моментов времени:

$$a_t^{(1)} = \frac{1}{n_1 + 1} \sum_{\tau=t-n_1}^{t} a_\tau, \quad a_t^{(2)} = \frac{1}{n_2 + 1} \sum_{\tau=t-n_2}^{t} a_\tau,$$

$$b_t^{(1)} = \frac{1}{n_1 + 1} \sum_{\tau=t-n_1}^{t} b_\tau, \quad b_t^{(2)} = \frac{1}{n_2 + 1} \sum_{\tau=t-n_2}^{t} b_\tau.$$

thermodynamics; he first stated the logarithmic connection between entropy and probability in his kinetic theory of gases; he stated his famous H-theorem, theoretical basis of the second law of thermodynamics.

На основе этих технических характеристик торгов можно определить три технических события-обстоятельства:

$$f^{(1)} = \left\{ a_t \geqslant a_t^{(1)} \right\},\ f^{(2)} = \left\{ a_t \geqslant a_t^{(2)} \right\},\ f^{(3)} = \left\{ a_t^{(1)} \geqslant a_t^{(2)} \right\}.$$

### 16.6.2 Фундаментальные события-обстоятельства

Фундаментальные события-обстоятельства определяются в данном примере следующим образом:

$$f^{(4)} = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}^{(4)}} f, \quad f^{(5)} = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}^{(5)}} f, \quad f^{(6)} = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}^{(4)}} f.$$

Каждое из этих трех событий-обстоятельств соответствует наступлению *хотя бы одного*[6] события-обстоятельства $f \in \mathfrak{F}^{(i)}$ из множества событий[7] $\mathfrak{F}^{(i)}$, $i = 4, 5, 6$, наступающих в трех соответствующих сферах общества — *экономической, политической и социальной* и *наиболее ценных для повышения котировки* рассматриваемого финансового инструмента.

### 16.6.3 Множество событий-обстоятельств

Множество событий-обстоятельств в примере составлено разумным субъектом из шести событий-обстоятельств:

$$\mathfrak{F} = \left\{ f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)} \right\},$$

среди которых три технических: $f^{(1)}, f^{(2)}$ и $f^{(3)}$ — и три фундаментальных: $f^{(4)}, f^{(5)}$ и $f^{(6)}$. Таким образом, для принятия Э-решений разумный субъект собирается анализировать события-обстоятельства на валютном или фондовом рынке через «призму» избранного им секстета событий $\mathfrak{F}$. Иначе говоря, разумный субъект собирается

[6] Логическое высказывание «наступление хотя бы одного события» соответствует сет-операции «объединения событий», которую здесь надо рассматривать лишь как популярный, но весьма частный вариант произвольной сет-операции, также вполне допустимой для определения событий-обстоятельств в задаче принятия Э-решений.

[7] *Экономические, политические и социальные события-обстоятельства*, формирующие множества $\mathfrak{F}^{(i)}$, $i = 4, 5, 6$, должны быть определены и выбраны самим разумным субъектом до того, как он начнет принимать свои Э-решения.

принимать во внимание только $64 = 2^6$ вариантов стечения событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$, или, что то же самое, — наступление 64-х соответствующих событий-террасок:

$$\mathrm{ter}(F) = \bigcap_{f \in F} f \bigcap_{f \in F^c} f^c, \quad F \subseteq \mathfrak{F},$$

где $f^c = \Omega - f$ — дополнение события-обстоятельства $f$ до $\Omega$, а $F^c = \mathfrak{F} - F$ — дополнение множества событий-обстоятельств $F$ до $\mathfrak{F}$.

### 16.6.4 Множество событий-решений

Множество событий-решений разумного субъекта в рассматриваемом примере, где он принимает Э-решения на валютном или фондовом рынке, состоит из двух событий-решений: $\mathfrak{D} = \{d^+, d^-\}$, где

$$d^+ = \{\text{продажа финансового инструмента}\},$$

$$d^- = \{\text{покупка финансового инструмента}\}.$$

Дуплет событий-решений $\mathfrak{D}$ в произвольной ситуации разбивает пространство э-событий $\Omega$ на $4 = 2^2$ события-террасы, которые в общем виде записываются обычным образом:

$$\mathrm{ter}(D) = \bigcap_{d \in D} d \bigcap_{d \in D^c} d^c, \quad D \subseteq \mathfrak{D}.$$

Эти события-террасы нетрудно выписать в виде пересечения двух событий, а также привести их очевидную интерпретацию:

- $\mathrm{ter}(\emptyset) = (d^+)^c \cap (d^-)^c$ — «ничего не делать»,
- $\mathrm{ter}(\{d^+\}) = d^+ \cap (d^-)^c$ — «только продавать»,
- $\mathrm{ter}(\{d^-\}) = (d^+)^c \cap d^-$ — «только покупать»,
- $\mathrm{ter}(\{d^+, d^-\}) = d^+ \cap d^-$ — «продавать и покупать».

Интерпретация события-террасы $\mathrm{ter}(\{d^+, d^-\})$ «продавать и покупать» может, например, означать, что разумный субъект часть своих финансовых инструментов продает, а часть покупает.

Если же такое невозможно, то надо предположить, что события-решения не пересекаются, т.е. что

$$\mathrm{ter}(\{d^+, d^-\}) = d^+ \cap d^- = \emptyset.$$

Дуплет непересекающихся событий-решений $\mathfrak{D}$ разбивает пространство э-событий $\Omega$ только на три события-терраски:

- $\mathrm{ter}(\emptyset) = (d^+)^c \cap (d^-)^c$ — «ничего не делать»,
- $\mathrm{ter}(\{d^+\}) = d^+$ — «только продавать»,
- $\mathrm{ter}(\{d^-\}) = d^-$ — «только покупать».

### 16.6.5 Матрица ценностей

Матрицу ценностей для разумного субъекта

$$\|\mathrm{val}(d, F)\| = \big\{\mathrm{val}(d, F),\ (d, F) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{F}\big\}$$

в данном примере предлагается оценивать из исторической статистики $\big\{\,\mathrm{ter}(F_t)\ :\ F_t \subseteq \mathfrak{F}\big\}$. Каждый элемент матрицы статистически оценивается по формуле:

$$\mathrm{val}(d, F) = (-1)^{\delta(d,d^-)} \left( \frac{1}{|T_F|} \sum_{t \in T_F} (a_t - a_{t-1}) \right), \qquad (\odot)$$

где $T_F = \big\{t \in T\ :\ F_t = F\big\} \subseteq T$ — подмножество моментов из $T$, в которые стечение событий-обстоятельств $F_t$ совпадало с $F \subseteq \mathfrak{F}$, а $|T_F|$ — количество таких моментов (мощность подмножества $T_F$).

Дальнейшая оценка условных Э-распределений разумного субъекта проводится либо первым, либо вторым методом, в основу которых положены элементы матрицы степеней ценности, оцененные по формулам $(\odot)$.

### 16.6.6 Первый метод

Каждое событие-решение $d \in \mathfrak{D}$ выбирается разумным субъектом при стечениях событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$, для которых $\mathrm{val}(d, F) > 0$, иначе говоря, определяются формулами:

$$d = \sum_{F:\ \mathrm{val}(d,F)>0} \mathrm{ter}(F), \quad d \in \mathfrak{D}.$$

Пусть

$$D_F = \{d:\ \mathrm{val}(d,F) > 0\} \subseteq \mathfrak{D}$$

— множество всех таких событий-решений, для которых val положительна при данном стечении событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, разумный субъект при данном $F \subseteq \mathfrak{F}$ создает событие-терраску

$$\mathrm{ter}(D_F) = \bigcap_{d\in D_F} d \bigcap_{d\in (D_F)^c} d^c,$$

соответствующее множеству событий-решений $D_F$, т.е. он создает все события-решения из $D_F$ и не создает ни одного события-решения из $(D_F)^c = \mathfrak{D} - D_F$.

### 16.6.7 Второй метод

Для каждого множества событий-решений $D \subseteq \mathfrak{D}$ и каждого стечения событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$ функция val, определенная на $\mathfrak{D} \times 2^{\mathfrak{F}}$, доопределяется на $2^{\mathfrak{D}} \times 2^{\mathfrak{F}}$ по формулам

$$\mathrm{val}(D,F) = \sum_{d\in D} \mathrm{val}(d,F).$$

Эти значения val, взятые все вместе, образуют еще одну расширенную матрицу

$$\|\mathrm{val}(D,F)\| = \big\{\mathrm{val}(D,F)\ :\ (D,F) \in 2^{\mathfrak{D}} \times 2^{\mathfrak{F}}\big\}.$$

Пусть

$$\mathrm{val}_\Sigma(F) = \sum_{F:\ \mathrm{val}(D,F)>0} \mathrm{val}(D,F)$$

— сумма всех положительных значений функции $\mathrm{val}(D,F)$ для данного $F \subseteq \mathfrak{F}$. Теперь для каждого $F \subseteq \mathfrak{F}$ определено условное Э-распределение $q(D|F)$:

- при $\mathrm{val}_\Sigma(F) = 0$, — формулой:

$$q(D|F) = \begin{cases} 1, & D = \emptyset, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \qquad (\circ\circ)$$

- при $\mathrm{val}_{\Sigma}(F) > 0$, — формулой:

$$q(D|F) = \begin{cases} \mathrm{val}(D,F)/\mathrm{val}(F), & \mathrm{val}(D,F) > 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \qquad (\circ\circ')$$

которое обобщает поведение разумного субъекта, рекомендуемое первым методом, указанием для каждого $D \subseteq \mathfrak{D}$ вероятности $q(D|F)$, с которой данное множество событий-решений должно быть создано разумным субъектом (при условии наступления множества событий-обстоятельств $F \subseteq \mathfrak{F}$).

Иначе говоря второй метод предлагает разумному субъекту, если пользоваться терминологией теории игр, не «чистую» (как первый метод), а «смешанную» стратегию поведения, определяемую условным Э-распределением $\{q(D|F), D \subseteq \mathfrak{D}\}$. То, что разумный субъект способен осуществлять *эвентологический выбор*[8] событий-решений в соответствии с условным Э-распределением следует из общих Э-принципов [4, 5].

### 16.6.8 Метод, основанный на эвентологической H-теореме

## 16.7 Заключение

Разумный субъект принимает решение при стечении *множества событий-обстоятельств*, подчиняющегося своему Э-распределению. В распоряжении разумного субъекта как текущий итог его событийного опыта имеется собственное *множество событий-решений* с Э-распределением, которое определяет его эвентологический выбор. Совместное Э-распределение этих двух множеств событий описывает событийное поведение разумного субъекта — принятие им наиболее ценных событийных решений в различных обстоятельствах его со-бытия.

Предлагаемый событийный взгляд на принятие решений, опирающийся на эвентологическую H-теорему [6] — основу эвентологической теории принятия решений, которая унифицирует и расширяет

[8] Часть разумных субъектов не доверяет этой способности своего разума и убеждены, что для эвентологического выбора им не обойтись без «бросания монетки» — и напрасно.

возможности классической теории, позволяя *эвентологически* сравнивать ситуации принятия наиболее ценных событийных решений различными разумными субъектами в различных событийных обстоятельствах.

# Литература


[1] Goldblatt J.J. (2007) *Special Events, Past, Present and Future*, fifth edition. — John Wiley & Sons.

[2] Goldblatt J.J. (1994) *The Dictionary of Event Management.* — John Wiley & Sons.

[3] Goldblatt J.J. (1998) *Dollars & Events.* — John Wiley & Sons.

[4] Воробьёв О.Ю. (2007) *Эвентология.* — Красноярск: Сибирский федеральный университет. — 435 с.

[5] Воробьёв О.Ю. (2008) Эвентологические принципы. — *Труды VII Всерос. ФАМ'2008 конференции. Часть первая (под ред. Олега Воробъёва).* — Красноярск: СФУ, КГТЭИ, ИВМ СО РАН. — С.42–48.

[6] Воробьёв О.Ю. (2008) Эвентологическая H-теорема. — *Труды VII Всерос. ФАМ'2008 конференции. Часть первая (под ред. Олега Воробъёва).* — Красноярск: СФУ, КГТЭИ, ИВМ СО РАН. — С.53–61.


## 16.8 Нечеткость, порождаемая временем

*Нечеткость, порождаемая временем*. Обычно предположение стационарности, скорее, не выполняется, и вместо каждого события-решения $d \in \mathfrak{D}$, вообще говоря, рано или поздно придется рассматривать

$T$-нечеткое событие-решение $\widetilde{d} = \{d_t,\ t \in T\}$, нечеткость которого порождается временем[9]; а вместо множества $\mathfrak{D}$ — множество $T$-нечетких событий-решений $\overset{(\sim)}{\mathfrak{D}} = \{\widetilde{d},\ d \in \mathfrak{D}\}$, понимая под $\mathfrak{D}$ множество уже не событий, а их имен $d \in \mathfrak{D}$. Сказанное относится и к событиям-обстоятельствам $f \in \mathfrak{F}$, вместо которых также придется рассматривать $T$-нечеткие события-обстоятельства $\widetilde{f} = \{f_t,\ t \in T\}$, а вместо $\mathfrak{F}$ — множество $T$-нечетких событий-обстоятельств $\overset{(\sim)}{\mathfrak{F}} = \{\widetilde{f},\ f \in \mathfrak{F}\}$, понимая под $\mathfrak{F}$ множество не событий, а их имен $f \in \mathfrak{F}$.

[9]Здесь впервые возникла необходимость ввести понятие *нечеткости, порождаемой временем*. Таким образом, теперь в эвентологии насчитывается три основных вида нечеткости: *нечеткость событий, порождаемая разумом*, *нечеткость разума, порождаемая событиями*, и *нечеткость того и другого, порождаемая временем*. Скорее всего, в конце концов придется говорить о *нечеткости событий и нечеткости разума, которые порождаются произвольным множеством имен*.

# Глава 17
# ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

Предлагается эвентологический вариант теории игр, позволяющий одновременно решать задачи принятия решений в сложных системах событий и задачи коалиционного дележа в эвентологической игре множества лиц.

## 17.1 Введение

Эвентологические теоретико-игровые методы анализа множеств событий развиваются для построения и обобщения математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Характерной особенностью рассматриваемых систем является то, что они зачастую трудно поддаются формализации. Практический интерес к изучению этой важной задачи обусловлен потенциальными возможностями наиболее полно объяснить структуру зависимостей и взаимодействий событий. В большинстве случаев участники сложных систем играют несколько ролей одновременно, причем данные роли между собой взаимодействуют. На данный момент существует ограниченное количество игровых математических моделей, описывающих игру $N$ лиц, в которой игроки участвуют в конфликте двух сторон и при этом влияют на действия каждого участника конфликта.

В теории игр $N$ лиц основной задачей является задача дележа выигрыша коалиции игроков между ее участниками. Основополож-

никами теории игр фон Нейманом[1] и Моргенштерном[2] сформулировано определение дележа [194]. В теории коалиционных игр наиболее известны три вида дележа: функция Шепли[3], индекс Банзафа[4] и формула Вилкаса[5], причем первые два являются частным случаем формулы Вилкаса. Однако в самой формуле Вилкаса неясно, из каких условий выбирать для каждого игрока распределения, управляющие участием игрока в коалиционной игре.

Основная идея состоит в применении теории множеств событий — эвентологии — для построения эвентологических теоретико-игровых моделей принятия решений в условиях конфликта и для решения задачи дележа на основе его классического определения. Таким образом, объектом исследования являются множества событий и их эвентологические распределения, а методы построения зависимостей и взаимодействий событий представляют собой предмет исследования. Целью является развитие эвентологических теоретико-игровых методов анализа множеств событий, позволяющих одновременно решать задачи принятия решений в сложных системах событий и задачу коалиционного дележа в игре множества лиц.

---

[1] *фон Нейман, Джон; Нейман, Янош Лайош (*нем. *von Neumann, John;* венг. *Neumann, Janos Lajos, 1903–1957)* — выдающийся венгро-немецкий математик и физик. Сделал важный вклад в квантовую физику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику и другие отрасли науки. Наиболее известен как основоположник современной архитектуры компьютеров (*архитектура фон Неймана*), применением теории операторов к квантовой механике (*алгебра фон Неймана*), а также как участник Манхэттенского атомного проекта и как создатель *теории игр* и концепции клеточных автоматов.

[2] *Моргенштерн, Оскар (*нем. *Morgenstern, Oskar, 1902–1977)* — американский экономист немецкого происхождения, один из создателей теории игр (вместе с фон Нейманом).

[3] *Шепли, Ллойд Стауэлл (Shapley, Lloyd Stowell, 1923)* — американский экономист. Основные работы по теории игр и ее экономическим приложениям. Наиболее известен *функцией Шепли*, определяющей дележ выигрыша игры коалиций между участниками коалиции.

[4] *Банзаф Дж. Ф. III (Banzhaf, John F. III)* — известный американский юрист, ученый и изобретатель. Предложил новую математическую технику — *«индекс Банзафа»* — для определения вероятности изменения результата голосования в сложной ситуации, когда каждый избиратель или акционер имеет различное число голосов.

[5] *Вилкас Э.Й. (Vilkas E.J.)* — латвийский математик и экономист. Основные работы по теории игр. Предложил *формулу Вилкаса* для определения дележа выигрыша игры коалиций, обобщающую *функцию Шепли* и *индекс Банзафа*.

## 17.2 Некоторые определения

Ниже кратко приведены необходимые сведения из теории множеств событий и теории игр, дана постановка задачи разработки эвентологических теоретико–игровых методов анализа множеств событий, позволяющих решать задачи принятия решений в условиях конфликта в сложных системах и задачу коалиционного дележа в игре множества лиц.

*Случайным множеством событий под* $\mathfrak{X}$ называется измеримое отображение

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right),$$

где $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ – выделенное конечное множество событий (состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий), $2^{\mathfrak{X}}$ – множество всех подмножеств $\mathfrak{X}$.

*Распределением вероятностей (эвентологическим распределением)* случайного множества событий $K$ называется набор из $2^N$ вероятностей $p(E) = P(K = E), \quad E \in 2^{\mathfrak{X}}$. Пусть $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ — конечное множество игроков. Множество $\mathfrak{X}$ неупорядочено, а индекс введен, только чтобы различать игроков. *Коалицией игроков* называется любое подмножество $E \subseteq \mathfrak{X}$. Функция множеств:

$$v : 2^{\mathfrak{X}} \to \mathbf{R},$$

такая, что $v(\emptyset) = 0$[6], называется *характеристической функцией*. Данная функция определяет выигрыш или ценность $v(E)$ любой коалиции игроков $E \subseteq \mathfrak{X}$.

Рассмотрим игру, которая состоит в образовании и необразовании игроками коалиций. Будем считать, что на $2^{\mathfrak{X}}$ задана характеристическая функция игры $v$. После игры встает вопрос дележа выигрыша коалиции между игроками. Данной проблемой занимались такие классики теории игр, как Нейман, Моргенштерн, Шепли, Банзаф, Вилкас. Ими было введено следующее определение дележа[7].

**Определение 1.** *Дележом (для игры $N$ лиц с характеристической функцией $v$)* называется вектор $\varphi = (\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_N})$, который

[6] Данное условие принято для удобства вычислений.

[7] Приведенные ниже формулы для функции дележа Шепли, индекса Банзафа и значения игры Вилкаса мы приводим уже в эвентологической записи, которая отличается от авторских вариантов, что существенно упрощает сравнение всех трех функций дележа.

удовлетворяет условиям:

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_{x_i} = v(\mathfrak{X}), \tag{1}$$

$$\varphi_{x_i} \geq v(x_i), \quad i = 1, ..., N. \tag{2}$$

1) Шепли определяет функцию дележа – *функцию Шепли* – аксиоматически. *Носителем игры* $v$ называется множество $X$, для которого выполнено условие $v(E) = v(X \cap E), \;\; E \subseteq \mathfrak{X}$.

**A1.** *О носителе игры.* Если $X$ — любой носитель игры, то

$$\sum_{x_i \in X} \varphi_{x_i}[v] = v(X).$$

**A2.** *Линейность.* Для любых игр $u$, $v$ $\varphi[u + v] = \varphi[u] + \varphi[v]$.

Теорема (о функции Шепли). *Существует единственная функция* $\varphi[v]$*, определенная для всех игр и удовлетворяющая аксиомам* $A1$ *и* $A2$

$$\varphi_x[v] = \sum_{E \subseteq \{x\}^c} \frac{1}{NC_{N-1}^{|E|}} \Big( v(E \cup \{x\}) - v(E) \Big), \;\; x \in \mathfrak{X}.$$

2) *Индекс Банзафа* задается формулой

$$\varphi_x[v] = \sum_{E \subseteq \{x\}^c} \frac{1}{2^{N-1}} \Big( v(E \cup \{x\}) - v(E) \Big), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

3) Вилкас определяет *вероятностное значение игры*

$$\varphi_x[v] = \sum_{E \subseteq \{x\}^c} \pi_x(E) \Big( v(E \cup \{x\}) - v(E) \Big), \quad x \in \mathfrak{X},$$

обобщающее функцию Шепли и индекс Банзафа.

Постановка задачи. Ставится задача разработки эвентологических теоретико–игровых методов анализа множеств событий, позволяющих решать задачи принятия решений в сложных системах и задачу коалиционного дележа в игре $N$ лиц.

Предполагается, что система — это конечное множество событий. Рассматривается конфликт двух множеств событий. Необходимо эвентологически обосновать и применить методы теории игр для двух игроков к игре двух коалиций событий, а также исследовать возможность использования решений этой игры в решении эвентологической задачи дележа теории игр.

В теории кооперативных игр обычно считается, что изначально задана характеристическая функция игры и необходимо решить задачу дележа выигрыша между игроками, вступающими в коалиции. Рассуждения о дележе в большинстве случаев проводились с точки зрения отдельного игрока: каким образом он участвует в образовании коалиций. Определение дележа Неймана-Моргенштерна конкретизировало свойства функций, с помощью которых определялся средний выигрыш отдельного игрока от его участия в образовании и необразовании коалиций. Поэтому необходимо определить игру случайной коалиции событий, где событие заключается в образовании игроками коалиций, и решить задачу распределения выигрыша случайной коалиции событий между игроками коалиции, на основе классического определения дележа теории игр (дележа по Нейману–Моргенштерну).

## 17.3 Теоретико-игровые методы анализа случайных множеств событий

Разрабатываются теоретико-игровые методы анализа случайных множеств событий; решается задача распределения выигрыша случайной коалиции событий между ее участниками.

Случайные коалиции событий как псевдоигроки и игровые модели их поведения. Введем следующее определение.

**Определение 2.** *Случайной коалицией событий* $K$ называется случайное конечное множество событий $K$ под $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — конечное множество игроков.

Рассмотрим конечное множество игроков $\mathfrak{X} = \{x_i, i = 1, \ldots, n\}$, принимающих решение, на примере коллектива музыкантов. Музыканты имеют возможность выступать в ресторане и в метро, причем в любом составе. Таким образом, в ресторане может выступать любое множество музыкантов $X \in 2^{\mathfrak{X}}$, а в метро может выступать

любое множество музыкантов $Y \in 2^{\mathfrak{X}}$. Если в ресторане выступает множество музыкантов $X$, то это означает, что произошло событие: «множество музыкантов $X$ приняло решение играть в ресторане». Аналогично, если в метро выступает множество музыкантов $Y$, то это означает, что произошло событие:«множество музыкантов $Y$ приняло решение играть в метро». Поскольку $X$ — произвольное подмножество множества $\mathfrak{X}$ и может принимать любое значение из $2^{\mathfrak{X}}$, то выступление музыкантов в ресторане можно описать случайной коалицией событий $\mathcal{K}_1$, заданной под $\mathfrak{X}$. С помощью случайной коалиции событий $\mathcal{K}_2$, заданной под $\mathfrak{X}$, будем описывать выступление музыкантов в метро. Каждый игрок – музыкант может принимать участие как в коалиции $\mathcal{K}_1$, так и коалиции $\mathcal{K}_2$. В результате у каждого игрока имеется 4 исхода $(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)$. Например, исход $(0,1)$ означает, что игрок играет в метро и не играет в ресторане. После того как каждый игрок выбрал одну из четырех альтернатив, получаем, что случайная коалиция $\mathcal{K}_1$ приняла значение $X$, а случайная коалиция $\mathcal{K}_2$ приняла значение $Y$.

**Определение 3.** *Псевдоигроком* называется субъект, который не может самостоятельно принимать решения (выбирать свои стратегии), за него это делают игроки, принимающие решение.

Исходя из определения, случайные коалиции $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ являются псевдоигроками, а множество $2^{\mathfrak{X}}$ является множеством чистых стратегий каждого из псевдоигроков.

**Определение 4.** *Игрой двух случайных коалиций* $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ событий будем называть следующий набор $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, 2^{\mathfrak{X}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$, где $\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2$ — функции полезности (выигрыша) коалиций $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ соответственно.

Рассматриваемые функции множеств заданы на декартовом произведении $2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ и представлены в виде матриц.

**Определение 5.** *Смешанной стратегией псевдоигрока* $\mathcal{K}_1$ $(\mathcal{K}_2)$ назовем распределение $p(X) = \mathbf{P}(\mathcal{K}_1 = X)$ $(q(X) = \mathbf{P}(\mathcal{K}_2 = X))$, $X \subseteq \mathfrak{X}$.

Независимое поведение псевдоигроков. Предположим, что при выборе альтернативы каждый игрок $x_i$ принимает решение о выступлении в метро независимо от того, какое решение он принял относительно ресторана. Таким образом, псевдоигроки ведут себя независимо.

**Определение 6.** *Ситуацией равновесия* называется пара рас-

пределений (смешанных стратегий псевдоигроков $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$) $(p^*, q^*)$, если выполнены условия
для любого $\boldsymbol{p} = \{p(X),\ \ X \in 2^{\mathfrak{X}}\}$,

$$\sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}}\sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}} g_1(X,Y)p^*(X)q^*(Y) \geq \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}}\sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}} g_1(X,Y)p(X)q^*(Y), \quad (3)$$

для любого $\boldsymbol{q} = \{q(Y),\ \ Y \in 2^{\mathfrak{X}}\}$

$$\sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}}\sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}} g_2(X,Y)p^*(X)q^*(Y) \geq \sum_{X\in 2^{\mathfrak{X}}}\sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}} g_2(X,Y)p^*(X)q(Y). \quad (4)$$

Рассматриваемая ситуация равновесия носит название *равновесие по Нэшу*[8]. Далее сформулирована и доказана теорема о существовании ситуации равновесия в смешанных стратегиях для рассмотренной игры двух случайных коалиций событий.

**Теорема 1.** *Для любой игры* $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, 2^{\mathfrak{X}}, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2)$ *существуют такие случайные коалиции* $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *с распределениями*

$$\boldsymbol{p}^*_{\mathcal{K}_1} = \left\{p_{\mathcal{K}_1}(E) :\ E \in 2^{\mathfrak{X}}\right\}, \quad \boldsymbol{q}^*_{\mathcal{K}_2} = \left\{q_{\mathcal{K}_2}(E) :\ E \in 2^{\mathfrak{X}}\right\}, \quad (5)$$

*что выполняются соотношения (3) и (4).*

Нахождение ситуаций равновесия $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ осуществляется с помощью алгоритма Лемке – Хоусона.

Совместное поведение псевдоигроков. Предположим, что при выборе альтернативы каждый игрок $x_i$ принимает решение о выступлении в метро в зависимости от того, какое решение он принял относительно ресторана. Таким образом, псевдоигроки ведут себя зависимо. Следовательно, необходимо вести речь о совместном поведении псевдоигроков (хотя независимое поведение является частным случаем совместного).

**Определение 7.** Говорят, что $p^*(X,Y) = \mathbf{P}(\mathcal{K}_1 = X, \mathcal{K}_2 = Y)$ *есть равновесие в совместных смешанных стратегиях*, если выполнены следующие неравенства: для любых $X, E \in 2^{\mathfrak{X}} = S_{\mathcal{K}_1}$

$$\sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}} g_1(X,Y)p^*(X,Y) \geq \sum_{Y\in 2^{\mathfrak{X}}} g_1(E,Y)p^*(X,Y), \quad (6)$$

[8] *Нэш, Джон Форбс, младший (*англ. *Nash, John Forbes, Jr., 1928)* — выдающийся американский математик и экономист. Основные труды в области теории игр и дифференциальной геометрии. Наиболее известен определением «равновесия по Нэшу». Лауреат Нобелевской премии по экономике (1994) «за анализ равновесия в теории некоалиционных игр».

для любых $Y, E \in 2^{\mathfrak{X}} = S_{\mathcal{K}_2}$

$$\sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} g_2(X,Y)p^*(X,Y) \geq \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} g_2(X,E)p^*(X,Y). \qquad (7)$$

Один из наиболее простых путей получения преимуществ от корреляции индивидуальных стратегий состоит в том, чтобы найти все ситуации равновесия в случае независимого поведения псевдоигроков и брать их выпуклые комбинации.

Случайные коалиции событий как игроки и игровые модели их поведения. Рассмотрим конечное множество товаров $\mathfrak{X} = \{x_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$, имеющихся на рынке. На этом же рынке будем следить в течение некоторого периода времени за продажами одного магазина. В различные моменты времени магазин может предлагать для продажи различные подмножества товаров $X \subseteq \mathfrak{X}$, тем не менее, в каждый момент времени мы можем указать множество товаров, выставленных на продажу. Таким образом, предложение магазина будем описывать случайной коалицией событий $\mathcal{K}_1$, где выражение $\mathcal{K}_1 = X$ означает, что произошло событие: «магазин предложил для продажи множество товаров X». Назовем случайную коалицию событий $\mathcal{K}_1$ случайным продавцом. Вторым интересующим нас объектом будет покупатель, который делает покупки в рассматриваемом нами магазине. Будем наблюдать за ним в течение того же периода времени. Причем каждый раз при походе в магазин покупатель может желать купить любое подмножество товаров $Y \subseteq \mathfrak{X}$, но в каждый момент времени мы можем указать множество товаров, которое хочет купить покупатель. Следовательно, желание покупателя будем описывать случайной коалицией событий $\mathcal{K}_2$, где выражение $\mathcal{K}_2 = Y$ означает, что произошло событие: «покупатель пожелал купить множество товаров Y». Назовем случайную коалицию событий $\mathcal{K}_2$ случайным покупателем. Случайные продавец и покупатель являются игроками, которые сами могут выбирать любую свою чистую стратегию, то есть любое подмножество из $2^{\mathfrak{X}}$.

Исходя из определения 3, любой товар $x_i$ из $\mathfrak{X}$ является псевдоигроком, а множество пар $(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)$ является множеством чистых стратегий каждого из псевдоигроков. Например, пара (1,1) для товара $x_i$ означает, что этот товар предложен случайным продавцом для продажи и случайный покупатель пожелал его купить.

После того как случайный продавец и случайный покупатель выбрали свои чистые стратегии $X$ и $Y$ соответственно, у каждого из псевдоигроков $x_i$ однозначно определяется чистая стратегия $(\mathbf{1}_{x_i}(X), \mathbf{1}_{x_i}(Y))$, где

$$\mathbf{1}_{x_i}(Y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in Y; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для определения игры двух случайных коалиций событий необходимо задать следующий набор $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, 2^{\mathfrak{X}}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$, где $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ – функции полезности (выигрыша) коалиций $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ соответственно. Рассматриваемые функции множеств заданы на декартовом произведении $2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ и представлены в виде матриц.

Для задания игры также необходимо указать критерий оптимального поведения игроков. В главе рассмотрим три критерия: равновесие по Нэшу, равновесие в оптимальных смешанных стратегиях и критерий максимина.

Независимое поведение игроков. Предположим, что при выборе альтернативы игрок $\mathcal{K}_1$ принимает решение о продаже множества товаров $X$ независимо от желания игрока $\mathcal{K}_2$. Таким образом, игроки ведут себя независимо.

*Равновесие по Нэшу.* В рассматриваемом случае под *ситуацией равновесия* будем понимать *равновесие по Нэшу*, то есть пару распределений (смешанных стратегий игроков $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$) $(p^*, q^*)$, если выполнены условия (3) и (4). Для рассматриваемой ситуации справедлива теорема 1.

После того как игроки определили свои оптимальные стратегии, для каждого псевдоигрока – товара $x_i$ можно также определить оптимальные стратегии по формулам

$$\tilde{p}_{x_i}(1,1) = \sum_{X \ni x_i} \sum_{Y \ni x_i} p^*(X) q^*(Y), \quad \tilde{p}_{x_i}(0,1) = \sum_{X \not\ni x_i} \sum_{Y \ni x_i} p^*(X) q^*(Y),$$

$$\tilde{p}_{x_i}(0,0) = \sum_{X \not\ni x_i} \sum_{Y \not\ni x_i} p^*(X) q^*(Y), \quad \tilde{p}_{x_i}(1,0) = \sum_{X \ni x_i} \sum_{Y \not\ni x_i} p^*(X) q^*(Y).$$

*Максиминные случайные коалиции событий.* Рассмотрим еще один пример независимого поведения случайных коалиций. Предположим,

что матрицы связаны соотношением для любой ситуации $(X,Y) \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$

$$g_1(X,Y) + g_2(X,Y) \equiv 0.$$

Тогда функция выигрыша случайной коалиции $\mathcal{K}_2$ отличается от $\mathbf{g}_1$ только знаком, поэтому для задания игры достаточно знать только, например, $\mathbf{g}_1$. Далее индекс будем опускать и обозначим $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}$.

**Определение 8**. *(Игра двух случайных коалиций с нулевой суммой). Игрой двух случайных коалиций с нулевой суммой* называется набор объектов $\left(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, 2^{\mathfrak{X}}, \mathbf{g}\right)$, состоящий из двух случайных коалиций $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, матрицы игры $\mathbf{g}$ и множеств чистых стратегий $2^{\mathfrak{X}}$.

Для рассматриваемой игры справедлива

**Теорема 2.** *(О максимине для игры двух случайных коалиций с нулевой суммой). Для любой игры $(\mathcal{K}_1, \boldsymbol{g}, \mathcal{K}_2)$ существуют такие случайные коалиции $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ с распределениями*

$$\boldsymbol{p} = \left\{p(X) : \ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\}, \quad \boldsymbol{q} = \left\{q(Y) : \ Y \in 2^{\mathfrak{X}}\right\}, \tag{8}$$

*что*

$$\max_{\mathcal{K}_1} \min_{\mathcal{K}_2} \mathbf{E}g(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \min_{\mathcal{K}_2} \max_{\mathcal{K}_1} \mathbf{E}g(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2),$$

*где*

$$\mathbf{E}g(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} \sum_{Y \in 2^{\mathfrak{X}}} g(X,Y)p(X)q(Y)$$

*— математическое ожидание выигрыша первой случайной коалиции.*

Иными словами, это математическое ожидание случайной величины $g(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, значениями которой служат соответствующие элементы $g(X,Y)$ матрицы $\mathbf{g}$ с вероятностями

$$p(X)q(Y) = \mathbf{P}(\mathcal{K}_1 = X)\mathbf{P}(\mathcal{K}_2 = Y), \ (X,Y) \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}.$$

В результате, в силу теоремы о максимине для игры двух случайных коалиций с нулевой суммой, существуют оптимальные случайные коалиции $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, обеспечивающие оптимальную игру, любое отклонение от которой приводит к потерям в выигрыше той коалиции, которая ведет себя неоптимальным образом.

Совместное поведение игроков. Предположим, что оптимальное поведение игроков $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ есть равновесие в совместных смешанных стратегиях $p^*(X,Y) = \mathbf{P}(\mathcal{K}_1 = X, \mathcal{K}_2 = Y)$, то есть выполнены неравенства (6) и (7).

В качестве оптимальных стратегий можно рассматривать линейные комбинации эвентологических распределений, найденных с помощью алгоритма Лемке – Хоусона.

После того как игроки определили свои оптимальные стратегии, для каждого псевдоигрока – товара $x_i$ можно также определить оптимальные стратегии по формулам

$$\tilde{p}_{x_i}(1,1) = \sum_{X \ni x_i} \sum_{Y \ni x_i} p^*(X,Y), \quad \tilde{p}_{x_i}(0,1) = \sum_{X \not\ni x_i} \sum_{Y \ni x_i} p^*(X,Y),$$

$$\tilde{p}_{x_i}(0,0) = \sum_{X \not\ni x_i} \sum_{Y \not\ni x_i} p^*(X,Y), \quad \tilde{p}_{x_i}(1,0) = \sum_{X \ni x_i} \sum_{Y \not\ni x_i} p^*(X,Y).$$

Рассмотренные методы позволяют находить два оптимальных, в смысле рассматриваемых критериев, эвентологических распределения. Таким образом, появилась возможность использовать результаты игры двух случайных коалиций в задаче дележа.

Распределение выигрыша между игроками случайной коалиции $\mathcal{K}$. Пусть под множеством игроков $\mathfrak{X}$ задана случайная коалиция событий. Под событием понимается образование коалиции $E \subseteq \mathfrak{X}$, а следовательно и ее дополнения $E^c = \mathfrak{X} \setminus E$.

**Определение 9.** *Проекцией случайной коалиции $\mathcal{K}$ на игрока $x$* называется случайная коалиция игроков (событий) $\mathcal{K}(x)$, заданная под $\mathfrak{X} \setminus \{x\}$, с распределением $\boldsymbol{p}_x = \Big(p_x(E) = P(\mathcal{K}(x) = E), \quad E \subseteq \{x\}^c\Big)$, причем $p_x(E) = p(E) + p(E \cup \{x\})$.

Теперь средний выигрыш игрока $x \in \mathfrak{X}$ будем вычислять по формуле Вилкаса, только будем полагать, что $\pi_x(E) = p_x(E) = p(E) + p(E \cup \{x\})$, и называть *случайно-множественным значением игры для игрока $x$*

$$\varphi_x[v] = \sum_{E \subseteq \{x\}^c} \Big(p(E) + p(E \cup \{x\})\Big) \cdot \Big(v(E \cup \{x\}) - v(E)\Big). \quad (9)$$

Если в кооперативной игре задана характеристическая функция, то в качестве эвентологического распределения для случайной коалиции событий можно брать решения игр двух случайных коалиций событий, поскольку они представляют собой оптимальные эвентологические распределения. Причем каждый игрок $x$ получает выигрыш от участия на стороне как первой, так и второй случайных коалиций. Будем говорить, что распределение случайной коалиции событий удовлетворяет условию дележа (1), если справедлива следующая

**Теорема 3.** *Для того чтобы распределение случайной коалиции событий $\mathcal{K}$, заданной под множеством игроков $\mathfrak{X}$, в игре с характеристической функцией $v(E)$, $E \subseteq \mathfrak{X}$, удовлетворяло условию $\sum_{i=1}^{N} \varphi_{x_i} = v(\mathfrak{X})$, где $\varphi_{x_i}$ рассчитываются по формуле $\varphi_x[v] = \sum_{E \subseteq \{x\}^c} \Big(p(E) + p(E \cup \{x\})\Big) \cdot \Big(v(E \cup \{x\}) - v(E)\Big)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

*для любого фиксированного множества $X \subset \mathfrak{X}$, $1 \leq |X| = m < N$:*

$$(2m - N) \cdot p(X) + \sum_{\substack{E \subset X, \\ |E| = m-1}} p(E) - \sum_{\substack{E \supset X, \\ |E| = m+1}} p(E) = 0,$$

*а если $X = \mathfrak{X}$, то*

$$\sum_{\substack{E \subset \mathfrak{X}, \\ |E| = N-1}} p(E) + N \cdot p(\mathfrak{X}) = 1.$$

**Следствие 1.** *Если распределение случайной коалиции событий удовлетворяет теореме 3, то верно следующее равенство*

$$(2m - N) \cdot \sum_{\substack{E \subset \mathfrak{X}, \\ |E| = m}} p(E) \;+\; (N - m + 1) \cdot \sum_{\substack{E \subset \mathfrak{X}, \\ |E| = m-1}} p(E) \;- \tag{10}$$

$$-\; (m + 1) \cdot \sum_{\substack{E \subseteq \mathfrak{X}, \\ |E| = m+1}} p(E) = 0.$$

Следствие 1 показывает, как связана вероятность трех последовательных слоев $m-1$, $m$ и $m+1$ распределения случайной коалиции событий $\mathcal{K}$, если распределение $\mathcal{K}$ принадлежит классу распределений, для которого выполнены условия теоремы 3.

**Следствие 2**. *Если распределение случайной коалиции событий $\mathcal{K}$ удовлетворяет теореме 3, то выполняется следующее равенство*

$$m \sum_{\substack{E\subseteq\mathfrak{X},\\ |E|=m}} p(E) + (N-m+1) \sum_{\substack{E\subset\mathfrak{X},\\ |E|=m-1}} p(E) = 1.$$

Следствие 2 показывает, как связана вероятность двух последовательных слоев $m$ и $m+1$ распределения случайной коалиции событий $\mathcal{K}$, если распределение $\mathcal{K}$ принадлежит классу распределений, для которого выполнены условия теоремы 3.

Классы случайных коалиций событий для функции Шепли и индекса Банзафа. Класс распределений случайной коалиции $K$, проекции которых на каждого игрока $x \in \mathfrak{X}$ совпадают с распределением в функции Шепли, строится по следующему алгоритму:
1) Необходимо выбрать значения $p_0 = p(\emptyset)$, исходя из условий:

**a)** Если $N = 4*l$, $l = 1, 2, ....$, то выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-2} (-1)^k \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N}{2}-2-k}} \geq p_0 \geq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N}{2}-1-k}};$$

**b)** Если $N = 4*l-1$, $l = 1, 2, ....$, то выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{\frac{N+1}{2}-2} (-1)^k \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N+1}{2}-2-k}} \geq p_0 \geq \sum_{k=0}^{\frac{N+1}{2}-1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N+1}{2}-1-k}};$$

**c)** Если $N = 4*l-2$, $l = 2, 3, ....$, то выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-2} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N}{2}-2-k}} \leq p_0 \leq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N}{2}-1-k}};$$

**d)** Если $N = 4 * l - 3,\ \ l = 2, 3, ....$, то выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{\frac{N+1}{2}-2} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N+1}{2}-2-k}} \leq p_0 \leq \sum_{k=0}^{\frac{N+1}{2}-1} (-1)^{k} \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{\frac{N+1}{2}-1-k}}.$$

2) Вероятности значения $p(E),\ E \subseteq \mathfrak{X}$ вычисляются по следующей формуле

$$p(E) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{m-1-k}} + (-1)^m p_0,\ \ E \subseteq \mathfrak{X},\ \ E \neq \emptyset.$$

Замечания. При $N = 1$ тривиальный случай $1 \geq p_0 \geq 0$. При $N = 2$ получаем $\frac{1}{2} \geq p_0 \geq 0$. Понятно, что в силу того, что в функции Шепли выполнены соотношения

$$\frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{0}} = \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{N-1}} \Longrightarrow p(\emptyset) + p(x) = p(\emptyset^c) + p(x^c),\ \ \forall x \in \mathfrak{X},$$

$$\frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{|E|}} = \frac{1}{N \cdot C_{N-1}^{N-1-|E|}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p(E) + p(E \cup \{x\}) = p(E^c) + p(\Big\{E \cup \{x\}\Big\}^c),\ \ \forall x \in \mathfrak{X},\ \ E \subseteq \mathfrak{X} \setminus \{x\},$$

в качестве свободной переменной вместо $p(\emptyset)$ можно рассматривать $p(\emptyset^c) = p(\mathfrak{X})$ и алгоритм построения распределения случайной коалиции $\mathcal{K}$, чьи проекции на каждого игрока совпадают с распределением в функции Шепли, останется прежним.

Индекс Банзафа. Класс распределений случайной коалиции событий, проекции которого на каждого игрока $K(x)$ имеют равномерное распределение

$$p(E) = \begin{cases} p(\emptyset), & |E| \text{ – четная;} \\ \frac{1}{2^{N-1}} - p(\emptyset), & |E| \text{ – нечетная.} \end{cases}$$

$$0 \leq p(\emptyset) \leq \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Показано, что данный класс распределений при $N > 2$ не удовлетворяет необходимому и достаточному условию дележа по Нейману – Моргенштерну и, следовательно, не является дележом в смысле его классического определения.

## 17.4 Применение эвентологической теории игр

Рассматривается и анализируется применение разработанных в главе методов построения статистических зависимостей случайных событий в статистических системах потребительского выбора, а также предлагаются рекомендации по использованию разработанных в главе методов по распределению ресурса между элементами статистической системы. Результаты апробированы на реальной статистике двух фирм производителей мебели.

Рассмотрим рынок мебели. На этом рынке имеются $N$ наименований товаров $\mathfrak{X}$. Предположим, что на нем работают две фирмы, которые могут производить любые подмножества наименований товаров. Перед каждой фирмой стоит задача сформировать товарную политику, другими словами — определить ассортимент выпускаемой продукции. Рассмотрим эвентологическую игровую модель для решения поставленной задачи.

Предложение каждой фирмы будем описывать случайной коалицией событий $\mathcal{K}_i, \quad i := 1, 2$, где выражение $\mathcal{K}_i = X$ означает, что произошло событие: «$i$-ая фирма-производитель выпустила для продажи множество наименований товаров X». Назовем случайную коалицию событий $\mathcal{K}_i$ $i$ - ым случайным производителем. Случайные производители в рассматриваемой модели являются игроками, которые сами могут выбирать любую свою чистую стратегию, то есть любое подмножество из $2^{\mathfrak{X}}$.

Рассматриваются три модели оптимального поведения игроков:

- антагонистическая (некооперативное поведение);
- равновесие по Нэшу (кооперативное поведение на основе необязательных соглашений);
- равновесие в совместных смешанных стратегиях (кооперативное поведение).

Антагонистическая эвентологическая модель поиска товарной политики для фирмы. Предположим, что при выборе альтернативы игрок $\mathcal{K}_1$ принимает решение о производстве множества наименований товаров $X$ независимо от того, какое множество наименований товаров решил производить игрок $\mathcal{K}_2$, а функции выигрыша игроков $g_1, g_2$ для любой пары $X \times Y \in 2^{\mathfrak{X}} \times 2^{\mathfrak{X}}$ связаны соотношением

$g_1(X,Y) + g_2(X,Y) = 0$. Критерием оптимального поведения является максимин.

Согласно теореме о максимине для игры двух случайных коалиций в смешанных стратегиях всегда существует ситуация равновесия. Ситуаций равновесия в данном случае может быть несколько, но выигрыши игроков одинаковы в любой из этих ситуаций.

Функцию игры будем формировать на основе трехмерной матрицы БКГ. Поэтому для каждого подмножества наименований товаров $X \subseteq \mathfrak{X}$ необходимо получить значения экспертных оценок $R^i_{1X},\ R^i_{2X},\ R^i_{3X},\ \ i = 1,2$ Это можно вычислить, например, как

- среднее арифметическое; $R^i_{kX} = \frac{\sum_{x \in X} R^i_{kx}}{|X|}, \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,3;$
- максимальное значение $R^i_{kX} = \max\{R^i_{kx},\ x \in \mathfrak{X}\},\ \ i = 1,2,\ \ k = 1,2,3;$
- минимальное значение $R^i_{kX} = \min\{R^i_{kx},\ x \in \mathfrak{X}\},\ \ i = 1,2,\ \ k = 1,2,3.$

Из всех рассматриваемых маркетинговых стратегий метода БКГ наилучшей является стратегия №1, поэтому одна из возможных формул для задания функции выигрыша имеет вид

$$g(X,Y) = \alpha_X \cdot |\overrightarrow{R^1_X} - \overrightarrow{R^2_Y}| \cdot \beta_Y \cdot \mathtt{sign}(\cos(\overrightarrow{R^1_X} - \overrightarrow{R^2_Y}; (1,1,1))), \quad (11)$$

где $\alpha_X,\ \beta_Y$ – коэффициенты, которые могут иметь смысл, например, прибыли от производства множества наименований товаров $X$ для одного случайного производителя и множества наименований товаров $Y$ для другого случайного производителя.

$$|\overrightarrow{R^1_X} - \overrightarrow{R^2_Y}| = \sqrt{(R^1_{1X} - R^2_{1Y})^2 + (R^1_{2X} - R^2_{2Y})^2 + (R^1_{3X} - R^2_{3Y})^2},$$

$\mathtt{sign}(\cos(\overrightarrow{R^1_X} - \overrightarrow{R^2_Y}; (1,1,1)))$ – знак косинуса угла между векторами $\overrightarrow{R^1_X} - \overrightarrow{R^2_Y}$ и $(1,1,1)$.

Нахождение ситуаций равновесия можно выполнить с помощью алгоритма фиктивного разыгрывания. Полученные оптимальные в смысле максимина стратегии $p^*(X),\ \ X \subseteq \mathfrak{X}$ и $q^*(Y),\ \ Y \subseteq \mathfrak{X}$ являются искомыми товарными политиками для одного случайного производителя и для другого соответственно.

Эвентологическая модель поиска товарной политики для фирмы на основе кооперативного поведения игроков с необязательными соглашениями. Предположим, что, как и в случае максимина при выборе альтернативы, игрок $\mathcal{K}_1$ принимает решение о производстве множества наименований товаров $X$ независимо от того, какое множество наименований товаров решил производить игрок $\mathcal{K}_2$.

В рассматриваемом случае оптимальным критерием будем считать *равновесие по Нэшу*. Ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях существует, согласно теореме о существовании ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях для игры двух случайных коалиции событий. Однако, если ситуаций равновесия несколько, то, в отличие от максимина, в каждой ситуации выигрыши игроков различны, поэтому им необходимо каким-либо образом выбрать ситуацию равновесия, которой они должны придерживаться.

Теперь зададим функции выигрышей для случайных производителей следующим образом:

$$g_1(X,Y) = \Big(|\overrightarrow{R^1_{X\setminus Y}}| + |\overrightarrow{R^1_{X\cap Y}} - \overrightarrow{R^2_{X\cap Y}}|\times$$

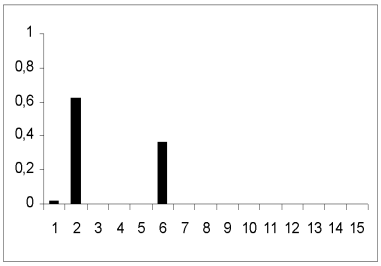
$$\times \mathtt{sign}(\cos(\overrightarrow{R^1_{X\cap Y}} - \overrightarrow{R^2_{X\cap Y}}; (1,1,1)))\Big) \cdot \alpha_X, \tag{12}$$

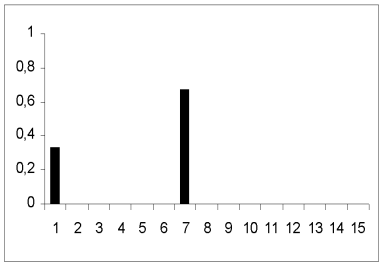
$$g_2(X,Y) = \Big(|\overrightarrow{R^2_{Y\setminus X}}| + |\overrightarrow{R^2_{Y\cap X}} - \overrightarrow{R^1_{Y\cap X}}|\times$$

$$\times \mathtt{sign}(\cos(\overrightarrow{R^2_{Y\cap X}} - \overrightarrow{R^1_{Y\cap X}}; (1,1,1)))\Big) \cdot \beta_Y. \tag{13}$$

Нахождение ситуаций равновесия осуществляется методом Лемке-Хоусона. Полученные оптимальные в смысле равновесия по Нэшу стратегии $p^*(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ и $q^*(Y),\ Y \subseteq \mathfrak{X}$ являются искомыми товарными политиками для одного случайного производителя и для другого соответственно.

Эвентологическая модель поиска товарной политики для фирмы на основе кооперативного поведения игроков. Предположим, что оптимальное поведение игроков $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ есть равновесие в совместных смешанных стратегиях $p^*(X,Y) = \mathbf{P}(\mathcal{K}_1 = X, \mathcal{K}_2 = Y)$. Функции выигрыша игроков можно задать по формулам (12) и (13). Найти оптимальные товарные политики можно с помощью алгоритма




$\mathbf{p}$(общее) = 0.02;
$\mathbf{p}$(игры) = 0.62;
$\mathbf{p}$(общее, спорт) = 0.36;
$\mathbf{g}_1 = -461,8$;

$\mathbf{q}$(общее) = 0.33;
$\mathbf{q}$(общее, отдых) = 0.67.

$\mathbf{g}_2 = 461,8$;

Рис. 17.1. Антагонистическая модель (максимум). Эта игра выгоднее для второго случайного производителя.

Лемке–Хоусона вычислив все ситуации равновесия по Нэшу. Множество линейных комбинаций этих ситуаций равновесия и будет решением данной задачи.

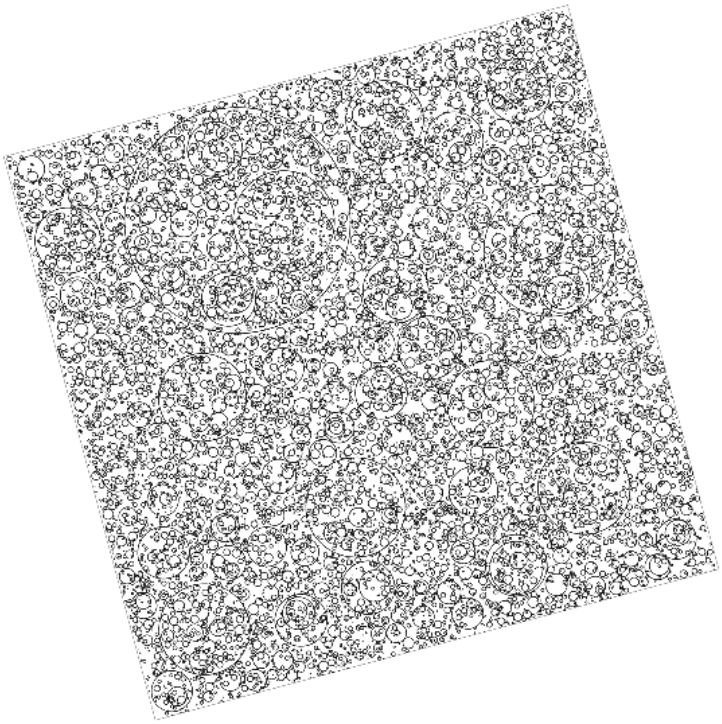
Применение эвентологической игровой модели для формирования товарной политики. Рассмотрим предложенные модели для формирования товарной политики двух фирм производителей мебели. Имеется статистика в виде двух таблиц экспертных оценок для 19 наименований товаров рынка производителей мебели. Одна таблица содержит экспертные оценки для одной фирмы-производителя, другая таблица — для второй фирмы производителя. Поскольку $2^{19}$ — достаточно большое число, то предлагается множество наименований товаров сначала поделить на четыре группы по типу производства. Таким образом выделено конечное множество групп наименований $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, где $x_1$ — мебель общего назначения, $x_2$ — мебель для игр, $x_3$ — мебель для спорта, $x_4$ — мебель для отдыха. На рисунке 17.1 приведены оптимальные товарные политики для фирм.

## 17.5 Заключение

Решена задача разработки эвентологических теоретико-игровых методов анализа случайных множеств событий, позволяющих одновре-

менно решать задачи принятия решений в сложных системах событий и задачу коалиционного дележа в игре множества лиц. Рассмотрены системы событий, описывающих конфликт двух случайных множеств событий. Обоснованы и применены методы теории игр для двух игроков к игре двух случайных коалиций событий. В результате введено новое понятие в теории игр — псевдоигрок. Введение понятия псевдоигрока привело к возникновению двухуровневой структуры в игре. Сформулированы и доказаны теоремы о максимине для игры двух случайных коалиций, о существовании равновесия по Нэшу для игры двух случайных коалиций событий. Эти теоремы утверждают существование оптимальных случайных коалиций в смысле максимина и в смысле равновесия по Нэшу.

# Эпилог



*Рассудок оперирует готовым,*
*разум создает новое.*

Мы имели дело с эвентологическими моделями, в которых события, вероятности и ценности играют роль параметров. Эти модели можно применять различными способами. Умение применять эвентологию и эвентологическую интуицию развивается вместе с развитием эвентологической теории. Этот путь давно известен и в других математических дисциплинах и неплохо себя зарекомендовал. Пока не предложено другого пути, который смог бы в немалой мере оказаться приемлемым и для растущей теории, называемой эвентологией, и для ее приложений.

Можно сожалеть, что интуитивные понятия события, вероятности и ценности недостаточны для научной теории, но это временное явление. Если бы удалось эвентологически обосновать более широкий круг фактов, то это говорило бы всего лишь о том, что эвентологическая интуиция развивается вместе с эвентологической теорией. Эвентологические приложения требуют свободы для теории, и мы совершим диктаторскую ошибку, заперев эвентологию в слишком жесткие рамки.

Не раз приходилось слышать, что эвентология слишком абстрактна, чтобы быть полезной. Для опровержения этих мнений, достаточно напомнить неожиданные новые эвентологические применения в экономикс, появившиеся буквально «на кончике эвентологического пера», или новые немалые достижения в эвентологической психологии, которые противоречат наивной интуиции и ведут к пересмотру устоявшихся взглядов на поведение разумного субъекта. Всё же подобный спор бесплоден: осуждать легче. Многие теории, примерам нет числа, которые сегодня стали реально необходимы, ещё вчера считались никому не нужными, а теории, которые станут практически востребованными завтра, сегодняшние прагматики порицают и называют пустыми играми.

Эвентология не претендует на роль всеобщего заменителя или модификатора существующих теорий (теория нечётких множеств, теория возможностей, теория очевидностей, теория игр, теория перспектив, портфельный анализ и т.д.). Эвентология — всего лишь математический язык событий, который сначала возник в рамках теории вероятностей, затем был дополнен оригинальными эвентологическими методами и сейчас обладает, на наш взгляд, свойством

*событийной универсальности* в описании и объяснении окружающего мира.

За последние годы эвентологическая теория продемонстрировала свои возможности в решении фундаментальных задач из ряда актуальных областей. Не считая эвентологических результатов в теории нечётких событий (Воробьев, 2004–2006), можно указать также на пионерские постановку и решение обратной эвентологической задачи Марковица (Воробьев, Голденок, Клочков, 2003–2005) из портфельного анализа, оригинальное эвентологическое обоснование рыночного креста Маршалла (Воробьев, Е.Голденок, К.Голденок, 2006), эвентологические результаты в математической теории игр (общая формула дележа, объединяющая известные формулы Шепли, Банзафа и Вилкаса и через понятие эвентологического распределения связывающая дележ с классическим решением игры в виде смешанных стратегий) (Воробьев, Тяглова, 1999–2006), и наконец, эвентологические результаты (Воробьев, 2006) в рамках новой теории перспектив Канемана и Тверского. Таким образом, эвентология мирно сосуществует с уже известными теориями всего лишь как новая *событийно универсальная* точка зрения на признанные достижения, позволяющая чаще всего их эвентологически переосмыслить и увидеть между ними новые эвентологические аналогии, которые иногда приводят к неожиданным открытиям.

*Автор просит прощения за неприбранность стиля, несогласованность обозначений, прочие несуразицы, замеченные читательским глазом, и готов с благодарностью принять все замечания и любую критику в свой адрес:* `vorob@akadem.ru`.

*Красноярск, Академгородок, 28 мая 2007*

## Эвентологические обозначения
## Eventological notation

$\Omega$ — пространство элементарных событий / *space of elementary events*

$\omega \in \Omega$ — элементарное событие / *elementary event*

$x, y, z \subseteq \Omega$ — события, случайные событий как подмножества $\Omega$ / *events, random events as subsets of* $\Omega$

$x^c = \Omega - x$ — дополнение события $x \subseteq \Omega$ / *complement of event* $x \subseteq \Omega$

$\mathcal{F}$ — алгебра событий / *algebra of events*

$x, y, z \in \mathcal{F}$ — события, случайные события как элементы алгебры $\mathcal{F}$ / *events, random events as elements of algebra* $\mathcal{F}$

$\mathbf{P}$ — вероятность событий / *probability of events*

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство / *probability space*

$\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — конечное множество событий, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ / *finite set of events selected from algebra* $\mathcal{F}$

$X,\ Y,\ A,\ B \subseteq \mathfrak{X}$ — подмножества множества событий $\mathfrak{X}$ / *subsets of a set of events* $\mathfrak{X}$

$|\mathfrak{X}|$ — мощность множества событий $\mathfrak{X}$, число событий в $\mathfrak{X}$ / *power of a set of events* $\mathfrak{X}$, *number of events in* $\mathfrak{X}$

$X^c = \mathfrak{X} - X$ — дополнение подмножества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ / *complement of a subset of events* $X \subseteq \mathfrak{X}$

$\mathrm{ter}(X) = \bigcap\limits_{x \in X} x \bigcap\limits_{x \in X^c} x^c \subseteq \Omega$ — событие-терраска по пересечению, порожденное $\mathfrak{X}$ / *event-terrace of intersection, generated by* $\mathfrak{X}$

$\operatorname{ter}_X = \bigcap\limits_{x\in X} x \subseteq \Omega$ — событие-терраска прямого пересечения, порожденное $\mathfrak{X}$ / *event-terrace of direct intersection, generated by* $\mathfrak{X}$

$\operatorname{ter}^X = \bigcap\limits_{x\in X^c} x^c \subseteq \Omega$ — событие-терраска дополнительного пересечения, порожденное $\mathfrak{X}$ / *event-terrace of complement intersection, generated by* $\mathfrak{X}$

$\operatorname{Ter}(X) = \bigcup\limits_{x\in X} x \bigcup\limits_{x\in X^c} x^c \subseteq \Omega$ — событие-терраска объединения, порожденное $\mathfrak{X}$ / *event-terrace of union, generated by* $\mathfrak{X}$

$\operatorname{Ter}_X = \bigcup\limits_{x\in X} x \subseteq \Omega$ — событие-терраска прямого объединения, порожденное $\mathfrak{X}$ / *event-terrace of direct union, generated* $\mathfrak{X}$

$\operatorname{Ter}^X = \bigcup\limits_{x\in X^c} x^c \subseteq \Omega$ — событие-терраска дополнительного объединения, порожденное $\mathfrak{X}$ / *event-terrace of complement union, generated* $\mathfrak{X}$

$p(X) = \mathbf{P}(\operatorname{ter}(X))$ — вероятность события-терраски $\operatorname{ter}(X)$ / *probability of event-terrace* $\operatorname{ter}(X)$

$p_X = \mathbf{P}(\operatorname{ter}_X)$ — вероятность события-терраски $\operatorname{ter}_X$ / *probability of event-terrace* $\operatorname{ter}_X$

$p^X = \mathbf{P}(\operatorname{ter}^X)$ — вероятность события-терраски $\operatorname{ter}^X$ / *probability of event-terrace* $\operatorname{ter}^X$

$u(X) = \mathbf{P}(\operatorname{Ter}(X))$ — вероятность события-терраски $\operatorname{Ter}(X)$ / *probability of event-terrace* $\operatorname{Ter}(X)$

$u_X = \mathbf{P}(\operatorname{Ter}_X)$ — вероятность события-терраски $\operatorname{Ter}_X$ / *probability of event-terrace* $\operatorname{Ter}_X$

$u^X = \mathbf{P}(\operatorname{Ter}^X)$ — вероятность события-терраски $\operatorname{Ter}^X$ / *probability of event-terrace* $\operatorname{Ter}^X$

$p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ — Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$ / *E-distribution of a set of events* $\mathfrak{X}$

$p_X,\ X \subseteq \mathfrak{X}$ — Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$ / *E-distribution of a set of events* $\mathfrak{X}$

$p^X,\ X \subseteq \mathfrak{X}$ — Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$ / *E-distribution of a set of events* $\mathfrak{X}$

$u(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}$ — Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$ / *E-distribution of a set of events* $\mathfrak{X}$

$u_X,\ X \subseteq \mathfrak{X}$ — Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$ / *E-distribution of a set of events* $\mathfrak{X}$

$u^X,\ X \subseteq \mathfrak{X}$ — Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}$ / *E-distribution of a set of events* $\mathfrak{X}$

$\mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$ — парная ковариация событий $x$ и $y$ / *pairwise covariance of events* $x$ *and* $y$

$\mathsf{Kov}_X = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x \in X} x)\right) - \prod\limits_{x \in X} \mathbf{P}(x)$ — арная ковариация множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$ / *arity covariance of a set of events* $X \subseteq \mathfrak{X}$

$2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств $\mathfrak{X}$ / *set of all subsets of* $\mathfrak{X}$

$0^{\mathfrak{X}} = \left\{X \in 2^{\mathfrak{X}} :\ |X| = 0\ (\mod 2)\right\}$ — множество всех чётных подмножеств $\mathfrak{X}$ / *set of all even subsets of* $\mathfrak{X}$

$1^{\mathfrak{X}} = \left\{X \in 2^{\mathfrak{X}} :\ |X| = 1\ (\mod 2)\right\}$ — множество всех нечётных подмножеств $\mathfrak{X}$ / *set of all odd subsets of* $\mathfrak{X}$

$X,\ Y,\ A,\ B \subseteq \mathfrak{X}$ — подмножества конечного множества $\mathfrak{X}$ / *subsets of finite set* $\mathfrak{X}$

$X,\ Y,\ A,\ B \in 2^{\mathfrak{X}}$ — подмножества конечного множества $\mathfrak{X}$ / *subsets of finite set* $\mathfrak{X}$

$2_X = \left\{Y \in 2^{\mathfrak{X}} :\ Y \subseteq X\right\}$ — множество всех надмножеств множества $X \subseteq \mathfrak{X}$ / *set of all supersets of a set* $X \subseteq \mathfrak{X}$

$0_X = \{Y \in 2_X :\ |Y| = 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\}$ — множество всех чётных надмножеств $X$ / *set of all even supersets of* $X$

$1_X = \{Y \in 2_X : \ |Y| = 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$ — множество всех нечётных надмножеств $X$ / *set of all odd supersets of* $X$

$C_{\mathfrak{X}}^m = \left\{X \in 2^{\mathfrak{X}} : \ |X| = m\right\}$ — $m$-слой, множество $m$-подмножеств $\mathfrak{X}$ / $m$-*layer*, *set of* $m$-*subsets of* $\mathfrak{X}$

$C_{\mathfrak{X}}^{[0,m]} = \left\{X \in 2^{\mathfrak{X}} : \ 0 \leq |X| \leq m\right\}$ — $[0,m]$-интервал, множество подмножеств $\mathfrak{X}$ с мощностью из $[0,m]$ / $[0,m]$-*interval, set of subsets of* $\mathfrak{X}$ *with power from* $[0,m]$

$C_X^Y = \left\{Z \in 2^{\mathfrak{X}} : \ Z \cap X = Y\right\}$ — множество подмножеств $\mathfrak{X}$, которые $Y$-фиксированы под $X$, / *set of subsets of* $\mathfrak{X}$ $Y$-*fixed under* $X$,

$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$ — случайное множество событий из $\mathfrak{X}$, наступающих одновременно с элементарным событием $\omega \in \Omega$ / *random set of events from* $\mathfrak{X}$ *happened with elementary event* $\omega \in \Omega$ *at the same time*

$|K|$ — мощность случайного множества событий $K$, целочисленная случайная величина из $\{0, \ldots, |\mathfrak{X}|\}$ / *power of random set of events* $K$, *integer-valued random variable from* $\{0, \ldots, |\mathfrak{X}|\}$

$p(X) = \mathbf{P}(K = X) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x \in X} x \bigcap\limits_{x \in X^c} x^c\right)$ — вероятность наступления множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$, или вероятность пересечений множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$, / *probability of happening a set of events* $X \subseteq \mathfrak{X}$, *or probability of intersection of a set of events* $X \subseteq \mathfrak{X}$,

$p^X = \mathbf{P}(K \subseteq X) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x \in X^c} x^c\right)$ — вероятность включения случайного множества $K$ во множество событий $X$, или вероятность дополнительных пересечений множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$, / *probability of including a random set of events* $K$ *to a set of events* $X$, *or probability of complementary intersections of a set of events* $X \subseteq \mathfrak{X}$,

$$p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K) = \\ = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) \text{ —}$$

- вероятность включения множества событий $X$ в случайное множество $K$, или вероятность прямых пересечений множества событий $X$
- *probability of including a set of events $X$ to a random set of events $K$, or probability of direct intersection of a set of events $X \subseteq \mathfrak{X}$,*

$$u(X) = 1 - \mathbf{P}(K = X^c) = \\ = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x \bigcup_{x \in X^c} x^c\right) \text{ —}$$

- вероятность объединения множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$,
- *probability of union of a set of events $X \subseteq \mathfrak{X}$,*

$$u^X = 1 - \mathbf{P}(X^c \subseteq K) = \\ = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X^c} x^c\right) \text{ —}$$

- вероятность дополнительных объединений множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$,
- *probability of complementary unions of a set of events $X \subseteq \mathfrak{X}$,*

$$u_X = 1 - \mathbf{P}(K \subseteq X^c) = \\ = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X} x\right) \text{ —}$$

- вероятность прямых объединений множества событий $X \subseteq \mathfrak{X}$,
- *probability of direct unions of a set of events $X \subseteq \mathfrak{X}$,*

$$\boldsymbol{p}(K) = \left\{p(X) : \ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\} \text{ —}$$

- Э-распределение вероятностей пересечений событий из $K$,
- *E-distribution of probability of intersections of events from $K$,*

$$\boldsymbol{p}^K = \left\{p^X : \ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\} \text{ —}$$

- Э-распределение вероятностей дополнительных пересечений событий из $K$,
- *E-distribution of probability of complementary intersections of events from $K$,*

$$\boldsymbol{p}_K = \left\{p_X : \ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\} \text{ —}$$

- Э-распределение вероятностей прямых пересечений событий из $K$,
- *E-distribution of probability of direct intersections of events from $K$,*

$$\boldsymbol{u}(K) = \left\{u(X) : \ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\} \text{ —}$$

- Э-распределение вероятностей объединений событий из $K$,
- *E-distribution of probability of unions of events from $K$,*

$\boldsymbol{u}^K = \left\{u^X :\ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\}$ — Э-распределение вероятностей дополнительных объединений событий из $K$, *E-distribution of probability of complementary unions of events from* $K$,

$\boldsymbol{u}_K = \left\{u_X :\ X \in 2^{\mathfrak{X}}\right\}$ — Э-распределение вероятностей прямых объединений событий из $K$, *E-distribution of probability of direct unions of events from* $K$,

$K^{\mathsf{c}} = \mathfrak{X} \setminus K$ — дополнение случайного множества событий $K$ до $\mathfrak{X}$, *complement of a random set of events* $K$ *up to* $\mathfrak{X}$,

$f_X^Y = \mathbf{P}\left(K \cap X = Y\right) = \mathbf{P}\left(K \in C_X^Y\right)$ — вероятность $Y$-фиксации под $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ для $K$, *probability of* $Y$*-fixation under* $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ *for* $K$,

$g_X^Y = \mathbf{P}\left(K^{\mathsf{c}} \cap X = Y\right) = \mathbf{P}\left(K^{\mathsf{c}} \in C_X^Y\right)$ — вероятность $Y$-фиксации под $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ для $K^{\mathsf{c}}$, *probability of* $Y$*-fixation under* $X \in 2^{\mathfrak{X}}$ *for* $K^{\mathsf{c}}$,

$p_{\mathfrak{X}}^m = \mathbf{P}\left(K \in C_{\mathfrak{X}}^m\right) = \mathbf{P}(|K| = m)$ — вероятность мощности $m$ probability of power $m$

$p_{\mathfrak{X}}^{[0,m]} = \mathbf{P}\left(K \in C_{\mathfrak{X}}^{[0,m]}\right) = \mathbf{P}(0 \le |K| \le m)$ — вероятность интервала мощности $[0, m]$, *probability of power interval* $[0, m]$,

$p(x) = \mathbf{P}(K = \{x\})$ — вероятность моноплета событий $\{x\}$ *probability of monoplet of events* $\{x\}$

$p(xy) = \mathbf{P}(K = \{x, y\})$ — вероятность дуплета событий $\{x, y\}$ *probability of duplet of events* $\{x, y\}$

$p(xyz) = \mathbf{P}(K = \{x, y, z\})$ — вероятность триплета событий $\{x, y, z\}$, *probability of triplet of events* $\{x, y, z\}$,

$p_x = \mathbf{P}(x \in K) = \mathbf{P}(\{x\} \subseteq K) = \mathbf{P}(x)$ — вероятность принадлежности события $x$ случайному множеству $K$, вероятность включения моноплета $\{x\}$ в $K$, или вероятность события $x$ *probability of belonging event* $x$ *to* $K$, *probability of including monoplet* $\{x\}$ *to* $K$, *or probability of event* $x$

$p_{xy} = \mathbf{P}(\{x,y\} \subseteq K) =$

$= \mathbf{P}(x \cap y)$ —

вероятность включения дуплета событий $\{x,y\} \subseteq \mathfrak{X}$ в случайное множество $K$, или вероятность парного пересечения $x \cap y$
*probability of including duplet of events* $\{x,y\}$ *to* $K$*, or probability of pairwize intersection* $x \cap y$

$p_{xyz} = \mathbf{P}(\{x,y,z\} \subseteq K) =$

$= \mathbf{P}(x \cap y \cap z)$ —

вероятность включения триплета событий $\{x,y,z\} \subseteq \mathfrak{X}$ в случайное множество $K$, или вероятность тройного пересечения $x \cap y \cap z$
*probability of including triplet of events* $\{x,y,z\}$ *to* $K$*, or probability of triple intersection* $x \cap y \cap z$

$p^x = \mathbf{P}(K \subseteq \{x\})$ —

вероятность включения случайного множества $K$ в моноплет $\{x\}$
*probability of including random set* $K$ *to monoplet* $\{x\}$

$p^{xy} = \mathbf{P}(K \subseteq \{x,y\})$ —

вероятность включения случайного множества $K$ в дуплет $\{x,y\}$,
*probability of including random set* $K$ *to duplet* $\{x,y\}$,

$p^{xyz} = \mathbf{P}(K \subseteq \{x,y,z\})$ —

вероятность включения случайного множества $K$ в триплет $\{x,y,z\}$
*probability of including random set* $K$ *to triplet* $\{x,y,z\}$.

# Литература


[1] Амбарцумян Р. В., Мекке Й., Штойян Д. (1989) *Введение в стохастическую геометрию.* — М.: Наука, 401 с.

[2] Баранова И. В. (2006) *Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: КрасГУ, 20 с.

[3] Баранова И. В. (2006) Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе социально-экономических систем. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 142–151.

[4] Баранова И. В. (2006) Применение метода двудольных множеств событий в факторном анализе сложных систем. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 9. — С. 124–131.

[5] Бернштейн С. Н. (1917) Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей. *Сообщ. Харъковск. Матем. Об-ва.* — Вып. 15. — С. 209-274.

[6] Вилкас Э.Й. (1990) *Оптимальность в играх и решениях.* — Москва: Наука. — 256 с.

[7] Воробьёв О. Ю., Грановская Р. М. (1968) Синтез математической модели нейрона. *Сб. Вычисл.техника и вопросы кибернетики.* — Ленинград: ЛГУ. — Вып. 6.

[8] Воробьёв О. Ю., Грановская Р. М. и др. (1970) Хранение кодов объектов в статической части кратковременной памяти. *Сб. Вычисл.техника и вопросы кибернетики.* — Ленинград: ЛГУ. Вып. 1.

[9] Воробьёв О. Ю., Грановская Р. М. (1971) Ассоциативная память и сложность сетей из нейронов. *Сб. Вычисл.техника и вопросы кибернетики.* — Ленинград: ЛГУ. — Вып. 3.

[10] Воробьёв О. Ю. (1975) Определение вероятностей распространения горения и оценка развития средних контуров пожара. *Сб. Охрана лесных ресурсов Сибири.* — Красноярск: ИЛиД СО АН СССР. — С. 43–67.

[11] Воробьёв О. Ю. (1977) О множественных характеристиках состояний распределенных вероятностных процессов. *Известия СО АН СССР.* — Вып. 3. — С. 3–7.

[12] Воробьёв О. Ю., Валендик Э. Н. (1978) *Вероятностное множественное моделирование.* — Новосибирск: Наука, 131 с.

[13] Воробьёв О. Ю. (1984) *Среднемерное моделирование.* — М.: Наука, 133 с.

[14] Воробьёв О. Ю. (1991) Сет-суммирование. *ДАН*, т. 318, 4, 785–788.

[15] Воробьёв О. Ю. (1992) Исчисление сет-распределений. *Доклады РАН*, т. 326, 4, 583–588.

[16] Воробьёв О. Ю. (1993) *Сет-суммирование.* — Новосибирск: Наука, 137 с.

[17] Воробьёв О. Ю., Воробьев А. О. (1994) Суммирование сет-аддитивных функций и формула обращения Мёбиуса. *Доклады РАН*, т. 336, 4, 417–420.

[18] Воробьёв О. Ю., Воробьев А. О. (1996) Случайно-множественный анализ пространственной динамики пожарной опасности и влагосодержания в лесах Эвенкии. *Сибирский экологический журнал.* — Новосибирск. — № 1. — С. 35–42.

[19] Воробьёв А. О. (1998) *Прямые и обратные задачи для моделей распространения пространственных рисков.* Автореферат дис. канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: КГТУ, 23 с.

[20] Воробьев А. О. (2002) Мультковариации и многоточечно зависимые распределения случайных множеств. *Труды Первой Всерос. ФАМ'2002 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 21–24.

[21] Воробьёв О. Ю. (1999) О ковариации подмножеств случайного множества. *ФАМ семинар, октябрь.* — Красноярск: ИВМ СО РАН.

[22] Воробьёв О. Ю., Воробьев А. О. (1999) Пожарная конъюнктура и управление пожарными рисками. *Сибирский вестник пожарной безопасности.* — Красноярск: СФ ВНИИПО, № 1. — С. 47–55.

[23] Воробьёв О. Ю. (1999) Энтропийные методы случайно-множественного статистического анализа. *Вычислительные технологии.* — Новосибирск: ИВТ СО РАН, № 4.

[24] Воробьёв О. Ю. (2002) От метафоры Шредингера к метамодели сознания. *Труды Первой Всерос. ФАМ'2002 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 69–84.

[25] Воробьёв О. Ю. (2002) Рейтинг репутации. *ФАМ Записки'2002.* — Т. 7. — Красноярск: ИВМ СО РАН, — С. 106-113.

[26] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е., Куприянова Т. В., Семёнова Д. В. и Фомин А.Ю. (2003) *Теория случайных событий и её применение.* — Красноярск: ИВМ СО РАН, 502 с.

[27] Воробьёв О. Ю. (2003) Физические основания эвентологии. *Труды Второй Всерос. ФАМ'2003 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 38-68.

[28] Воробьёв О. Ю. (2003) Теоретические основания эвентологии. Структуры симметричных событий. *Труды Второй Всерос. ФАМ'2003 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 69–113.

[29] Воробьёв О. Ю. (2003) Случайные события: неравенства Фреше и корреляции Фреше. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 80–87.

[30] Воробьёв О. Ю., Дедова А. В., Клочков С. В., Тарасова О. Ю. (2005) Эвентология вербальных ассоциаций. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 183–194.

[31] Воробьёв О. Ю., Болдырь Г. М. (2006) О новом понятии условного события и его применении в эвентологическом системном анализе. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 152–159.

[32] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е., Семёнова Д. В. (2003) Случайно-множественные разложения двудольных случайных векторов. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 88–96

[33] Воробьёв О. Ю., Сорокин Е. А. (2006) Построение систем предпочтений индивидуума: два метода формирования вопросов. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 160–166.

[34] Воробьёв О. Ю. (2004) Эвентология портфельного анализа и обратная эвентологическая задача Марковица. *ФАМ Записки.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — Т. 9. — № 11. — С. 1–10.

[35] Воробьёв О. Ю. (2004) Эвентология рейтинга репутации. *Труды Третьей Всерос. ФАМ'2004 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 33–48.

[36] Воробьёв О. Ю. (2005) Эвентологические структуры и эвентологический скоринг. *Труды Четвёртой Всерос. ФАМ'2005 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 49–89.

[37] Воробьёв О. Ю. (2005) Эвентология случайно-нечётких событий. *Труды Четвёртой Всерос. ФАМ'2005 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 47–111.

[38] Воробьёв О. Ю. (2005) Эвентология рефлексивного выбора. *Труды Четвёртой Всерос. ФАМ'2005 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 170–214.

[39] Воробьёв О. Ю. (2005) Корреляция и регрессия: количественный и множественный подходы. *Труды Четвёртой Всерос. ФАМ'2005 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 215–240.

[40] Воробьёв О. Ю. (2006) Эвентология неопределенности. *Труды Пятой Всерос. ФАМ'2006 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 26–55.

[41] Воробьёв О. Ю. (2007) Корреляция и регрессия: эвентологический подход. *Труды Шестой Всерос. ФАМ'2007 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 46–71.

[42] Воробьёв О. Ю. (2007) Многомерные дискретные распределения: эвентологическое обобщение. *Труды Шестой Всерос. ФАМ'2007 конференции (под*

*ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 72–97.

[43] Воробьёв О. Ю. (2007) Эвентология изнутри. *Труды Шестой Всерос. ФАМ'2007 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 98–142.

[44] Воробьёв О. Ю. (2007) Эвентология выбора. *Труды Шестой Всерос. ФАМ'2007 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 143–158.

[45] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е. (2004) Эвентологические распределения и золотое сечение. *Труды Третьей Всерос. ФАМ'2004 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 90–112.

[46] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е. (2004) Эвентологический скоринг в экономике, социологии, праве и бизнесе. *Труды Третьей Всерос. ФАМ'2004 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 1130–128.

[47] Воробьёв О. Ю. (2003) О гиббсовских случайных величинах и гиббсовско-пуассоновских предельных распределениях. *Труды межд.конф. «Колмогоров и современная математика».* — М.: МГУ. — С. 621–622.

[48] Воробьёв О. Ю. (2004) Введение в эвентологию нечетких событий. *Экономика.Психология.Бизнес.* — Красноярск: КГТЭИ. — Вып. 5. — С. 78–66.

[49] Воробьёв О. Ю. и Воробьёв А. О. (2003) О новом понятии среднего множества случайных событий. *Труды межд. конф. «Колмогоров и современная математика».* — М.: МГУ. — С. 619–620.

[50] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е. (2003) О зависимости удельной вероятности связей случайных событий от мощности множества событий. *Труды межд.конф. «Колмогоров и современная математика».* — М.: МГУ. — С. 623–624.

[51] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е. (2003) Удельная вероятность связей событий в случайном множестве событий. *Труды Второй Всерос. ФАМ'2003 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 114–124.

[52] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е. (2004) О некоторых эвентологических распределениях. *ФАМ Записки.* — Красноярск: ИВМ СО РАН, Т. 9. — № 5. — С. 1–25.

[53] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е. (2004) *Структурный сет-анализ зависимостей случайных событий.* — Красноярск: КрасГУ, 106 с.

[54] Воробьёв О. Ю., Семёнова Д. В. (2004) *Портфельный сет-анализ взаимозависимостей случайных событий.* — Красноярск: КрасГУ, 117 с.

[55] Воробьёв О. Ю., Тарасова О.Ю. (2007) О связи понятий эвентологии и теории вероятностей на примере матричных моделей менеджмента. *Труды Шестой Всерос. ФАМ'2007 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 159–170.

[56] Воробьёв О. Ю., Фомин А. Ю. (2004) *Регрессионный сет-анализ зависимостей случайных событий.* — Красноярск: КрасГУ 2004, 103 с.

[57] Воробьёв О. Ю., Баранова И. В. (2007) *Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем.* — Красноярск: СФУ, 137 с.

[58] Воробьёв О. Ю., Ким Н. Л. (2006) Обзор теории копулы и эвентологическая теория копулы. *Труды Пятой Всерос. ФАМ'2006 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 56–94.

[59] Воробьёв О. Ю., Тяглова Е. Г. (2006) Эвентологическая теория игр. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1.

[60] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е. (2004) Метрические эвентологические распределения. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 174–181.

[61] Воробьёв О. Ю., Голденок Е. Е., Клочков С. В. (2005) Эвентологический «зонтик» Марковица и «зонтичная» визуализация эвентологического симплекса. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 2. — С. 174–182.

[62] Гантмахер Ф. Р. (1967) *Теория матриц.* — М.: Наука, 576 с.

[63] Голденок Е. Е. (2000) Классификация зависимостей трех событий. *Записки ФАМ Семинара.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — Т. 5. — С. 286–309.

[64] Голденок Е. Е. (2003) Измерение структуры связей событий распределением мощности случайного множества событий. *Труды Второй Всерос. ФАМ'2003 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 125–143.

[65] Голденок Е. Е. (2002) *Моделирование структур зависимостей и взаимодействий случайных событий в вероятностных системах.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: КГТУ, КГТЭИ, 24 с.

[66] Голденок Е. Е. (2004) Ковариационный анализ событий на независимом и равномерном фоне. *Экономика. Психология. Бизнес.* — Красноярск: КГТЭИ, СибГАУ. — № 5, Декабрь. С. 67–76.

[67] Голденок Е. Е. (2004) Прямая и обратная эвентологические задачи Марковица. *Математичесукие структуры и моделирование (под ред. А.К.Гуца).* — Омск: Омск. гос. ун-т. — Вып. 13. — С. 39–47.

[68] Голденок Е. Е. (2005) Особенности методов решения прямой и обратной эвентологических задач Марковица. *Труды Четвёртой Всерос. ФАМ'2005 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 241–264.

[69] Голденок Е. Е., Голденок К. В. (2006) Эвентологич рыночного спроса и предложения: эвентологический крест Маршалла. *Труды Пятой Всерос. ФАМ'2006 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 95–103.

[70] Голденок Е. Е., Голденок К. В. (2007) Эвентологическое измерение спроса и предложения. *Труды Шестой Всерос. ФАМ'2007 конференции (под ред. Олега Воробьева). Часть первая.* — Красноярск: ИВМ СО РАН. — С. 171–182.

[71] Голденок Е. Е., Голденок К. В. (2005) О прямой и обратной эвентологических задачах Марковица *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 195–203.

[72] Гуц А. К. (1999) *Глобальная этносоциология.* — Омск: Омск. ун-т, 212 с.

[73] Гуц А. К. (2004) *Элементы теории времени.* — Омск: Наследие, Диалог-Сибирь, 364 с.

[74] Гуц А. К., Фролова Ю. В. (2007) *Математические методы в социологии.* — М.: ЛКИ, 216 с.

[75] Заде Л. (1976) *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.* Пер. с англ. — М.: Мир.

[76] Клочков С. В. (2006) *Эвентологические модели распределения и заполнения ресурсов.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: КГТЭИ, 20 с.

[77] Ковязин С. А. (1982) О случайных измеримых множествах. *Препринт ВЦ СО АН СССР.* — №№ 10, 11, 13, 18, 20. — Красноярск: ВЦ СО АН СССР.

[78] Колмогоров А. Н. (1936) *Основные понятия теории вероятностей.* — М.: ГНТИ.

[79] Колмогоров А. Н. (1974) *Основные понятия теории вероятностей.* 2-е издание. — М.: Наука, 120 с.

[80] Кундера М. (2003) *Невыносимая легкость бытия (Nesnesitelna lehkost byti).* — М.: Азбука-классика, 352 с.

[81] Куприянова Т. В. (2002) *Задача классификации подмножеств случайного множества и ее применение.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: КрасГУ, 20 с.

[82] Лао-Цзы (V век до н.э.) *Дао Дэ Цзин* (перевод с кит. Ян Хин-шун: *Основы Дао и Дэ, или Канон Пути и Благодати.* — `http://abovo.net.ru/book/81215`).

[83] Лефевр В. (2003) *Рефлексия.* — М.: Когито-Центр, 496 с.

[84] Лефевр В. А., Адамс-Веббер Дж. (2001) Функция быстрой рефлексии в биполярном выборе. *Рефлексивные процессы и управление.* — № 1. — С. 34–46.

[85] Мах Э. (1907) *Анализ ощущений и отношение физического к психическому.* СПб. — С. 15 и С. 27–28.

[86] Новосёлов А. А. (2001) *Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерения.* — Новосибирск: Наука, 102 с.

[87] Нэш Д. (1961) *Матричные игры.* — М.: Физматгиз.

[88] Поспелов Д. А. (2001) Из истории развития нечетких множеств и мягких вычислений в России (материалы круглых столов (Москва, 1991, 1998), проведенных Д.А. Поспеловым, с послесловием В.Б. Тарасова). *Новости ИИ.* — № 2, 3. — М.: ВЦ РАН.

[89] (1977) *Психофизические исследования.* Забродин Ю.М., Ломов Б.Ф. (Ред.). — М. — 264 с.

[90] Пуанкаре А. (1983) *О науке (часть 3. Наука и метод).* — М.: Наука, 560 с.

[91] Семёнова Д. В. (2002) *Методы построения вероятностных зависимостей портфельных операций в рыночных системах.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: ИВМ СО РАН, 24 с.

[92] Семёнова Д. В. (2006) О нормализованных квазиэнтропиях эвентологических распределений. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — Красноярск: КрасГУ. — Вып. 1. — С. 167–174.

[93] Стратонович Р. Л. (1975) *Теория информации.* — М.: «Советское радио», 424 с.

[94] Терпугов А. Ф. (1999) *Экономико-математические модели.* - Томск: ТГПУ, — 118 с.

[95] Тяглова Е. Г. (2006) *Теоретико-игровые методы анализа случайных множеств событий.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: ИВМ СО РАН, 24 с.

[96] Тяглова Е. Г. (2004) Случайные коалиции событий как псевдо игроки и их игровое поведение. *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. наук.* — 2004. — № 3. — С. 139–143.

[97] Фейнман Р. (Feynman R.) (1968) Нобелевская лекция «Разработка квантовой электродинамики в пространственно-временном аспекте». В кн.: *«Характер физических законов».* — М.: Мир. — С. 193–231.

[98] Фомин А. Ю. (2002) *Сет-регрессионный анализ зависимостей случайных событий в вероятностных системах.* Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: ИВМ СО РАН, 21 с.

[99] Ширяев А. Н. (1980) *Вероятность.* — М.: Наука, 575 с.

[100] (1999) *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия.* Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: БРЭ, 911 с.

[101] Banzhaf J.F. (1965) Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Rev.* — Vol. 19. — P. 317–343.

[102] Baranova I. V. (2006) The Bipartite Set of Random Events Methods in Eventological Analysis of Socio-Econimic Systems. *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006.* — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 2777–2783.

[103] Bayes T. (1763) An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London*, 53. — P. 370–418.

[104] Bellman R. E., Zadeh L. A. (1970) Decision-Making in a Fuzzy Environment. *Management Science.* – Vol. 17, №4. — P. 141–164.

[105] Bentham J. (1789) Introduction to the principles of morals and legislation. — London (перевод: Бентам И. (1867) *Введение в основания нравственности и законодательства.* Избр. соч. — СПб. — Т. 1).

[106] Bentham J. (1952) Manuel of political economy. *Jeremy Bentham's Economie Weitings.* Ed. by W. Stark. London. — Vol. 1. — P. 224. Цит. по: The New Palgrave dictionary of economics. London etc., 1988. — Vol. 1. — P. 226.

[107] Birkhoff G. (1969) Mathematics and Psychology. *SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) Review.* — Vol. 11. — № 9. — P. 429–469 (перевод: Биркгофф Г. (1977) *Математика и психология.* — М.: «Сов. радио», 96 с.)

[108] Black M. (1937) Vagueness: an Exercise ш Logical Analysis. *Philosophy of Sciences*. – Vol. 4. – P. 427–455.

[109] Blyth C. R. (1972) On Simpson's Paradox and the Sure-Thing Principle. *Journal of the American Statistical Association*, June. — No. 67. — P. 367–381.

[110] Bohlmann G. (Больман Г.) (1908/1909) Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung. *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*. — Roma, 6-11 Aprile. — Vol. III. Sezione IIb. — Roma: Accademia dei Lincei.

[111] Boldyr G. M. (2005) Eventological Sytem Analysis and Its Applications. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005*. — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 849–855.

[112] Borg I. and Groenen P. (1997) *Modern Multidimensional Scaling: theory and applications*. — New York: Springer-Verlag.

[113] Borel E. (Борель Э.) (1909) Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, № 26. — P. 247–271.

[114] Calvo T., Mayor G., Mesiar R., Eds. (2003) Aggregation Operators: New Trends and Applications. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. — Vol. 97, Physica-Verlag, Heidelberg.

[115] Cliffs N. J., Li Q. D. (1997) The random set and the cutting of random fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 86. — P. 223-234.

[116] Coletti G. and Scozzafava R. (2004) Conditional probability, fuzzy sets, and possibility: a unifying view. *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 144, Issue 1, 16 May 2004. — P. 227–249.

[117] Cox M.F. and Cox M.A.A. (2001) *Multidimensional Scaling*. — Chapman and Hall.

[118] Dedova A. V. (2005) Eventology of Verbal Associations. *Proceedings of 2-nd IASTED Intern. Multi-Conf. ACIT-ACA'2005*. — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies. — P. 386–389.

[119] Dedova A. V. (2005) Eventological Models of Verbal Associations. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005*. — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 844–848.

[120] Dedova A. V. (2006) Eventological Modeling Verbal Markets. *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006*. — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 2764–2768.

[121] Dempster A. P. (1968) A generalization of Bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society*. — Series B. — Vol. 30. — P. 205–247.

[122] Deutsch D. (2000) *The Fabric of Reality*. Allen Lane: The Penguin Press (перевод: Дойч Д. (2001) *Структура реальности*. — Москва-Ижевск: НИЦ РХД, 400 с.)

[123] Dirac P. A. M. (1958) *The Principles of Quantum Mechanics*. Fourth edition. Oxford: At the Clarendon Press (перевод: Дирак П. (1979) *Принципы квантовой механики*. Издание второе. — М.: Наука, 480 с.)

[124] Dubois D. and Prade H. (1986) Fuzzy sets and statistical data. *Europ. J. Operations Research*, 25. — P. 345-356.

[125] Dubois D. and Prade H. (1987) The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 24. — P. 279-300.

[126] D.Dubois D., Prade H. (1988) *Possibility theory.* — New York: Plenum Press.

[127] Dubois D. and Prade H. (1989) Fuzzy sets, probability and measurement. *Europ. J. of Operations Research*, 40. — P. 135-154.

[128] Dubois D., Prade H. (2001) Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification. *Annals of Mathematics and Artifical Intelligence.* — № 32. — P. 35–66.

[129] Dubois D. (1988) On the links between probability and possibility theories. *Proceedings of IFSA-2005 World Congress.* — Beijing: Tsinghua University Press, Springer.

[130] Dubois D., Moral S. and Prade H. (1997) A semantics for possibility theory based on likelihoods. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 205. — P. 359-380.

[131] Feder J. (1991) *Fractals.* Department of Physics, University of Oslo, Oslo Norway. — New York, London: Plenum Press (перевод: Федер Е. (1991) Фракталы. — М.: Мир, 262 с.)

[132] Feller W. (1970/1971) *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* 3d ed. — Vol. I/II, New York: Wiley. (перевод: Феллер В. (1984) *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 1/2. — М.: Мир, 528 с./752 с.)

[133] Fermi E. (1950) *Conferenze di Fisica Atomica.* Roma (перевод: Ферми Э. (2001) *Лекции по атомной физике.* — Москва-Ижевск: РХД, 141 с.)

[134] Feynman R. P. (1965) *The Character of Physical Law.* A series of lectures recorded by the BBC at Cornell University USA. London: Kox and Wyman. (перевод: Фейнман Р. (1987) *Характер физических законов.* — М.: Наука, 160 с.)

[135] Feynman R. P. (1972) *Statistical Mechanics. A set of Lectures.* California Institute of Technology. Massachusetts: W. A. Benjamin, Inc. Advanced Book Program Reading (перевод: Фейнман Р. (1978) *Статистическая механика. Курс лекций.* — М.: Мир, 408 с.)

[136] Feynman R. P. (1982) Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics.* — Vol. 21, nos. 6/7. — P. 467–488.

[137] Frank M. J. (1979) On the simultaneous associativity of F (x; y) and x + y Gamma F (x; y). *Aequationes Math.*, 19. — P. 194-226.

[138] Frank M. J., Nelsen R. B. and Schweizer B. (1987) Best-Possible Bounds for the Distribution of a Sum – A Problem of Kolmogorov. *Probability Theory and Related Fields.* — 74.

[139] Frank M. J. and Schweizer B. (1979) On the Duality of Generalized Infimal and Supremal Convolutions. *Rendiconti di Matematica Series.* — VI, 12.

[140] Fréchet M. (1935) Généralisations du théoréme des probabilités totales. *Fundamenta Mathematica.* — 25.

[141] Gardner M. (1968) *Time travel and other mathematical rewilderments.* New York: W. H. Freeman and Company (русский перевод: Гарднер М. (1990) *Путешествие во времени.* — М.: Мир, 337 с.)

[142] Gassert H. (2004) Operators on Fuzzy Sets: Einstein and Zadeh. — http://edu.mediagonal.ch/fuzzy_logic_2004.

[143] Gebhardt J. and Kruse R. (1993) The context model — an intergating view of vagueness and uncertainty. *Int. J. Approximate Reasoning*, 9. — P. 283-314.

[144] Gill, R. D. (2005) The chaotic chameleon. In: *Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis: from Foundations to Applications (M. Schürmann and U. Franz, eds.), Quantum Probability and White Noise Analysis.* — Singapore: World Scientific. — Vol. 18 of QP–PQ. — P. 269–276, arXiv:quant-ph/0307217.

[145] Gill, R. D. (2005) On an argument of David Deutsch. In: *Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis: from Foundations to Applications (M. Schürmann and U. Franz, eds.), Quantum Probability and White Noise Analysis.* — Singapore: World Scientific. — Vol. 18 of QP–PQ. — P. 277–292, arXiv:quant-ph/0307188.

[146] Goldenok E. and Vorob'ov O. (2002) Random Sets of Events in Nature and Society. *Business Information System. Proceedings of BIS 2002.* — Poznan, Poland: The Poznan University of Economics. — P. 285–296.

[147] Goldenok E. (2003) Statistical Interdependence of Random Events Generates a Ranging Its Probabilities in Conjoint Analysis. *Business Information System. Proceedings of BIS 2003.* — Colorado Springs, USA: The University of Colorado at Colorado Springs. — P. 103–107.

[148] Goldenok E. and Goldenok K. (2005) On Direct and Inverse Variants of Eventological Markowitz' Problem: the Numerical Solution. *Proceedings of 2-nd IASTED Intern. Multi-Conf. ACIT-ACA'2005.* — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies. — P. 368–373.

[149] Goldenok E. and Goldenok K. (2005) Direct and inverse eventological Markowitz' problems. *Proceedings of 11-th Word Congress IFSA-2005.* — Beijing: Tsinghua University Press. — P. 334–339.

[150] Goldenok E. (2005) Peculiarities of Applications of Direct and Inverse Eventological Markowitz' Problems. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005.* — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 467–473.

[151] Goldenok E. (2006) Eventological substantiation of market «Marshall' Cross». *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006.* — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 2754–2759.

[152] Goodman I. R. (1982) Fuzzy sets as equivalence classes of random sets. In.: *Fuzzy Sets and Possibility Theory* (Yager R.R., Ed.), Pergamon Press, Oxford. — P. 327-342.

[153] Goodman I. R. and Nguyen H. T. (1985) *Uncertainty Models for Knowledge-Based Systems.* — North-Holland, Amsterdam.

[154] Gracian B. (1651-1653) *Oraculo Manual. El Criticon.* — Zaragoza: 1651. — Huesca: 1653. (перевод: Грасиан Бальтазар (1984) *Карманный оракул. Критикон.* — Москва: Наука, 632 с.)

[155] Grenander U. (1981) *Regular Structures. Lectures in Pattern Theory.* — Vol.III. — New York: Springer-Verlag (перевод: Гренандер У. (1983) *Лекции по теории образов. 3. Регулярные структуры.* — М.: Мир, 432 с.)

[156] DeGroot M. H. (1970) *Optimal Statistical Decisions*. McGrow-Hill Series in Probability and Statistics. — New York: McGrow-Hill Company, 1970 (перевод: де Гроот М. (1974) *Оптимальные вероятностное решения*. — М.: Мир, 493 с.)

[157] Hadamard J. (1954) *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathenmatical Fields*. — Princeton: Princeton University Press (перевод: Ж. Адамар. (1970) *Исследование психологии процесса изобретения в области математики*. — М.: Сов. радио).

[158] Hajek A. (2003) Interpretations of Probability. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2003 Edition), Edward N.Zalta (ed.) `http://plato.stanford.edu/archives /sum2003/entries/probability-interpret`.

[159] Hardy G. H. (1940) *Mathematician's Apology*. — Cambridge: University Press (перевод: Г.Г. Харди. (2000) *Апология математика*. — Ижевск: РХД, 103 с.)

[160] Hartley M., Bakshi G. (1998) *Markowitz Models of Portfolio Selection: The Inverse Problem. Advances in Investment Analysis and Portfolio Management*. — № 7. — P. 55–89.

[161] Heidegger M. (1949) *Sein und Zeit*.

[162] Hersh H. M., Caramazza A. and Brownell H. H. (1979). Effects of context on fuzzy membership functions. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications* (Gupta M.M., Ragade R.R. and Yager R.R., eds.), North-Holland, Amsterdam. — P. 389-408.

[163] Hernstein R. J. (1961) Relative and Absolute strength of Response as a Function of Frequency of Reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 4. — P. 267–272.

[164] Hisdal E. (1988). Are grades of membership probabilities? *Fuzzy Sets and Systems*, 25. — P. 325-348.

[165] Jung C. (1960) *Psychologische Typen*. — Gesammelte Werke. Rascher Verlag, Zurich (перевод: Юнг К. (1995) *Психологические типы*. Санкт-Петербург: Ювента. — М.: Прогресс–Универс, 717 с.)

[166] Kahneman D. and Tversky A. (1979) Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*. — № 47. — P. 263–291.

[167] Kemeny J. G., Snell J.L., and Thompson G.L. (1957) *Introduction to Finite Mathematics*. — Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall. (перевод: Кемени Дж., Снелл Дж. и Томпсон Дж. (1965) *Введение в конечную математику*. — М.: Мир, 487 с.)

[168] Klement E. P., Mesiar R., and Pap E. (2000) *Triangular norms*. — Kluwer Academic Pub., Boston.

[169] Kline M. (1980) *Mathematics. The Loss of Certainty*. — New York: Oxford University Press. (перевод: Клайн М. (1984) *Математика. Утрата определенности*. — М.: Мир, 447 с.)

[170] Klir G. J. and Folger T. (1988) *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*. — Prentice Hall, Englewood.

[171] Klochkov S. V. (2005) Inverse Eventological Markowitz' Problem: the Analytical Solution. *Proceedings of 2-nd IASTED Intern. Multi-Conf. ACIT-*

*ACA'2005*. — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies. — P. 390–392.

[172] Klochkov S. V. (2005) On a Solving the Inverse Eventological Markowitz' Problem. *Proceedings of 11-th IFSA-2005 World Congress*. — Beijing: Tsinghua University Press, Springer. — P. 327–329.

[173] Klochkov S. V. (2005) On Inverse Markowitz' Eventological Problem. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005*. — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 474–476.

[174] Klochkov S. V. (2006) Some Results in Eventological Portfolio Analysis. *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006*. — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 2760–2763.

[175] Kupriyanova T. V. (2005) On Recurrent Events and Fuzzy Sets. *Proceedings of 2-nd IASTED Intern. Multi-Conf. ACIT-ACA'2005*. — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies. — P. 374–379.

[176] Kupriyanova T. V. (2005) Recurrent Events and Fuzzy Sets. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005*. — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 832–837.

[177] Kyburg H. E. (1970) *Probability and Inductive Logic*. — New York: Macmillan.

[178] Lefebvre V. A. (2003) *Algebra of Conscience*. — Boston: Kluwer Academic Publishers (перевод: Лефевр В. (2003) *Алгебра совести*. — М.: Когито-Центр, 412 с.)

[179] Lefebvre V. A. (2003) Mentalism and behaviorism: merging? *Reflexive processes and control*. — № 2. — Vol. 2. — P. 56–76.

[180] Liang P. and Song F. (1996) What does a probabilistic interpretation of fuzzy sets mean? *IEEE trans. on Fuzzy Systems*. — 4. — P. 200-205.

[181] Loginov V. I. (1966) Probability treatment of Zadeh membership functions and their use in pattern recognition. *Eng. Cyber.*. — P. 68-69.

[182] Lomnicki A. (Ломницкий А.) (1923) Nouveaux fondements du calcul des probabilités. *Fund. Math.*. — Vol. 4. — P. 34–71.

[183] Lukasiewicz J. (1920) O logike trojwartosciowey. *Ruch Filozoficzny*. — T. 5. — S. 169–171.

[184] Mandelbrot B. B. (1975) *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. — Paris: Flammarion.

[185] Mandelbrot B. B. (1977) *Fractals: Form, Chance and Dimension*. — San Francisco: W. H. Freeman.

[186] Mandelbrot B. B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*. — New York: W. H. Freeman.

[187] Markowitz H. (1952) Portfolio selection. *The Journal of Finance*. — Vol. VII. — No. 1. — March 1952. — P. 77–91.

[188] Matheron G. (1975) *Random Sets and Integral Geometry*. — New Yoprk, London: J. Wiley & Sons (перевод: Матерон Ж. (1975) *Случайные множества и интегральная геометрия*. — М.: Мир. — 320 с.).

[189] Menger K. (1951) Ensembles flous et fonctions aleatoires. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences (Paris)*, 232. — P. 2001–2003.

[190] von Mises R. (1919) Grunflagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ztschr.* — Vol. 5. — P. 52–99.

[191] Molchanov I. S. (2005) *Theory of Random Sets.* — London: Springer.

[192] Müller A. and Stoyan D. (2002) *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* — Chichester: J. Wiley & Sons.

[193] Nelsen R.B. (1999) An Introduction to Copulas. *Lecture Notes in Statistics.* — New York: Springer-Verlag. — Vol. 139.

[194] von Neumann J., Morgenstern O. (1944) *Theory of Games and Economic Behaviour.* — Princeton: Princeton University Press (перевод: фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение.* — М.: Наука. — 708 с.)

[195] von Newmann J. (1966) *Theory of Self-Reproducing Automata.* A. W. Burks, ed. — Urbana: University of Illinois Press (перевод: фон Нейман Дж. (1971) *Теория самовоспроизводящихся автоматов.* — М.: Мир).

[196] Orear J. (1967) *Fundamental Physics.* — New York: John Wiley. (русский перевод: Орир Дж. (1969) *Популярная физика.* — М.: Мир, 557 с.)

[197] Polya G. (1945) *How to Solve It.* — Princeton: Princeton University Press (перевод: Пойя Д. (1961) *Как решить задачу.* — М.: Учпедгиз).

[198] Perfilieva I. (2006) Semilinear Spaces: Basic Structures fo Fuzzy Systems. *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006.* — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 1580–1587.

[199] Polya G. (1954) *Mathematica and Plausible Reasoning.* 2 vols. — Princeton: Princeton University Press (перевод: Пойя Д. (1957) *Математика и правдоподобные рассуждения.* — М.: ИЛ).

[200] Polya G. (1962/1965) *Mathematical Discovery.* 2 vols. — New York: John Wiley & Sons (перевод: Пойя Д. (1970) *Математическое открытие.* — М.: Наука, 452 с.)

[201] Post E. (1921) Introduction to a General Theory of Elementary propositions. *American Journal of Mathematics.* — Vol. 43. — № 3. — P. 163–185.

[202] Preston C. J. (1974) *Gibbs States on Countable Sets.* — Cambridge: Cambridge University Press (русский перевод: Престон К. (1977) *Гиббсовские состояния на счетных множествах.* — М.: Мир, 126 с.)

[203] Ripley B. D. (1988) *Statistical inference for spatial processes.* — Cambridge: Cambridge University Press.

[204] Robbins H. E. (1944/45) On the measure of a random set. I/II. — *Ann. Math. Statist.* — Vol. 15/16, — P. 70–74/342–347.

[205] Russell B. (1948) *Human Knowledge. Its Scope and Limits.* — London: George Allen and Unwin Ltd., Ruskin House, Museum Street (перевод: Рассел Б. (2001) *Человеческое познание. Его сфера и границы.* — М.: ИОИ; Киев: НИКА-ЦЕНТР, 558 с.)

[206] Russell B. (1946) *History of Western Philosophy and its Connection with Political and Social Circumstances from the Earliest Times to the Present Day.* — London: George Allen and Unwin Ltd., Ruskin House, Museum Street (перевод: Рассел Б. (2001) *История западной философии и ее связи с политическими*

*и социальными обстоятельствами от древнейших времен до наших дней.* — Новосибирск: СУИ-ИНУ, 992 с.)

[207] Saaty T. L. and Kearns K. P. (1984) *Analytical Planning. The Organization of Systems.* — Oxford, New York: Pergamon Press (перевод: Саати Т., Кернс К. (1991) *Аналитическое планирование. Организация систем.* Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 224 с.)

[208] Schrödinger E. (1959) *Mind and Matter.* — Cambridge, at the University Press (перевод: Шредингер Э. (2000) *Разум и материя.* — Москва–Ижевск: РХД, 96 с.)

[209] Schweizer B. (1991) *Thirty years of copulas. Advances in Probability Distributions with Given Marginals: Beyond the Copulas.* G. Dll'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti (eds.). — Kluwer Academic Publishers, London.

[210] Schweizer B., Sklar A. (1983) *Probabilistic Metric Spaces.* — Amsterdam: North-Holland.

[211] Semenova D. V. (2005) Om new Notion of Quasi-Entropies of Eventological Distributions. *Proceedings of 2-nd IASTED Intern. Multi-Conf. ACIT-ACA'2005.* — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies. — P. 380–385.

[212] Semenova D. V. (2005) Quasi-Entropies of Eventological Distributions. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005.* — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 838–843.

[213] Semenova D. V. (2006) On normalized quasi entropies of eventological distributions. *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006.* — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 2769–2776.

[214] Shafer G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence.* — Princeton: Princeton University Press.

[215] Shapley L.S. (1953) A value for $n$-person games. *Contribution to the theory of games. — vol. II (Kuhn H.W., Tucker A.W., eds.), Annals of Mathematics Studies.* — No. 28. — Princeton: Princeton University Press. — P. 307–317.

[216] Simpson E. H. (1951). The Interpretation of Interaction in Contingency Tables. *Journal of the Royal Statistical Society.* — Ser. B. — No. 13. — P. 238–241.

[217] Sklar A. (1959) Fonctions de repartition án dimension set leurs marges. *Publ. Inst. Statis.* Univ. Paris, 8. — P. 229-231.

[218] Stoyan D. and Stoyan H. (1994) *Fractals, Random Shapes and Point Fields.* — Chichester: John Wiley & Sons.

[219] Stoyan D., Kendall W., Mecke J. (1995) *Stochastic Geometry and Its Applications.* — Chichester: J. Wiley & Sons.

[220] Stoyanov J. (1997) *Counterexamples in Probability.* Second ed. — Chichester, New York: J. Wiley & Sons (перевод: Стоянов Й. (1999) *Контрпримеры в теории вероятностей.* — М.: Факториал, 288 с.)

[221] Székely G. J. (1986) Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. — Budapest: Akadémiai Kiadó (перевод: Секей Г. (2003) *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.* — Москва-Ижевск: ИКИ, 272 с.).

[222] Szmidt E., Kacprzyk J. (2006) Entropy and Intuitionistic Fuzzy Sets. *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006.* — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 2375–2382.

[223] Torgerson W. S. (1958) *Theory & Methods of Scaling.* — New York: Wiley.

[224] Turksen I. B. (1991). Measurement of membership functions and their acquisition. *Fuzzy Sets and Systems*, 40. — P. 5-38.

[225] Tversky A. and Kahneman D. (1992) Advances in prospect theory: Cumulative reopresentation under uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty.* — № 5. — P. 297–323.

[226] Tversky A. (1977) Features of similarity. *Psychological Review.* — № 84. — P. 327–352.

[227] Tversky A. and Gati I. (1982) Similarity, separability, and the triangle inequality. *Psychological Review.* — № 89. — P. 123–154.

[228] Vorob'ov A. O. (2005) On new Eventological Means of Fuzzy Sets. *Proceedings of 2-nd IASTED Intern. Multi-Conf. ACIT-ACA'2005.* — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies. — P. 364–367.

[229] Vorob'ov A. O. (2005) On new Notion of Eventological Means of Fuzzy Events. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005.* — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 477–481.

[230] Vorob'ov O. Yu. and Stoyan D. (1994) *Random sets, shapes and figures and their means.* — Freiberg: Technische Universitat Bergakademie Freiberg, Prepr. — 94-04. — P. 45–64.

[231] Vorob'ov O. Yu. (1991) Set-summation. *Soviet Math. Dokl..* — Vol. 43. — P. 747–752.

[232] Vorob'ov O. Yu. (1993) The calculus of the set-distributions. *Russian Acad. Sci. Dokl. Math..* — Vol. 46. — P. 301–306.

[233] Vorob'ov O. Yu., Vorob'ov A.O. (1994) Summation of set-additive functions anf the Mobius Inversion formula. *Russian Acad. Sci. Dokl. Math..* — Vol. 49, — № 2. — P. 340–344.

[234] Vorob'ov O. Yu., Vorob'ov A.O. (1996) Inverse problems for generalized Richardson's model of spread. *Computational Fluid Dynamics'96.* — New York: John Wiley & Sons. — P. 104–110.

[235] Vorob'ov O. Yu. (1996) A random set analysis of fire spread. *Fire Technology*, NFPA (USA). — Vol. 32. — № 2. — P. 137–173.

[236] Vorob'ov O. Yu., Novosyolov A. A., Simonov K. V. and Fomin A. Yu. (2001) Portfolio Analysis of Financial Market Risks by Random Set Tools. *Risks in Investment Accumulation Products of Financial Institutions. Simposium Proceedings held in January 1999, New York.* — Schaumburg, USA: The Society of Actuaries. — P. 43–66.

[237] Vorob'ov O. Yu. and Vorob'ov A. O. (2003) On the new notion of the set-expectation for a random set of events. *Proceedings of 2-nd FAM-2003 All-Russian Conference. Part 1 (Oleg Vorob'ov ed.).* — Krasnoyarsk: ICM RAS, KSU. — P. 23–37.

[238] Vorob'ov O. Yu. (2005) Eventology of random-fuzzy events. *Proceedings of 6-th FAM-2005 All-Russian Conference. Part 1 (Oleg Vorob'ov ed.)* — Krasnoyarsk: ICM of RAS, KSU. — P. 112-169.

[239] Vorob'ov O. Yu. (2005) Eventological theory of fuzzy events. *Proceedings of 2-nd IASTED Intern. Multi-Conf. ACIT-ACA'2005.* — Novosibirsk: Institute of Computational Technologies. — P. 356–363.

[240] Vorob'ov O. Yu. (2005) Eventology of random fuzzy events. *Proceedings of 11-th IFSA-2005 World Congress.* — Beijing: Tsinghua University Press, Springer. — P. 330–333.

[241] Vorob'ov O. Yu. (2005) Eventological Theory of Random Fuzzy Events. *Proceedings of Joint Intern. Conf. EUSFLAT-LFA'2005.* — Barcelona: Universitat Politéctica de Catalunya. — P. 822–831.

[242] Vorob'ov O. Yu. (2006) Eventology and Generalized Theory of Uncertainty. *Proceedings of 11-th Intern. Conference IPMU'2006.* — Paris, Les Cordeliers: EDK. — P. 2744–2753.

[243] Wang P. Z. (1983) From the fuzzy statistics to the falling random subsets, Advances in Fuzzy Sets. *Possibility Theory and Applications* (Wang P.P., Eds.), Plenum Press, New York. — P. 81-96.

[244] Wang P. Z. and Sanchez E. (1982) Treating a fuzzy subset as a projectable random set. *Fuzzy Information and Decision Processes* (Gupta M.M. and Sanchez E., Eds.), North-Holland, Amsterdam. — P. 213-220.

[245] Wang Y. H., Stoyanov J. and Shao Q. M. (1993) On independence and dependence properties of sets of random events. *Amer. Statistician.* — № 47. — P. 112–115.

[246] Wundt W. M. (1901) Wundt W.M. *Einleitung in die Philosophie* — (пер. с нем.: Вундт В.М. *Введение в психологию.* — М. — 1912, 2007).

[247] Yule G. U. (1903) Notes on the Theory of Association of Attributes in Statistics. *Biometrika.* — No. 2. — P. 121–134.

[248] Zadeh L. A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3). — P. 338–353, June.

[249] Zadeh L. A. (1968) Probability Measures of Fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23. — P. 421–427.

[250] Zadeh L. A. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Orderings. *Information Sciences.* — 1971. — Vol. 3. — P. 177–200.

[251] Zadeh L. A. (1973) Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.* — Vol. SMC-3. — P. 28–44.

[252] Zadeh L. A. (1975) The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. Parts 1 and 2. *Information Sciences.* — Vol. 8. — P. 199–249, 301–357.

[253] Zadeh L. A. (1975) Calculus of Fuzzy Restrictions. *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Progresses*, Ed. by L. A. Zadeh, K.S Fu, K. Tanaka and M. Shimura. — New York: Academic Press. — P. 1–39.

[254] Zadeh L. A. (1976) The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. Part 3. *Information Sciences.*. — Vol. 9. — P. 43–80.

[255] Zadeh L. A. (1976) A Fuzzy-Algorithmic Approach to the Definition of Complex or Imprecise Concepts. *International Journal of Man-Machine Studies.* — Vol. 8. — P. 249–291.

[256] Zadeh L. A. (1978) Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility *Fuzzy Sets and Systems.* — Vol. 1. — P. 3–28.

[257] Zadeh L. A. (1979) A Theory of Approximate Reasoning *Machine Intelligence*, Ed. by J. Hayes, D. Michie and L.I. Mikulich. — New York: Halstead Press. — P. 149–194.

[258] Zadeh L. A. (1983) The Role of Fuzzy Logic in the Management of Uncertainty in Expert Systems. *Fuzzy Sets and Systems.* — Vol. 11. — P. 199–227.

[259] Zadeh L. A. (1983) A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Language. *Computers and Mathematics with Applications.* — Vol. 9. — P. 149–184

[260] Zadeh L. A. (1984) A Theory of Commonsense Knowledge. *Aspects of Vagueness*, Ed. by H.J. Skala, S. Termini, and E. Trillas. — Dodrecht: D. Reidel. — P. 257–296.

[261] Zadeh L. A. (1985) Syllogistic Reasoning in Fuzzy Logic and its Application to Usuality and Reasoning with Dispositions. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics.* — Vol. 15. — P. 754–763.

[262] Zadeh L. A. (1996) Fuzzy Logic = Computing With Words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems.* — Vol. 4. — P. 103–111.

[263] Zadeh L. A. (1997) Toward a Theory of Fuzzy Information Granulation and its Centrality in Human Reasoning and Fuzzy Logic. *Fuzzy Sets and Systems.* — Vol. 90. — P. 111–127.

[264] Zadeh L. A. (2001) From Computing with Numbers to Computing with Words – From Manipulation of Measurements to Manipulation of Perceptions. *Computing With Words*, Ed. by P.P. Wang. – New York: Wiley and Sons. — P. 35–68.

# Предметный указатель
# Subject index


Э-портфельный анализ, 271
Э-потребитель, 285
Э-принятие решений, 361
Э-пространство, 115
Э-распределение, 46, 50, 56, 120
— аддитивные свойства, 57
— классическое, 56
— множества событий, 56
— случайного множества событий, 56
— условное, 120
— частично слойно равномерное, 143
— кусочно зависимое, 143
— равномерное, 143
— слойно равномерное, 143
— точечно зависимое, 143
Э-решение
— принятие, 361
Э-сет-медиана, 256
Э-сет-ожидание, 256
Э-статистика, 74
Э-теорема Байеса, 123
Фреше
— границы
— — для арной ковариации событий, 135
— — для парной ковариации событий, 132
— — для вероятности пересечения событий, 132
— корреляция событий
— — арная, 136
— — парная, 139
— неравенства
— — абсолютные, 142
— — для арной ковариации событий, 135
— — для парной ковариации событий, 132
— — для вероятности пересечения событий, 132
— парус, 140
— ветер, 140
СКАМ, 61
аксиома непрерывности, 42
аксиоматика Колмогорова, 39
алгебра нечетких событий, 224
алгебра событий, 50
асимметричная метрика, 64, 67
бесконечные вероятностные пространства, 42, 43
биномиальное многомерное распределение, 167
биномиальное распределение, 168
ценность со-бытия, 30
ценность события, 30
ценность создания события, 30
ценность восприятия события, 30
частный разум, 24
человек событийный, 32
дополнение
— случайного множества событий, 55
достоверное нечеткое событие, 224
дуальное событие, 26

дуальность со-бытия, 26
дуальность события, 26
эффект Юла-Симпсона, 350
эвентологическая функция степени принадлежности, 228
эвентологическая статистика, 74
эвентологическая задача
— Марковица обратная, 271
— Марковица прямая, 271
эвентологические формулы обращения
— связывающие события с событиями-террасками, 87
— связывающие события-террраски, 84
эвентологические формулы террасного обращения, 82
эвентологические сет-средние нечетких событий, 256
эвентологический портфельный анализ, 271
эвентологический потребитель, 285
эвентологическое измеримое пространство, 115
эвентологическое принятие решений, 361
эвентологическое пространство, 115
эвентологическое распределение, 46, 50, 56, 120
функция
— измеримая, 54
гиббсовский Э-потребитель, 285
гиббсовский эвентологический потребитель, 285
границы объединения и пересечения по Фреше, 202
идеальные события, 43
индикатор нечеткого события, 224
индикатор сет-операции по Минковскому, 245
измеримое пространство, 50
— эвентологическое, 115
классическое множество событий, 54
классическое случайное множество событий, 55
колмогоровские аксиомы, 40
корреляция событий
— арная, Фреше, 136
— парная, Фреше, 139
ковариация событий, 91, 107
— арная, 135
— арная, парная, 141
— парная, 132
кусочно зависимое Э-распределение, 143
матрица избранных событий, 212
метрика
— асимметричная, 64, 67
множество
— избранных событий, 50
— классическое
— — случайных событий, 54
— событий, 54
— произвольное
— — случайных событий, 54
— событий, 54
— случайных событий, 54
— событий, 50, 54
— — мощность, 51
— — случайное, 55
— собственное, 32
— всех подмножеств множества событий, 51
— — мощность, 51
множество случайных событий, 46, 56
множество событий, 46, 56
— случайное, 56
— — классическое, 56
— — произвольное, 56
моно-предпочтение, 353
мощность
— множества
— — событий, 51
— — всех подмножеств множества событий, 51
— слоя, 52
мощность нечеткого события, 254
мультковариация событий, 107
нечеткие события-террраски, 216
нечеткое элементарное событие, 218
нечеткое событие
— Заде, 198
— эвентологическое, 207, 210
нечёткое событие, 31
нечёткость со-бытия, 31
нечёткость события, 31
невозможное нечеткое событие, 224

основная Э-теорема о нечетких событиях, 245
парадокс Блайта «о трёх пирогах», 350
парадокс Симпсона, 350
перспективность со-бытия, 26
перспективность события, 26
полиномиальное распределение, 171
потребитель
— эвентологический, 285
пр-во элементарных нечетких событий, 224
принятие Э-решений, 361
принятие эвентологических решений, 361
принятие решений
— эвентологическое, 361
произвольное множество событий, 54
произвольное случайное множество событий, 55
пространство
— эвентологическое, 115
— измеримое, 50
— вероятностное, 53
— — классическое, 53
пространство исходов бытия, 23
равномерное Э-распределение, 143
равномощное равномерное Э-распределение, 143
разрешающая событийная способность разума, 24
разумный субъект, 24
реальные события, 43
сет-база, 61
сет-функция
— субаддитивность на дополнениях множеств, 57
— субаддитивность сет-функций, включающих мощность множества, 60
— супераддитивность на дополнениях множеств, 57
— супераддитивность сет-функций, включающих мощность множества, 58
сет-квантиль, 61
— эвентологический, 72
сет-медиана, 61
— эвентологическая, 64
сет-мода, 61
— эвентологическая, 66
сет-операции по Минковскому над нечеткими событиями, 241
сет-ожидание, 61
сет-предпочтение, 351, 353
— эвентологическое, 356
сет-среднее, 61
— эвентологическое, 64
сет-ядро, 61
следствие из основной Э-теоремы, 252
слой
— -событие, 52
— множества событий, 52
слой множества событий, 52
слойно равномерное Э-распределение, 143
случайный
— элемент, 54
— — вероятностное распределение, 54
случайный элемент, 54
случайное
— множество событий, 55, 56
— — дополнение, 55
— — классическое, 55
— — произвольное, 55
случайное конечное абстрактное множество, 61
случайное множество событий, 55, 56
случайное нечеткое событие, 253
событие, 23
— -слой, 52
— -терраска, 51
— условное, 114
событие-слой, 52
событие-терраска, 51
— по объединению, 51
— по пересечению, 51
событийный человек, 32
собственное множество событий, 32
среднемерное множество, 61
статистика
— эвентологическая, 74
теория СКАМ, 61
теория нечетких множеств Заде, 196
теория сет-средних, 61

точечно зависимое Э-распределение, 143
треугольная конорма, 199
треугольная норма, 199
условная вероятность, 120
условное Э-распределение, 120
условное нормирующее отображение, 114
— обратное, 114
условное событие, 114
вероятностное пр-во нечетких событий, 224
вероятностное пространство, 53
— классическое, 53
вероятность
— классическая, 226
— нечеткого события, 224
— условная, 120
вероятность со-бытия, 29
вероятность события, 29
зависимость нечетких событий, 235

algebra of events, 50
algebra of fuzzy events, 224
arbitrary random set of events, 55
arbitrary set of events, 54
asymmetrical metric, 64, 67
axiom of continuity, 42

basic E-theorem on fuzzy events, 245
Bayes' E-theorem, 123
binomial distribution, 168
binomial multivariate distribution, 167
Blyth's paradox «on three cakes», 350
bounds of union and intersection by Frechet, 202

certain fuzzy event, 224
classic random set of events, 55
classic set of events, 54
complement
— of random set of events, 55
conditional E-distribution, 120
conditional event, 114
conditional normalizing map, 114
— inverse, 114
conditional probability, 120
consumer
— eventological, 285
corollary from basic E-theorem, 252
correlation of events
— arity, Fréchet, 136
— pair, Fréchet, 139
covariance of events, 91, 107
— arity, 135
— pair, 132
— pair, arity, 141

dependence of fuzzy events, 235
dual event, 26
duality of co-being, 26
duality of event, 26

E-decision
— making, 361
E-distribution, 46, 50, 56, 120
— additive properties, 57
— classic, 56
— conditional, 120
— of random set of events, 56
— of set of events, 56
— layer uniform, 143
— partially layer uniform, 143
— pointwise dependent , 143
— uniform , 143
E-making decision, 361
E-portfolio analysis, 271
E-set-expectation, 256
E-set-median, 256
E-space, 115
E-statistics, 74
equipower uniform E-distribution, 143
event, 23
— -layer, 52
— -terrace, 51
— conditional, 114
event-layer, 52
event-terrace, 51
— as intersection, 51
— as union, 51
eventological consumer, 285
eventological distribution, 46, 50, 56, 120
eventological formulae of inversion
— connecting events with events-terraces, 87
— connecting events-terraces, 84

eventological formulae of terrace inversing, 82
eventological function of membership degree 228
eventological making decision, 361
eventological measurable space, 115
eventological portfolio analysis, 271
eventological problem
— of Markowitz, direct, 271
— of Markowitz, inverse, 271
eventological set-means of fuzzy events, 256
eventological space, 115
eventological statistics, 74
events man, 32

Fréchet
— bounds
— — for arity covariance of events, 135
— — for pair covariance of events, 132
— — for probability of intersection of events, 132
— correlation of events
— — arity, 136
— — pair, 139
— inequalities
— — absolute, 142
— — for arity covariance of events, 135
— — for pair covariance of events, 132
— — for probability of intersection of events, 132
— sail, 140
— wind, 140
function
— measurable, 54
fuzziness of co-being, 31
fuzziness of event, 31
fuzzy elementary event, 218
fuzzy event, 31
— by Zadeh, 198
— eventological, 207, 210
fuzzy events-terraces, 216

Gibbs' E-consumer, 285

Homo eventus, 32

ideal events, 43
impossible fuzzy event, 224
indicator of fuzzy event, 224
indicator of Minkowski's set-operation, 245
infinite probability space, 42, 43

Kolmogorov's axiomatics, 39
Kolmogorov's axioms, 40

layer
— -event, 52
— of a set of events, 52
layer of a set of events, 52
layer uniform E-distribution, 143

making decision
— eventological, 361
making E-decision, 361
making eventological decision, 361
matrix of chosen events, 212
mean-measure set, 61
measurable space, 50
— eventological, 115
metric
— asymmetrical, 64, 67
mono-preference, 353
multcovariance of events, 107
multinomial distribution, 171

own set of events, 32

piecewise dependent E-distribution, 143
pointwise dependent E-distribution, 143
power
— of a layer, 52
— of a set
— — of all subsets of a set of events, 51
— — of events, 51
power of fuzzy event, 254
private mind, 24
probability
— classical, 226
— conditional, 120
— of fuzzy event, 224

probability of co-being, 29
probability of event, 29
probability space, 53
— classic, 53
probability space of fuzzy events, 224
prospectivity of co-being, 26
prospectivity of event, 26

random
— element, 54
— — probability distribution, 54
— set of events, 55, 56
— — arbitrary, 55
— — classic, 55
— — complement, 55
random element, 54
random finite abstract set, 61
random fuzzy event, 253
random set of events, 55, 56
real events, 43
resolution event ability of mind, 24
RFAS, 61
RFAS theory, 61

set
— of all subsets of a set of events, 51
— — power, 51
— of events, 50, 54
— — arbitrary, 54
— — classic, 54
— — power, 51
— — random, 55
— own, 32
— of random events, 54
— — arbitrary, 54
— — classic, 54
— of selected events, 50
set of events, 46, 56
— random, 56
— — arbitrary, 56
— — classic, 56
set of random events, 46, 56
set-base, 61
set-core, 61
set-expectation, 61
set-function
— subadditivity of set-functions including power of a set, 60
— subdditivity on complements of sets, 57
— superadditivity of set-functions including power of a set, 58
— superadditivity on complements of sets, 57
set-mean, 61
— eventological, 64
set-median, 61
— eventological, 64
set-mode, 61
— eventological, 66
set-operations by Minkowski with fuzzy events, 241
set-preference, 351, 353
— eventological, 356
set-quantile, 61
— eventological, 72
Simpson's paradox, 350
space
— eventological, 115
— measurable, 50
— probability, 53
— — classic, 53
space of being outcomes, 23
space of elementary fuzzy events, 224
statistics
— eventological, 74
subject sapience, 24

theory of fuzzy sets by Zadeh, 196
theory of set-means, 61
triangle conorm, 199
triangle norm, 199

uniform E-distribution, 143

value of co-being, 30
value of creation of event, 30
value of event, 30
value of perception of event, 30

Yule-Simpson's effect, 350

*Олег Юрьевич Воробьев*

# Эвентология

Издание второе, переформатированное

Редактор И. А. Вейсиг

Корректор Т. Е. Бастрыгина

Отпечатано с готового оригинал-макета
При оформлении обложки использована
картина О. Ю. Хелгуса «События»

Подписано в печать 13.06.07. Формат 60 × 84 / 16
Усл. печ. л. 27.3. Уч.-изд. л. 26.1
Тираж 500 экз. Заказ

Издательский центр
Института естественных и гуманитарных наук
Сибирского федерального университета
660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79.